S. 1802. C. 62.

NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOMUS XV.

PRAECEDIT HISTORIA EIUSDEM ACADEMIAE
AD ANNOS MDCCXCIX — MDCCCII.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM. MDCCCVI.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

TABLE DES MATIÈRES.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

ANNÉES MDCCXCIX — MDCCCII.

Page

I. Evènemens mémorables :

I. Visite de l'Archiduc Joseph 3

II. Visite du Prince et de la Princesse de Bade . . 4

II. Changemens arrivés dans l'Académie :

I. Membres décédés 4

II. Nouvelles réceptions 16

III. Autres nominations 19

IV. Gratifications, décorations, avancemens civils . . 20

V. Distinctions littéraires 21

III. Présens faits à l'Académie :

I. Pour la Bibliothèque 23

II Pour le Cabinet d'Histoire naturelle . . . 37

III. Pour le Cabinet de Minéralogie . . . 39

IV. Pour le Jardin botanique 40

V Pour le Médailler 41

VI. Pour le Laboratoire chymique . . . ibid.

IV. Mémoires et autres ouvrages manuscrits présentés à l'Académie 42

Page

V. Mémoires lus dans les Séances académiques . 51

VI. Observations, expériences et notices intéressantes, faites et communiquées à l'Académie :

I. Essai pour tirer du sucre de la bèterave . . 60
II. Observation d'un grand froid en Sibérie . . 61
III. Nouvelle méthode de dissoudre les fossiles . . 62
IV. Crystaux de sucre de la bèterave . . . ibid.
V. Crystaux de Chrome et de Platine . . 63
VI. Tremblement de terre ressenti sur la mer d'Azoff . ibid.
VII. Analyse de l'Aschirite 64
VIII. Nitre dans le syrop de la bèterave . . ibid.
IX. Usage du charbon dans la culture des fleurs . . 65
X. Ecroulement de terre . . . . ibid.
XI. Préparations remarquables de sels . . . 66
XII. Stalactite de sel . . . . ibid.
XIII. Refoulement des eaux de la Soukhona et de la Wologda 67
XIV. Expériences galvaniques . . . . ibid.
XV. Oxide de Platine . . . . ibid.
XVI. Charbon brun et ambre jaune trouvés sur les bords de l'Iset 70
XVII. Tremblemens de terre ressentis à Kieff et ailleurs . 71

VII. Rapports présentés par des Académiciens chargés de commissions particulières :

I. Observations astronomiques à faire sur les côtes de la mer blanche 72
II. Modèle d'un vaisseau dans lequel on puisse naviguer sous l'eau 73
III. Méthode générale de résoudre les équations algébriques . ibid.

IV.

		Page
IV.	Théorie de l'électricité fondée sur les principes de la nouvelle Chymie	74
V.	Ouvrage sur les eclipses . . .	ibid.
VI.	Déscription de quelques plantes du Caucase . .	ibid.
VII	Etat du Musée académique . . .	75
VIII.	Culture du Heracléum Sphondylium recommandée au lieu de la bèterave	ibid.
IX.	Manière de conserver et d'empailler les animaux .	76
X.	Leçons d'Astronomie pratique données à l'Observatoire à deux maitres d'Astronomie du Corps des Cadets de Marine .	ibid.
XI.	Sur le perfectionnement des miroirs dans les Telescopes de Herschel	77
XII	Théorie des lignes parallèles . . .	ibid.
XIII.	Méthode de forger le platine . . .	78
XIV.	Analyse d'une substance osseuse trouvée dans la rivière Wislinga	ibid.
XV.	Machine pour rendre l'eau de mer potable . .	79
XVI.	Moyen proposé pour faire aller les bateaux contre le courant de l'eau	ibid.
XVII	Charbon de terre en Courlande . . .	80
XVIII.	Observations astronomiques faites sur la côte de la mer blanche par Mr. Ivanoff	ibid.
XIX.	Prétendue solution d'un problème du calcul des probabilités	81
XX.	Tourbes et pyrites de fer de Krasnoe Selo .	82
XXI.	Déscription d'un voyage en Lapponie . .	83
XXII.	Sur un ouvrage d'Entomologie . . .	ibid.
XXIII.	Fossiles trouvés dans le Parc de Pavlofsk . .	ibid.
XXIV	Charbon de terre et ambre jaune trouvés à Kamensk' .	85
XXV.	Machine pour déterminer la longitude en mer .	86

Page

XXVI. Obſervations aſtronomiques faites dans la Baltique par Mr. de Sarytcheff . . . . . ibid.

XXVII. Obſervations aſtronomiques faites ſur les côtes de la mer blanche par Mr. Abroſſimoff . . . 87

VIII. Leçons publiques . . . . . ibid.

IX. Cartes et ouvrages publiés par l'Académie . 88

X. Extraits des mémoires contenus dans ce volume:

I Claſſe Mathématique et Phyſico - Mathématique . 93

II. Claſſe de Phyſique 106

III. Claſſe d'Aſtronomie et de Météorologie . . 116

XI. Supplément:

I. Réflexions ſur l'état de la Statiſtique en Ruſſie et ſur la Nature de la Statiſtique en general, ſervans d'Introduction à la Deſcription ſtatiſtique des Salines de la Ruſſie et à l'Hiſtoire de l'Adminiſtration du Commerce des Sels, par Mr. Herrmann . 123

II. Sur les Propriétés de l'Acide carbonique repréſenté par le feu, par rapport au nouveau ſyſtème de Chymie de Mr. Winterl, par Mr. Scherer 146

NOVA

NOVA ACTA

ACADEMIAE SCIENTIARUM IMPERIALIS

Tomus XV.

MATHEMATICA et PHYSICO-MATHEMATICA.

Pag.

L. Euleri. Recherches sur quelques intégrations remarquables dans l'Analyse des fonctions à deux variables connues sous le nom de différences partielles 3

——. Illustratio paradoxi circa progressionem numerorum idoneorum sive congruorum (V. N. Acta T. XIV.) 29

——. Demonstratio insignis theorematis numerici circa uncias potestatum binomialium 33

——. Accuratior evolutio problematis de linea brevissima in superficie quacunque ducenda 44

Nic. Fuſs. De resolutione formulae integralis $\int x^{m-1} \partial x \, (\Delta + x^n)^\lambda$ in seriem semper convergentem, ubi simul serierum quarundam summatio directa traditur 55

——. Observationes circa ellipsin quandam prorsus singularem 71

——. Solution d'un problème de Mécanique relatif au vol des oiseaux 88

C.

Pag.

C. T. Kausler. Solution de quelques problèmes de l'Analyse indéterminée 116

—— . Demonstratio theorematis nec summam nec differentiam duorum cubo-cuborum cubo-cubum esse posse 146

—— . Novae disquisitiones super numeris formae $mx^2 + ny^2$ 156

B. Viscovatof. Essai d'une méthode générale pour reduire toutes sortes de series en fractions continues . 181

G. T. F. Beitler. Essai d'une Synthèse des équations du cinquième degré 193

F. T. Schubert. Continuatio dissertationis de curva loxodromica in corpore quovis rotundo descripta . 225

W. L. Krafft. Mémoire sur les tables de population des établissemens Imperiaux pour les mines de Catherinebourg, presentees à l'Academie par S. E. Mr. Hermann, Capitaine en Chef des Mines . . 237

J. Trembley. Recherches sur les intégrales premières des équations aux différences partielles du second degré et du troisième à trois variables . . 257

PHY-

PHYSICA.

	Pag.
T. Lowitz. Methodi novae facillimae ac simplicissimae acidum aceticum glaciale parandi expositio .	313
—— . Meditationes experimentis superstructae de vero agendi modo pulveris carbonum, dum vim suam depuratricem exserit	326
A. Sevastianof. Déscription du Harfang, ou de la chouette blanche	334
Severgin. Exposition de quelques expériences docimastiques faites sur les mines de cuivre . .	342
N. Ozeretskovski. De Myrmecophaga et Mane .	354
I. T. Koelreuter. De antherarum pulvere. Sect. 1 et 2.	359
—— . De antherarum pulvere. Sect. 3. . .	371
N. Ozeretskovski. De analogia aves inter et mammalia	399
L. de Crell. Experimenta quaedam novum salis sedativi acidum spectantia	402
T. Lowitz. Observationes nonnullae circa commune cupri et stanni cum acido muriatoso connubium .	428
—— . Methodi novae Kali Borussicum, barytae ope, ab adhaerente eidem acido sulphurico depurandi expositio	431
B. Severgin. Nouvelles observations sur les pierres de roche aggrégées	435
N. Ozeretskovski. De viburno opulo . . .	452

Pag.

C. P. Thunberg. Proteae, plantae generis, Species novae descriptae 458

I. H. Rudolph. Commentatio botanica in genus Ziziphora dictum 468

P. Zagorski. Commentatio anatomica, abortus humani monstrosi, rarissimi descriptionem ac delineationem sistens 473

B. Severgin Sur un mélange granitique particulier de Finnlande 483

ASTRONOMICA et METEOROLOGICA.

Pag.

F. T. Schubert. Observations de l'eclipse de Soleil le 11 Fevrier, et de celle des Pleyades le 12 Avril n. St. faites à l'Observatoire de l'Academie . . 493

——. Animadversiones de methodo determinandi locum cometae ope projectionis 507

——. Determination de la latitude et de la longitude de quelques endroits de l'Empire Russe . . 516

Wisnievski. Observationes Cereris, Palladis, Junonis Saturni, Uranique, habitae in Specula Acad. Scient. Imp. 533

I. A. Euler. Extrait des observations méteorologiques faites à St. Petersbourg en 1799 550

Inochodzof. Extrait parallele des observations méteorologiques faites à St. Petersbourg et Moscou en 1800 565

HIS-

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE

DES

SCIENCES.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

ANNÉES MDCCXCIX — MDCCCII.

I.
Evènemens mémorables.
I. Visite de l'Archiduc Joseph.

Le 1 Mars 1799 l'Académie fut honorée de la visite de Son Altesse Royale Mgr. l'Archiduc d'Autriche Joseph, Palatin d'Hongrie, qui, sous le nom d'un Comte de Bourgau, étoit arrivé depuis peu à St. Pétersbourg. S. E Mr. le Baron de Nicolay, Président de l'Académie, reçut cet illustre hôte au bas de l'escalier qui mène au Musée, et lui présenta d'abord Mrs les Académiciens assemblés dans la grande salle de la Bibliothèque, lesquels conduisirent le Prince dans les différens départemens du Musée, où chacun lui fit voir les objets les plus remarquables relatifs à sa Science. De là S A R. se rendit au grand globe de Gottorp, et quitta enfin l'Académie, en faisant Ses remercimens à Mr. le President et aux Academiciens de leur empressement à Lui montrer toutes les curiosités que les collections Académiques renferment.

II. Visite du Prince et de la Princesse de Bade.

Le 7 Septembre 1801 l'Académie fut honorée de la visite de Son Altesse Sérénissime Mgr. le Prince héreditaire de Bade, de Madame la Princesse Son Epouse et de leurs augustes enfans, le Prince Charles Louis Fréderic et la Princesse Amelie. Ces illustres Hôtes furent reçus au bas de l'escalier, à la portiere de la voiture, par Mr. le Président, qui les conduisit dans le grand salon de la Bibliothèque, où il Leur présenta les Académiciens assemblés. Après avoir vu et admiré toute la riche collection de curiosités de la nature et de l'art que l'Academie possède, Leurs Altesses Sérénissimes se retirèrent très-satisfaites, à l'entrée de la nuit, et témoignèrent à Mr. le Président et aux Académiciens Démonstrateurs leur reconnoissance de la manière la plus gracieuse.

II.

Changemens arrivés dans l'Académie.

I. Membres décédés:

a) Académiciens ordinaires:

L'Académie en a perdu cinq par la mort dans la période que comprend cet Exposé historique, dont trois sont dignes de tous ses regrèts par le nombre et l'importance de leurs services rendus sans interruption à l'Académie et aux sciences pendant une longue suite d'années.

Mr. Iean Albert Euler, Conseiller d'Etat, Chevalier de l'ordre de St. Vladimir de la 4me classe, Académicien ordinaire pour la Physique, Secrétaire perpétuel de l'Académie, Membre de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin, de l'Academie Royale de Stockholm, de celle de Paris et de beaucoup d'autres Académies et Sociétés savantes, mourût le 6. Septembre 1800. Le Défunt nâquit à St. Petersbourg le 16. Novembre 1734. Il n'eut que sept ans, lorsque son père, l'immortel Géomètre Léonard Euler, appellé à Berlin par Frederic II, l'emmena avec lui dans cette ville, où, après avoir fait ses humanités dans les écoles publiques, il s'adonna à l'étude des sciences mathématiques que son illustre père lui enseignoit lui-même. Secondé des dons heureux de la nature et des instructions d'un tel maître les progrès du jeune Géomètre furent si rapides et si marqués, que déjà à l'âge de 15 ans il fut en état de prendre une part active au nivellement du canal de Funow qui joint la Hâvel à l'Oder, et qu'à peine agé de vingt ans il fut reçu membre ordinaire de l'Académie de Berlin, laquelle lui confia en 1756 la direction de son observatoire, où il fit un grand nombre d'observations, entre autres sur la comète de 1759. Il avoit deja enrichi les Mémoires de l'Académie de plusieurs dissertations intéressan-essantes, lorsqu'en 1766 il fut appellé, avec son père, à St. Pétersbourg par feue l'Imperatrice Catherine II. de glorieuse mémoire. Il y arriva le 17. Juillet et fut nommé Académicien ordinaire pour la Physique et membre de la Commission établie pour l'administration économique de l'Académie. En 1769 il fut nommé Secrétaire perpétuel de l'Académie, et en 1776 Directeur des Etudes du Corps des Cadets de terre, avec le rang de Conseiller de Cour. En 1787 il fut décoré de l'ordre de St.

St. Vladimir. En 1797 il fut avancé au rang de Conseiller de Colleges, et en 1799 à celui de Conseiller d'Etat. Il avoit épousé en 1760 Mlle. Anne Charlotte Sophie Hagemeister, avec laquelle il a vecu quarante ans dans la plus douce union, et qui lui a survecu avec huit des onze enfans qu'elle lui avoit donnés. Il n'étoit pas d'une constitution bien forte. Des accès de crachement de sang, dont il fut atteint dès son adolescence, devinrent périodiques et l'attaquèrent presque regulièrement chaque année, mais ces attaques étoient de courte durée et cédoient ordinairement, au bout de quelques jours, aux remèdes de l'art et aux effets du repos et du regime. Le calme d'une ame exempte de toutes les passions tumultueuses, un genre de vie uniforme et très-reglé l'avoient préservé d'autres infirmités corporelles et rendue innocente la seule dont il eut à se plaindre. Mais une maladie violente, dont il fut atteint en 1798, et dont il ne guerît qu'avec peine et imparfaitement, laissa après elle une foiblesse qui, augmentant sans relâche, épuisa ses forces à vue d'oeil et mit fin à ses jours le 6. Septembre 1800. Il mourut dans le 66me année de sa vie, regretté de l'Académie, dont il avoit été pendant plus de 34 ans un membre très-utile; de sa famille, dont il avoit été le soutien et la gloire; de ses amis dont l'amour et l'estime, dignes prix de ses qualites personnelles et de ses vertus sociales, ont fait la consolation et le charme de sa vie; de tous ceux enfin qui ont été à portée de connoître, sa probité, sa douceur, sa modestie et ses vastes connoissances sans prétension ni ostentation. Outre un grand nombre de mémoires sur presque toutes les parties des sciences mathématiques, qui ornent les collections des Académies de St. Pétersbourg, de Berlin et de Munich, on a de lui divers mémoires imprimés séparément, savoir: sur la résistance du

du milieu dans lequel se meuvent les corps célestes; sur la manière d'employer le plus avantageusement la force de l'eau dans les moulins et autres machines; sur la cause physique de l'électricité; sur le mouvement de rotation des planètes, et spéciellement sur celui de Venus; sur le moyen mouvement de la Lune; sur les perturbations des comètes causées par l'attraction des planètes; sur l'arrimage des vaisseaux; sur la théorie de la Lune. Tous ces mémoires, à l'exception du premier, étoient des mémoires de concours et avoient été couronnés, trois par l'Academie de St. Petersbourg, deux par l'Académie de Paris, un par celle de Munich et un par la Société Royale de Göttingue. Mr. Euler a eu grande part aussi aux derniers ouvrages de son père: à la nouvelle théorie de la Lune, aux tables lunaires et à la théorie de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux; et l'Encyclopédie d'Yverdon renferme plusieurs articles de sa façon. Parmi tant de travaux scientifiques qui font honneur au génie et à l'application du Défunt, les plus pénibles et les moins reconnus sont peut-être ceux qu'il a consacrés pendant trente ans à la Météorologie. L'ordre et la méthode qu'il a sçu mettre dans sa maniere d'observer, et plus encore dans celle d'en tirer ses résultats, donnent un grand prix à la longue suite d'observations qui, dès l'année 1770, ont été faites par lui et régulièrement insérées dans les volumes des mémoires de l'Académie. Au reste il est hors de doute que feu Mr. Euler auroit pu donner un plus haut degré de perfection à ces observations s'il eut pu occuper constamment la même demeure, et si de fréquens déménagemens n'eussent pas dérangé tant de fois son appareil météorologique. Il n'est pas moins certain que les fonctions pénibles et les devoirs multipliés attachés à la place de Secrétaire perpétuel l'ont empêché de consacrer plus

de

de tems aux recherches mathématiques, pour lesquelles il avoit eu un penchant inné et une si grande aptitude et facilité.

Mr. Jean Lepechin, Conseiller d'Etat, Chevalier de l'ordre de Ste. Anne de la 2de et de St. Vladimir de la 4me Classe, Académicien ordinaire pour la Botanique, Docteur en Médecine, membre et Secrétaire perpétuel de l'Académie Impériale Russe, membre de la Société libre économique de St. Pétersbourg, du Collège Impérial de Médecine, de la Société des amis Scrutateurs de la nature à Berlin etc. naquit à St. Pétersbourg le 8 Septembre 1737. En 1751 il fut placé comme Gymnasiste au Gymnase de l'Académie, à la suite d'un Oukaze du Haut et Dirigeant Sénat, et après y avoir fait ses humanités, il fut nommé Etudiant en 1760. En 1762 l'Académie l'envoya dans les païs étrangers, pour y achever ses études, ce qu'il fit à Strasbourg, où il reçut en Mai 1767 le grade de Docteur, et d'où il revint à St. Pétersbourg au mois d'Octobre de la même année. L'Académie le reçut en 1768 au nombre de ses Adjoints et le mit à la tête de l'une des expéditions physiques qui dans ce tems-là furent formées, par ordre de l'Impératrice Catherine II. de glorieuse mémoire, dans la vue d'augmenter la masse des connoissances physiques par la recherche de ce que les provinces orientales et septentrionales du plus vaste des empires offrent de plus digne à l'attention du Naturaliste observateur. C'étoit pendant ce voyage, dont les fruits sont connus à toute l'Europe, que notre savant naturaliste fut reçu membre de la Société libre économique de St. Pétersbourg (en 1770) et membre ordinaire de l'Académie (en 1771). De retour à St. Pétersbourg vers la fin de l'an 1772, après peu de mois de repos, l'Académie, à la suite d'un ordre Suprême, envoya Mr.

Mr. Lepéchin faire un second voyage dans la Russie blanche, dans la vue de mieux connoître cette province sous le rapport de l'Histoire naturelle, et il fut de retour de ce second voyage vers la fin de l'année 1773. En 1774 l'Académie lui conféra la Sur-Intendance de son jardin botanique, et la même année il fut chargé de la censure des livres que la Commission Impériale établie pour les traductions faisoit publier, fonction dont il s'acquitta jusqu'à l'époque de la fondation de l'Académie Impériale Russe, qui mit fin à la dite Commission. En 1776 la Société des amis Scrutateurs de la nature à Berlin reçut notre Savant au nombre de ses membres. En 1777 l'Académie chargea Mr. Lepechin de l'Inspection de son Gymnase, et il remplît les fonctions de cette place avec beaucoup de zèle et d'activité jusqu'en 1794, où il demanda et obtint sa dimission de cette charge. En 1780 il fut avancé au rang de Conseiller de Cour. En 1783 il fut nommé membre et Secrétaire perpétuel de l'Académie Impériale Russe. En 1790 il obtint la décoration de l'ordre de St. Vladimir de la 4me Classe. En 1797 il fut avancé au rang de Conseiller de Collège et reçu la même année au nombre des membres honoraires du Collège Impérial de Médecine. En 1799 il fut nommé Conseiller d'Etat et decoré en 1802 de la croix de Ste. Anne de la 2de Classe. Une hydropisie de poitrine, contre laquelle sa constitution, naturellement vigoureuse, lutta plusieurs années, mit fin à ses jours et le ravit aux sciences, à l'Académie, à sa famille et à ses amis le 6 Avril 1802.

Outre la déscription de ses voyages en trois volumes, qui a été traduite en allemand, et en partie aussi en français, et à laquelle Mr. l'Académicien Ozeretskovski, qui avoit été at-

taché à l'expédition de Mr. Lepechin, vient d'ajouter un quatrième volume; et outre dix-huit mémoires écrits en latin et insérés dans les *Novi Commentarii*, les *Acta* et les *Nova Acta* de l'Académie, on a de feu Mr. Lepechin encore trois mémoires en langue Russe: le premier sur la culture de la soie en Russie; le second sur les avantages de la pêche à baleines pour la Russie; le troisième sur les maladies épidemiques des bêtes à cornes. C'est aussi à lui qu'on doit la traduction de la plus grande partie de l'histoire naturelle du Comte de Buffon.

C'est tout ce que nous avons pu rassembler des circonstances et des principaux évènemens de la vie du défunt Académicien. L'Académie Impériale Russe ayant chargé un de ses membres de composer l'éloge de Mr. Lepechin, les services qu'il a rendus à ce corps savant, seront appréciés dans cet ouvrage. Loin de vouloir anticiper sur un travail qui est entre de si bonnes mains, nous bornons aux notices qu'on vient de lire cette courte esquisse biographique, que nous ne saurions terminer d'une maniere plus glorieuse pour la mémoire du Défunt, qu'en faisant mention encore du prix que S. E. Mr. le Conseiller privé et Senateur de Mouravieff, Collégue du Ministre de l'Instruction publique, avoit promis en 1803 à celui des Elèves de l'Académie des Arts qui auroit produit la meilleure esquisse d'un monument sépulcral de notre Académicien, prix qui a été remporté l'année 1804 par l'Elève d'Architecture Kalachnikoff, dont le dessin a été gravé depuis, aux fraix de l'illustre Mécène mentionné, que ce trait de patriotisme honore autant que le savant national qui en a été l'objet.

Mr. Jean Gottlieb Georgi, Conseiller de Collège, Chevalier de l'Ordre de Ste. Anne de la 2de Classe, Académicien ordinaire

dinaire pour la Chymie, Docteur en Médecine, membre de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Prusse, de l'Académie Impériale des Curieux de la nature et de plusieurs autres Académies et Sociétés savantes, mourût le 27 Octobre 1802 dans la 72me année de son âge. Le Défunt nâquit à Wachholzhagen, paroisse de la Synode de Treptow, dans le Duché de Pomeranie le 31 Décembre 1729. Après avoir reçu sa premiere instruction de son pere, curé du dit village, et fait ses humanités dans l'école de la capitale de la province, il s'adonna à l'étude de la Pharmacie; et ayant fait, après quelques années d'apprentissage, un voyage en Suède, il y continua ses études de Chymie et d'Histoire naturelle, les premieres sous l'habile Ferber, pere du célèbre Minéralogiste de ce nom, et les autres sous l'illustre Chevalier de Linné. De retour dans sa patrie il exerçoit pendant quelques années la Pharmacie à Stendal, capitale de la vieille marche, lorsque le projet de l'Académie Impériale des Sciences, d'envoyer des Naturalistes dans toutes les provinces du vaste Empire de Russie, vint reveiller en lui le goût des voyages et la passion pour l'étude de l'histoire naturelle. Il offrit à l'Académie ses services, et ses offres ayant été agréés, il se rendit en 1770 à St. Pétersbourg, d'où il fut envoyé le 1 Juin de la même année à Astrachan, pour aider feu Mr. Falk, qui étoit à la tête de l'expédition dite d'Orenbourg, dans ses savantes recherches. Après la mort de l'infortuné Falk, Mr. Georgi fut transféré par l'Académie à l'Expédition de Pallas, avec ordre de diriger une Expédition secondaire qu'on forma de celle de Pallas renforcée par les Etudians de Falk. De retour à St. Pétersbourg en 1774 il mit en ordre le journal de son voyage et le présenta à l'Académie, laquelle, pour recompenser ses services, le reçut en 1776 au nombre de ses

Adjoints. En 1783 il fut nommé Académicien ordinaire pour la Chymie. En 1799 il fut avancé au rang de Conseiller de Collèges et en 1802 il fut décoré de l'Ordre de Ste. Anne de la 2de Classe. Outre un grand nombre de mémoires de Chymie qui se trouvent dans les *Acta* et *Nova Acta* de l'Académie il a écrit beaucoup d'ouvrages connus et estimés, parmi lesquels il suffira de nommer la relation de son voyage, le voyage de Falk, la déscription des nations de l'Empire de Russie, la déscription physique et topographique de l'Empire de Russie. Il a remporté beaucoup de prix de la Société libre économique et la collection des oeuvres de cette Société renferme un grand nombre de mémoires de feu Mr. Georgi. Un caractère droit et franc, une grande vivacité dans les gestes et l'expression, une tournure d'esprit très-agréable, le don des reparties et des saillies spirituelles le faisoient rechercher dans les Sociétés, avant que les infirmités de l'âge décrépit, et les maladies, eussent épuisé en lui ce fond de bonne humeur et émoussé les qualités sociales qui avoient rendu son commerce si agréable. Quoique septagenaire, il a conservé jusqu'à sa mort l'ouie et la vue non-affoiblies et ses cheveux bruns avoient gardé leur couleur sans grisonner.

Jean François de Vauvilliers, ci-devant Professeur de Langue grecque à Paris et membre de l'Académie des Inscriptions et belles lettres de cette ville, mourut le 23 Juillet 1801. Les orages de la révolution l'avoient forcé de quitter sa patrie et de chercher un refuge en Russie, où Paul I. lui donna un azile en 1798, en le nommant Académicien ordinaire. Une santé foible et languissante ne lui a pas permis de rendre aucun service à l'Académie.

Mr.

Mr. François Ulric Théodore Aepinus, Conseiller privé, membre de la Commission pour l'établissement des écoles de l'Empire, Chevalier de l'Ordre de Ste. Anne de la premiere Classe, ci-devant Académicien ordinaire pour la Physique, puis Directeur des etudes du Corps Impérial des Cadets gentilshommes, puis Instituteur de Mgr. le Grand Duc Paul Petrovitch, membre de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, de la Société Royale de Londres et de plusieurs autres Académies et Societés savantes. Le Défunt náquit à Rostock le 13 Décembre 1724. S'étant fait connoître de bonne heure et d'une maniere distinguée par plusieurs ouvrages de Mathématiques publiés à Rostock, il fut attaché à l'Observatoire de l'Académie de Berlin et soigna pendant plusieurs années la partie astronomique du Calendrier. En 1757 il obtint la place d'Académicien ordinaire pour la Physique dans notre Académie, dont il orna les mémoires pendant plusieurs années des fruits de ses savantes méditations. Le dernier volume des nouveaux Commentaires, qui contient des mémoires de ce savant, est le 12me pour les années 1766 et 1767. Depuis ce tems-là d'autres devoirs attachés à d'autres places le détournèrent de la carrière des Sciences, et l'aliénèrent de l'Académie, à laquelle il na plus tenu depuis que comme membre honoraire, quoiqu'il fut compté encore parmi les membres de la Conférence, en mémoire des anciennes liaisons plus intimes avec ce corps. Outre un grand nombre de mémoires de sa façon qui se trouvent dans les collections de notre Académie et de celle de Berlin, on a de lui deux ouvrages qui ont le plus contribué à faire sa réputation, savoir son essai d'une théorie de l'électricité et du magnétisme et son recueil de différens mémoires sur la tourmaline, dont il a été le premier à découvrir les propriétés électriques.

Ayant

Ayant obtenu en 1798 sa dimission de toutes ses charges, en gardant ses appointemens, il alla passer le reste de ses jours en Livonie et mourût de marasme à Dorpat le 10 Août 1802 âgé de 78 ans 4 mois.

b) Membres honoraires dans l'Empire.

Mr. Charles de Kruse, Conseiller privé et premier Médecin de Corps de Sa Majesté l'Empéreur. Reçu membre honoraire de l'Académie le 16 Septembre 1756, décédé en Juillet 1799.

Mr. Jean Gotthilf Stritter, Conseiller d'Etat et Chevalier de l'Ordre de St. Vladimir de la 4me Classe, membre de la Société Russe de Moscou et de la Société météorologique de Manheim, né à Idstein dans la Principauté de Nassau le 10 Octobre n. St. 1740; reçu membre honoraire de l'Académie le 27 Septembre 1787; pensionnaire de l'Académie le 1 Mars 1790; decédé à Moscou le 19 Fevrier 1801.

c) Membres honoraires externes.

Mr. Jean Reinhold Forster, Docteur en Droit, Professeur d'Histoire naturelle à l'Université de Halle. Membre de plusieurs Academies, né à Derschau dans la Prusse occidentale le $\frac{11}{22}$ Octobre 1729; reçu au nombre des membres honoraires externes de l'Academie le 11 Septembre 1780; décédé à Halle le $\frac{5}{16}$ Décembre 1798.

Mr. Guillaume Henry Sebastien Buchholz, Docteur en Médecine, Conseiller des mines et Medecin de la Cour de S. A. S. Mgr.

Mgr. le Duc de Saxe-Weimar, né à Bernbourg 1734; reçu au nombre des membres honoraires externes de l'Académie le 28 Juillet 1794; mort le $\frac{5}{16}$ Décembre 1798.

Mr. George Christophe Lichtenberg, Conseiller de Cour de S. M. Britannique, Professeur de Philosophie à l'Université de Göttingue, né à Ober-Ramstädt, près de Darmstadt, le 1 Juillet 1744; reçu membre externe de l'Académie le 28 Juillet 1794; décédé à Göttingue le $\frac{13}{24}$ Fevrier 1799.

Mr. Joseph Black, Professeur de Chymie à l'Université d'Edinburgh; reçu membre honoraire externe le 28 Janvier 1783.

Mr. Abraham Gotthelf Kästner, Conseiller aulique de S. M. Britannique, et Professeur de Mathématique et de Physique à l'Université de Göttingue, né à Leipzik le 27 Septembre n. St. 1719; reçu membre honoraire externe de l'Académie le 23 Octobre 1786; décédé à Göttingue le 20 Janvier 1800.

d) Correspondans.

Mr. Jacques Fries, Conseiller de Cour et Inspecteur de l'Administration médicinale du Gouvernement de Wolgda; reçu Correspondant de l'Académie le 16 Octobre 1788; nommé Pensionnaire le 1 Mars 1801; décédé à Wologda le 5 Novembre de la même année.

Mr. Jean Philippe de Carosi, Capitaine au Service de Pologne; reçu Correspondant le 5 Juin 1786; décédé à Mogila, près de Cracovie en 1801.

II.

II. Nouvelles réceptions.

a) Au nombre des membres honoraires regnicoles.

Mr. Jean Henry Busse, Conseiller du Consistoire et Pasteur à l'eglise de Ste. Cathérine, ci-devant Conrecteur du Gymnase académique, puis Bibliothécaire et Adjoint de l'Académie. Reçu membre honoraire le 19 Mars 1800.

S. E. *Mr. Alexandre de Schichkoff*, Vice-Amiral, membre du Collège Impérial de l'Amirauté, Chevalier de l'Ordre de Ste. Anne de la 1[re] Classe. Reçu le 29 Octobre 1800.

S. E. Mr. *Nicolas de Novosiltsoff*, Chambellan actuel de S. M. I. et Chevalier de l'Ordre de St. Vladimir de la 4[me] Classe. Reçu le 16 Septembre 1801.

S. E. *Mr. le Baron de Vietinghoff*, Conseiller-Privé. Reçu le 4 Juillet 1802.

b) Au nombre des membres honoraires externes.

Mr. John Robison, Professeur de Philosophie naturelle en l'Université d'Edinburgh. Reçu le 13 Avril 1800.

Mr. Maurice Henry, ci-devant Académicien ordinaire pour l'Astronomie, ayant demandé et obtenu sa dimission, fut nommé membre honoraire externe le 15 Juin 1800.

Mr. Charles Pierre Thunberg, Professeur d'histoire naturelle à l'Université d'Upsala, Chevalier de l'Ordre de Wasa. Reçu le 15 Avril 1801.

Mr.

Mr. Victor Fossombroni, membre de l'Institut des Sciences à Bologne. Reçu le 7 Fevrier 1802.

Mr. Pierre Simon La Place, membre du Sénat Conservateur, de l'Institut national et du Bureau des Longitudes à Paris. Reçu le 13 Octobre 1802.

Mr. Antoine Frèderic Fourcroy, Conseiller d'Etat, membre de l'Institut national à Paris. Reçu le 13 Octobre 1802.

Mr. Georges Cuvier, Professeur d'Anatomie au Musée, membre de l'Institut national à Paris. Reçu le 13 Octobre 1802.

c) Au nombre des Adjoints:

Mr. Alexandre Sevastianoff, Bibliothécaire de S. A. I. Mgr. le Grand-Duc Constantin Pavlovitch. Nommé Adjoint pour l'Histoire naturelle le 4 Novembre 1799.

Mr. Thimothée Smélovski, Professeur extraordinaire de Chymie et de matiere médicale à l'Académie de Médecine et de Chirurgie de St. Pétersbourg. Reçu Adjoint pour la Botanique le 19 Mai 1802.

d) Au nombre des Correspondans de l'intérieur.

Mr. *Basile Wiscovatoff,* Lieutenant d'Artillerie et maître de Mathématiques au Corps des Cadets du Génie. Reçu le 1 Juillet 1799.

Mr. Jean Tchernitzin, Chef des mines d'Argent à Nertchinsk. Reçu le 22 Juin 1800.

Mr. Robert Hynam, Artiste Mécanicien à St. Pétersbourg. Reçu le 21 Septembre 1800.

Mr. André Lochtin, Conseiller titulaire. Reçu le 26 Avril 1801.

Mr. Basile Petroff, Professeur de Physique à l'Académie de Médecine et de Chirurgie de St. Pétersbourg. Reçu le 7 Fevrier 1802.

e) Au nombre des Correspondans externes:

Mr. Jérémie Benjamin Richter, Secrétaire des Mines à Breslau Reçu le 14 Mai 1800.

Mr. Jean Charles Burkhardt, Adjoint du Bureau des Longitudes à Paris. Reçu le 15 Avril 1801.

Mr. l'Abbé Manesse, à Munster. Reçu le 15 Avril 1801.

Mr. Jean Tobie Bürg, Adjoint d'Astronomie à l'Observatoire de Vienne. Reçu le 8 Juillet 1801.

Mr. Charles Frederic Gauſs, Docteur en Philosophie à Brunsvick. Reçu le 31 Janvier 1802.

Mr. Charles Pougens, de l'Institut national de Paris. Reçu le 13 Octobre 1802.

III.

III. Autres nominations.

Le 26 Mars 1800 Mrs. les Académiciens *Ozeretskovski* et *Schubert* furent nommés le premier Sur-Intendant du Musée et le second Bibliothécaire de l'Académie.

Le 1 Septembre 1800 Mr. l'Académicien *Gourieff*, à la suite d'une correspondance entre le Collège de l'Amirauté et l'Académie, au sujet de l'établissement d'une Ecole d'Architecture navale, fut nommé Professeur de Mathématiques de cette école.

Le 7 Septembre 1800 Mr. l'Académicien *Fuſs* fut nommé Secrétaire perpetuel de l'Académie.

Le 22 Septembre de la même année le même Académicien fut nommé Secrétaire de la Société Impériale libre économique de St. Pétersbourg.

Le 3 Novembre 1800 Mr. l'Académicien *Roumovski* fut nommé, par un Oukaze de Sa Majesté Impériale, Vice-Président de l'Académie.

Le 1 Mars 1801 Mr. Conseiller de Cour *Fries*, Inspecteur de la Régence médicinale du Gouvernement de Wologda, et Correspondant de l'Académie, fut nommé pensionnaire.

Le 16 Septembre 1801 Mr. l'Académicien *Zakharoff* fut nommé, par un Ordre Suprème, à une place au Département de S. E. Mr. le Chambellan actuel de Novosiltsoff, chargé de commissions particulières par Sa Majesté l'Empéreur.

Le 2 Décembre 1801 Mr. l'Académicien *Hermann* fut nommé, par un ordre Suprème, Chef de la Régence des Mines de Cathrinenbourg. L'Académie lui décerna avant son départ une des pensions vacantes de membre honoraire.

Le 18 Mars 1802 Mr. l'Académicien *Fuſs* fut nommé, par un Oukaze de Sa Majesté l'Empéreur, membre d'un Comité temporaire établi pour examiner divers reglemens présentés à la confirmation Suprème pour la réorganisation de plusieurs institutions savantes.

Le 22 Août 1802 Mr. l'Académicien *Krafft* fut nommé, par un Oukaze de Sa Majesté l'Empéreur, membre du Comité savant établi par le Collège de l'Amirauté.

Le 8 Septembre 1802 Mrs. les Académiciens *Ozeretskovski* et *Fuſs* furent nommés, par un Oukaze de Sa Majesté Impériale, membres du Directoire suprème des Ecoles de l'Empire.

IV. Gratifications, décorations et avancemens civils.

Le 7 Janvier 1799 Mrs. les Académiciens *Krafft*, *Georgi*, *Fuſs* et *Schubert* furent avancés, par un Ordre de Sa Majesté Impériale, au rang de Conseillers de Collège.

Le 21 Mars 1799 Mrs. les Académiciens *Euler*, *Lepechin* et *Ozeretskovski* furent avancés, par un Ordre Suprème, au rang de Conseillers d'Etat.

Le 10 Juillet 1799 Mr. l'Académicien *Roumovski* fut avancé, par un Oukaze de Sa Majesté l'Empéreur, au rang de Conseiller d'Etat actuel.

Le 20 Avril 1800 Mr. l'Academicien *Lowitz* fut avancé au rang de Conseiller de Collèges.

Le 14 Juin 1800 Mr. l'Académicien *Inokhodzoff*, fut avancé, par un ordre Suprême, au rang de Conseiller d'Etat.

Le 25 Octobre 1800 Mr. l'Académicien *Fuſs* fut avancé, par un Oukaze de Sa Majesté Impériale, au rang de Conseiller d'Etat.

Le 7 Décembre 1800 le Président de l'Académie, S. E. Mr. le Baron de *Nicolay*, fut avancé par Sa Majesté l'Empéreur au rang de Conseiller privé.

Le 31 Janvier 1800 Mr. l'Académicien *Lowitz* fut avancé au rang de Conseiller d'Etat.

Le 5 Fevrier 1801 Mr. l'Académicien *Hermann* fut avancé au rang de Conseiller d'Etat.

Le 21 Décembre 1801 Sa Majesté l'Empéreur daigna nommer, par des rescrits très gracieux, Chevaliers de l'Ordre de Ste. Anne de la 2de Classe, Mrs. les Académiciens *Ozeretskovski*, *Fuſs*, *Krafft*, *Lowitz* et *Severguine* et deux jours après Mr. l'Académicien *Pallas* fut décoré du même ordre.

Le

Le 11. Février 1802 Mr. l'Académicien *Gourieff* fut élevé, par un ordre Supreme, au rang de Conseiller de College.

Le 25. Mars 1802 Mr. le Vice-Président *Roumovski* et Mrs. les Academiciens *Inokhodzoff*, *Georgi*, *Schubert* et *Gourieff* furent décores de l'ordre de Ste. Anne de la 2de classe. Le premier reçut la croix garnie de brillans.

Le 24. Août 1802 Mr. l'Académicien *Severguine* fut avancé, par un ordre Suprème, au rang de Conseiller de Colleges.

Le 26. Septembre 1802 Mr. l'Académicien *Fuss* fut gradifié d'un bague à brillans que Sa Majeste l'Empereur lui fit remettre par S. E. Mr. le Conseiller privé de Mouravieff.

V. Distinctions littéraires obtenues par des Académiciens et Adjoints.

En Mai 1799 Mrs. les Académiciens *Georgi*, *Severguine* et *Lowitz* furent reçus au nombre des membres externes de la Société mineralogique de Jena.

En Mai 1800 Mr. l'Adjoint *Sevastianoff* fut reçu membre de la Société libre économique de St. Pétersbourg.

En Juin 1800 Mr. L'Académicien *Severguine* fut reçu membre honoraire du Collège Imperial de Medicine.

En

En Août 1801 Mrs. les Académiciens *Ozeretskovski* et *Lowitz* reçurent les diplomes de membres honoraires du Bureau d'Agriculture à Londres.

En Novembre 1801 Mrs. les Académiciens *Ozeretskovski*, *Schubert* et *Severguine* reçurent le diplome de membres honoraires externes de l'Académie Royale des Sciences de Stockholm.

Le 2. Juin 1802 Mr. l'Académicien *Fuss* fut reçu au nombre des membres honoraires externes du Bureau Britanique d'Agriculture à Londres.

Le 13. Novembre 1802 Mr. l'Académicien *Fuss* fut reçu au nombre des membres honoraires externes de la Société Royale des Sciences de Göttingue.

III.

Présens faits à l'Académie.

I. Pour la Bibliothèque.

1799.

De la part de Mr. le Dr. *Schröter*, Grand Baillif, à Lilienthal:

Beyträge zu den neuesten astronomischen Entdeckungen, 8. Zweyter Band. Göttingen 1798.

De

De la part de Mr. le Professeur *Comparetti* à Padoue:

Observationes opticae de luce inflexo et coloribus. 4. Patavii 1787.

Observationes dioptricae et anatomicae comparatae, de coloribus apparentibus, visu et oculo. 4. Patavii 1798.

Prodromo di Fisica vegetabile. 8. in Padova 1791.

Osservazioni sulle proprietà della China del Brasile. 8. Padov 1794.

De la part de Mr. *Benjamin Smith Barton*, Professeur d'histoire naturelle à l'Université de Pensylvanie:

A memoir concerning the fashinating faculty which has been ascribed to the Rattle-Snake and other American Serpents. Philadelphia 1796. 8

New views of the origin of the Tribes and Nations of America. Philadelphia 1797. 8.

De la part de Mr. *Bode*, Astronome à Berlin:

Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1801. Berlin 1798.

De la part de l'Académie royale des sciences de Berlin:

Memoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres, années 1792 et 1793 avec l'Histoire pour le même tems à Berlin 1798. 4

Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du Calcul différentiel dégagé de toute considération d'infiniment-petits, ou d'évanouissemens de limites, ou de fluxions, et déduit de l'Analyse algébrique des quantités finies, par J. L. La Grange. Paris an V. 4.

De la part de l'Académie royale des sciences de Stockholm:

Kongl. Vetenskaps Akademiens Handlingar. Les années 1771 — 1776.

Kongl. Vetenskaps Akademiens nya Handlingar. Les années 1784 — 1798.

De

De la part de l'Auteur:

Ausführliche Beschreibung der Methode, nach welcher bey der Kultur der Runkel-Rübe verfahren werden muss, um ihren Zuckerstoff noch möglichst zu vermehren, und sie so zu erhalten, dass sie mit Vortheil zur Zukkerfabrikation angewandt werden kann; von Franz Karl Achard. 8. Berlin 1799.

De la part de S. E. Mr. le Prince *Demètre* de *Golitzin*:

Traité de Minéralogie, ou déscription abrêgée et méthodique des minéraux, 4. Helmstädt 1796.

Lettre à Mr le Prof. Crell, ou observations sur le Catalogue méthodique et raisonné de la collection de fossiles de Mlle. Eve Raab, par Mr. de *Born*. Brunsvik 1797.

Seconde lettre à Mr. Crell, ou réflexions sur la Minéralogie moderne. Brunswik 1799.

De la part de l'Auteur:

La physico-mécanique du monde; par *Barthel Arthaud.*

De la part du *R. P. Kautsch.*

Geographia practica, seu methodus facilis ope projectionis sphaerae terraqueae construendi mappas geographicas etc. Acced. Astronomia etc. An. 1784.

Planetometria, sive dimensio distantiae et magnitudinis coelestium luminarium Solis et Lunae, secundum exploratissimam eorum parallaxin, quae mensuras has prope ad evidentiam usque in milliaribus germanicis definit. Concinnavit P. I. Kautsch, 1788.

Conspectus opticus magnae eclipsis Solis anno 1804 die 11 Februarii apparituræ, cujus umbrae et penumbrae, luminaris tractus per orbem terraqueum secundum tempus et observationis maximae quantitatem ope tabulae projectionis orthographicae perspicue exhibetur, ac imprimis pro meridiano Pragensi, calculante P. I. Kautsch 1799.

De la part de Mr. l'Académicien *Bode* à Berlin:

La 3me Livraison du nouvel Atlas céleste, No. XI. XII. XIII. et XIV.

De la Part de Mr. l'Académicien *Fuss*:

Versuch einer Theorie des Widerstandes zwey und vierrädriger Fuhrwerke jeder Art, mit Bestimmung der Umstände, unter welchen die einen vor den andern den Vorzug verdienen. Als eine Beantwortung der von der Königlichen Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Kopenhagen für das Jahr 1797 aufgegebenen Preisfrage, welche den ersten Preis erhalten hat. Kopenhagen 1798 4.

De la part de l'Academie royale des sciences de Berlin:

Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres, depuis l'avènement de Fréderic Guillaume II au Throne. Années 1794 et 1795, avec l'histoire pour le même temps.

De la part de la Société des Scrutateurs de la nature à Berlin:

Der Gesellschaft naturforschender Freunde zu Berlin neue Schriften, in 4. 1795 und 1796. 2 Theile.

De la part de Mr. l'Académicien *Bode*:

Astronomisches Jahrbuch auf das Jahr 1802. Berlin 1799.

De la part de Mr. *Sevastianoff*:

Извѣстїе о Балдонскомъ минеральномъ ключѣ, находящемся въ Курляндїй. С. П. 1799.

О благополучїи. Изъ путешествїя юнаго Анахарзиса. Сочиненїе славнаго Бартелемїя. 1798.

De la part de Mr. l'Académicien *Pallas*:

Bemerkungen auf einer Reise in die südlichen Statthalterschaften des Russischen Reichs, in den Jahren 1793 und 1794. Erster Band, mit colorirten Kupfern. 4. Leipz. 1799.

De

De la part de l'auteur:

Gustavi Paykull Fauna Suecica. Insecta. T. I II. Upsaliae. 8.

1800.

De la part de Mr. l'Académicien *Géorgi*:

Geographisch - physicalische und naturhistorische Beschreibung des Russischen Reichs, zur Uebersicht bisheriger Kenntnisse von demselben. Königsberg, 1797 — 1799. Cinq Volumes. 8.

De la part des auteurs:

Flora Petropolitana, sistens plantas in Gubernio Petropolitano sponte crescentes. 8. 1799. Auctore Sobolevsky.

Beschreibung verschiedener Verbesserungen am Brantweinbrenner-Geräthe, von Norberg. 8.

Memoria sobre algunos methodos nuevos de calcolar la longitud por las distantias lunares; par Don Joseph de Mendoza y Rios. Madrid 1795.

Tables to correct the observed altitudes of the Sun, Moon and Stars.

Recherches sur les solutions des principaux problèmes de l'Astronomie nautique; par Mr. Mendoza y Rios. Londres 1797.

Josephi Isidori Moralii ad excell. Virum Josephum Mazaredum de filiae institutione Commentarius. Madriti 1796.

Memoria matematica sobre el calcolo de la opinion en las electiones; par Don I. Isid. Morales. Madrid 1796.

De la part de S. E. Mr. de *Nartoff*.

Горнаго Совѣтника и Химіи Профессора Скополи Металлургія, переведенная на Россійской языкъ Андреемъ Нартовымъ, Тайнымъ Совѣтникомъ и Кавалеромъ.

De la part de S. E. Mr. le Vice-Amiral de *Schichkof.*

Собранïе морскихъ Журналовъ, или ежедневныхъ Записокъ содержащихъ въ себѣ плаванïя флотовъ, Эскадръ и судовъ Россïйскихъ и пр.

Списокъ Кораблямъ и прочимъ судамъ всего Россïйскаго флота. 4. 1799.

Треязычный морской Словарь, на Англинскомъ, Французскомъ и Россïйскомъ языкахъ. 4. 1799.

Собранïе морскихъ Журналовъ. 4. 1800.

Морское искуство. Част 1. 2. 1793. 4.

De la part de Mr. *Thunberg.*

Itineris C. P. Thunberg. 4 Volumina.

Prodromi plantarum Capensium. V. 2.

Iconum plantarum Japonicarum. Decur. 1. 2.

Dissertationes Upsalienses.

Dissertationum C. P. Thunberg recusarum Vol. 1. 2.

Descriptiones mammalium Suecicorum.

1801.

De la part de Mr. le Docteur *Piazzi* à Palerme:

Della Specola astronomica de Regi studi di Palermo, di Giuseppe Piazzi. Palermo 1794. 2 Vol. in Folio.

De la part de Sa *Majesté l'Empéreur*:

L'Atlas céleste de Mr. *Bode.*

De la part de Mr. l'Académicien *Severguine*:

Способъ испытывать минеральныя воды, сочиненный по новѣйшимъ о семъ предметѣ наблюденïямъ, трудами В. Севергина. С. П. 1800.

Способъ испытывать чистоту и неподложность химическихъ произведенïй лѣкарственныхъ, сочиненный В. Севергинымъ. С. Петербургъ 1800.

Таблица

Таблица показаующая составляющїя части минеральныхъ водъ, кои химически изслѣдованы были, составленная В. Севергинымъ.

Начальныя основанїя всеобщей и врачабной Химїи Iосифа франциска Жакина. Часть I. 2. 180 .

De la part de Mr. le Professeur *Pfaff*:

Disquisitiones Analyticae, maxime ad calculum integralem et doctrinam serierum pertinentes. Volumen I.

De la part de Mr. *Schwab* à Stutgard:

Tentamen novae Parallelarum theoriae notione situs fundatae. Stutgardiae 1801 in 8.

De la part de Mr. *Bode* à Berlin:

La 4me Livraison de l'Atlas céleste, les feuilles XV. XVI. XVII. et XVIII.

De la part de l'Auteur:

Winterl, Chemiae et Botanicae Profeſsoris etc., Prolusiones ad Chemiam saeculi decimi noni. Budae 1800.

De la part de l'Académie royale des Sciences de Prusse:

Mémoires de l'Académie royale des Sciences et belles-lettres, année 1796. Berlin 1799. 4.

Mémoires de l'Académie royale des Sciences et belles-lettres, année 1797. Berlin 1800. 4.

Sammlung der deutschen Abhandlungen, welche in der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelesen worden in den Jahren 1792—1797. Berlin 1799. 4.

De la part des Auteurs:

Schröters Beyträge zu den neuesten astronomischen Entdeckungen. 3. Band. 1. u. 2. Abtheilung. Göttingen 1800. 2 Bände. 8.

J. E. Bo-

J. E Bode's astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1803. Berlin 1800.

Abhandlung vom Durchgang der Venus vor der Sonnenscheibe im Jahr 1769, nebst Charten, von Bode.

De la part de Mr. le Baron de *Hüpsch.*

Epigrammatographia, sive collectio inscriptionum provinciarum Germaniae inferioris.

Nouvelles découvertes d'une méthode de traiter les hommes décédés, afin de rappeller à la vie ceux qui ne sont morts qu'en apparence.

Déscription de quelques machines et remèdes qu'on pourroit essayer pour détruire les fourmis de la Martinique et d'autres insectes.

Nouvelles découvertes de quelques testacées pétrifiés rares et inconnus.

Déscription du Cabinet et de la Bibliothèque de Mr. le Baron de Hüpsch, par Mr. de Brion.

Tabulae synopticae et systematicae Musei lib. Baronis de Hüpsch.

De la part des Auteurs, Traducteurs ou Editeurs.

Unterricht in der mathematischen Analysis und Maschinen-Lehre von J. Pasquich. 1. und 2. Theil. 3 Vol. 8.

Versuch eines Beytrags zur allgemeinen Theorie von der Bewegung und vortheilhaftesten Einrichtung der Maschinen, von J. Pasquich. in 8.

Opuscula statico-mechanica, principiis Analyseos finitorum superstructa. Editore J. Pasquich. Vol. I. II. 4.

Georg Vega's logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, in 8.

Georg Vega's logarithmisch trigonometrische Tafeln, nebst andern zum Gebrauch der Mathematik eingerichteten Tafeln und Formeln. 1. und 2. Theil. 8.

Georg Vega's Versuche der Enthüllung eines Geheimnisses in der bekannten Lehre der allgemeinen Gravitation. Wien 1800, in 8.

Ephemerides astronomicae anni 1798 ad Meridianem Vindobonensem; a Francisco de Paula Triesnecker et Joh. Bürg. in 8.

Epheme-

Ephemerides astronomicae anni 1799 etc.

Ephemerides astronomicae anni 1800 etc.

De la part de Mr. de *Lalande*:

Connoissance des tems à l'usage des Astronomes, pour l'an X. 8.

Connoissance des tems, pour l'an XI. 8.

Tables de Mars, par I. I le François Lalande. 8.

De la part des auteurs:

Geographische Ortsbestimmung des Stiftes Hohenfurt und Mühlhausen, von Alois David in 4.

Anton von Zach Vorlesung über die Feldbefestigung, Vertheidigung und Angriff. 2te Auflage mit 18 Kupfertafeln in 8.

Anleitung zur Zeitkunde, herausgegeben von Georg Vega in 8.

Mechanik des Himmels von G. S. Laplace, aus dem französischen übersezt von I. C. Burckhardt. 1r Theil. in 4.

De la part du traducteur:

Философія Ботаники Карла Линнея. перевед. Г. Смѣловскимъ. 8.

De la part de l'auteur:

Versuche über das Verhalten des Phosphors in verschiedenen Gas-Arten, von W. Boekmann. 8.

1802.

De la part des auteurs:

P. S. Pallas Bemerkungen auf einer Reise in die südlichen Statthalterschaften des Russischen Reichs. Zweiter Theil. 4. Leipzig 1801.

Versuche den Galvanismus zur Heilung einiger Krankheiten anzuwenden; angestellt und beschrieben von I. C. Grapengieſser. Berlin 1801.

Aea-

Аѳанасїя Стойковича, свободныхъ Художествъ и Философїи Доктора, Физика простымъ языкомъ за родъ Славено - Сербскій. I часть въ Будимѣ: 1801.

Geschichte von Servien und Bosnien, nebst einer Fortsetzung der Denkmäler der Ungrischen Geschichte und der historischen Litteratur der Ungrischen Nebenländer; von Engel, Assessor des Cont ts Zips. Halle 1801.

Собранїе физикохимическихъ новыхъ опытовъ и наблюденїй Василїя Петрова, Профессора Физики, часть I.

Memoria sull' principio delle velocità virtuali del Cavalier Vittorio Fossombroni, uno dei quaranta della Società Italiana e del istituto di Bologna. Firenze 1796.

De la part de l'Académie royale des Sciences de Stockholm:

Kongl. Vetenskaps Academiens nya Handlingar. Le dernier Trimestre de 1798, les années 1799 et 1800 complettes et les deux premiers trimestres de 1801. avec la table des matières depuis 1780 jusqu'à 1794.

De la part des auteurs:

Gustavi Paykull, Fauna Suecica. Tomus III. Insecta. Upsaliae 1800.

Histoire de l'Astronomie pour l'an IX. (1801) par Lalande. 8.

De la part de Mr. *Prony*:

Mécanique philosophique, ou Analyse raisonnée de diverses parties de la Science de l'équilibre et du mouvement. 4.

Notice sur les grandes tables logarithmiques et trigonométriques calculées au Bureau des Cadastres, sous la direction du Citoyen Prony.

De la part de Mr. le Chevalier *Thunberg*:

Beskrifning på Svenska Djur, forsta Classen, af C. Thunberg. Upsala 1798. 8.

Resa uti Europa, Africa, Asia farrätted åren 1770 — 1779 af C. Thunberg. Upsala 1798 — 1793. 4 Deler. in 8vo.

Prodromus plantarum Capensium. Upsaliae 1794 — 1800. Pars prior et posterior.

Icones plantarum Japonicarum. Upsaliae 1794 — 1800. Decas I et II.

Dissertationes academicae Upsaliae habitae, sub praesidio C. P. Thunberg. Vol. I. II. Göttingae 1799, 1800.

Museum naturalium Academiae Upsaliensis. descriptum a C. P. Thunberg. Pars XIV. XVI. XVII. XVIII. XIX. XXI.

Appendix III. IV. V. VI. VII.

Falco canorus De melilantho De drosea De valetudine tuenda Insecta Suecica De usu menyanthidis trifoliatae De oleo Caieputi	Sept dissertations académiques publiées à Upsala, sous la préséance de Mr. Thunberg.

De la part de Mr. le Docteur *Fuchs*:

Andreas Caesalpinus, de cujus viri ingenio, doctrina et virtute pauca delibat, ad capessendum in arte medica Doctoris axioma, Carolus Fuchs 1798.

De la part de S. E. Mr. le Président:

Méthode de préparer et de conserver les animaux de toutes les classes, pour les Cabinets d'Histoire naturelle, par P. F. Nicolas, de l'Institut national.

De la part de l'Université de Vilna:

Prospectus lectionum publicarum in Alma Universitate Vilnensi, ex anno 1800 in annum 1801. Vilnae. in folio.

Botanika stosowana czyly wiadomosc' o wlasnos'ciach y uzyciu roslin. Wilnie. 1799. 8.

Opisanie roslin w prowincyi w. x. l. naturalnie rosncych wedlug ukladu Linneusza. Wilnie. 1791. 8.

Poczatki chemii przez Iedezcia Sniadeckiego. T. I. II. w Wilnie. 1800. 8.

Nauka o paruszczaniu wody pewietrzen kwastkowem w trzech częsciach. w Krakowie 1787. 8.

Sessya publiczna koronacyi Alexandra I. w Wilnie. 8.

De la part de l'Institut national de Paris:

Mémoires de l'Institut national des Sciences et des Arts.

Sciences Mathématiques et Physiques. Tome I. II. III;

Sciences politiques et morales. Tome I. II. III;

Littérature et Beaux - Arts. Tome I. II. III.

De la part de la Société des Sciences de Göttingue:

Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Göttingensis Tomus XIII. et XIV.

De la part de Mr. le Prof. *Gmelin*:

Göttingisches Journal der Naturwissenschaften; herausgegeben von I. Fr. Gmelin. 1r Theil. Göttingen 1798. 8.

De la part de Mr. *Churchman*:

A variation Chart, by John *Churchman.*

De la part de Mr. le Chevalier *Thunberg*:

Icones plantarum Japanicarum. Decuria III.

Genera nova plantarum. Trois dissertations.

Fructificationis partium varietates.

Remedia sternutatoria.

Museum naturalium Academiae Upsaliensis. Append. VIII.

Resa uti Europa, Africa, Asia förrätted Aeren 1770 — 1779 I. II. III. IV. Delen. Upsala 1788 — 1793. in 8.

Dis-

Dissertationes Academicae Upsaliae habitae sub praesidio Car. Petr. Thunberg. Vol. I. II Göttingae 1799, 1800. in 8.

Beskrivning på Svenske Djur. Upsal. 1798. 8.

De la part de Mr. *Piazzi* à Palerme:

Risultati delle Osservazioni della nuova Stella scoperta il di 1 Gennajo 1801 al Osservatorio reale di Palermo.

De la part de Mr. de *Lalande*:

Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Années 1787 et 1788.

Connoissance des Tems, années 1792, 1793, 1794 V. VI. VII. VIII. IX et X.

Mélanges d'Astronomie. Paris an VI.

Extrait des observations astronomiques et physiques, faites par ordre de S. M. par Mr. de Cassini.

Abrégé de Navigation historique, théorétique et pratique par Jerome de Lalande. Paris 1793.

Ephémérides des mouvemens célestes, pour le méridien de Paris. Tom. IX. Paris 1792.

Le Guide astronomique, ou Calendrier à l'usage des Astronomes. Année 1791. Paris.

De la part de l'Université de Dorpat:

Geschichte und Beschreibung der Feyerlichkeiten bey Gelegenheit der den 21. und 22. April 1802 geschehenen Eröffnung der neuangelegten Kayserlichen Universität zu Dorpat; von Gottlob Benjamin Täsche.

De la part de la Société des Sciences de Philadelphie:

Transactions of the American philosophical Society held at Philadelphia. Vol. I. II. III. IV.

De la part de la Société royale des Sciences de Copenhague :

Nie Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter Deel I. II. III. IV. V.

Cartes de l'Atlas Danois.

De la part de Mr. *Bugge :*

Reise nach Paris. Copenhagen 1801.

Lehrbuch der gesammten Mathematik. Altona 1800. 8.

Gründliche und vollständige theoretisch - praktische Anleitung zum Feldmessen. Altona 1798. 8.

Observationes astronomicae, annis 1781, 1782, 1783 institutae in observatorio Regio Havniensi. Havniae 1784.

De la part de l'Académie Royale de Berlin :

Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles - lettres. Année 1798. Berlin 1801.

De la génération des connoissances humaines, Mémoire qui a partagé le prix de l'Académie ; par Mr. de Gerando. Berlin 1802 in 8vo.

Ueber den Urſprung unſrer Erkenntniſs, zwey Preiſschriften von Bendavid und Block. Berlin 1802. 8.

De la part de Mr. *Bode :*

Joh. Elert Bode, von dem neuen zwischen Mars und Jupiter entdeckten achten Haupt - Planeten des Sonnensystems. Berlin 1802. 8.

De la part de Mr. le Docteur *Herschel :*

Observations on the two lately discovered celestial bodies; by William Herschel. London 1802. 4to.

De la part de Mr. *Knighin :*

Dissertatio physico-medica de caloris in oeconomia animali usu et praestantia.

De

De la part de Mr. l'Académicien *Lowitz*:

Показанїе новаго, легчайшаго и выгоднѣйшаго способа приготовлять самую крепчайшую уксусную кислоту, изобрѣтеннаго Тобїею Ловицемъ. С. Петербургъ 1800.

De la part de Mr. l'Académicien *Schubert*:

Un manuscrit historique, comprenant la Chronologie fabuleuse des Indiens, depuis Alexandre le grand, en langue Malaye, et écrit en caractères arabes, par ordre d'Alla Eddin, Sultan d'Atchien.

De la part de S. E. Mr. le Prince *Dmitri Golitzin*:

Recueil de noms par ordre alphabétique, appropriés en Minéralogie aux Terres et Pierres, aux Métaux et Demi-métaux et aux Bitumes, avec un Précis de leur histoire naturelle et leurs synonymes, en latin, allemand et anglois, seconde edidion. 4.

De la part de Mr. le Comte de *Rumford*:

Philosophical papers etc. by Benjamin Count of Rumford. Vol. I. London 1802.

De la part de Mr. de *Köhler*:

Antwort auf die Einwürfe gegen die Untersuchung über den Sard, den Onyx und den Sardonyx der Alten. 8.

II. Pour le Cabinet d'Histoire naturelle.

De la part de Mr. l'Académicien *Lepechin*:

Du fil semblable à celui du chanvre, tiré sans aucun apprêt et tout crud des tiges d'une plante de l'Inde, nommée: *Hibiscus manihot. Linn.* cultivée dans le jardin botanique de l'Académie.

Envoyé

Envoyé par Mr. le Gouverneur de *Kursk*:

Deux monstres humains, l'un à deux têtes, quatre bras et quatre jambes, l'autre aussi à deux têtes, mais n'ayant que trois bras et trois jambes.

Envoyé par ordre de *Sa Majesté l'Empereur*:

Une Collection de vingt pièces de curiosités envoyées des Isles Aléoutes.

De la part de Mr. *Sevastianof*:

Un hibou blanc tacheté (*Strix nyctea. Linn.*).

Un jeune ortolan (Emberiza nivalis) à deux têtes.

De la part de Mr. *Stritter*:

Deux oeufs de canard à coques noires, pondus à Moscou.

De la part de Mr. *Fries* à Vologda:

Un morceau large plat et celluleux d'une substance inconnue, trouvée dans la rivière Wislinga, cercle de Jarensk.

Un morceau d'une substance osseuse de couleur brunâtre, trouvée au même endroit.

Un morceau de bois de Genévrier, taillé en parallélépipède d'une grandeur remarquable.

Envoyé par le Gouverneur militaire de St. Pétersbourg:

Un monstre humain de deux corps tenant l'un à l'autre par la region du bas ventre.

De la part de Mr. de *Waxell*:

Une très belle collection de 110 oiseaux de différentes espèces, rassemblés pendant son voyage en Tauride et de là à St. Pétersbourg.

De

De la part de Mr. le Baron de *Paykull*:

Vne collection de quadrupèdes, d'oiseaux, de coquilles et cent espèces d'Insectes de l'Afrique.

De la part de Mr. le Conseiller d'Etat *Razderischin*:

1) une tête de Bufle. 2) une tête de Rhinoceros. 3) un os d'Elephant. 4) une tête d'os femoris. 5) un bois d'Elan. 6) un bois de Cerf. 7) une tête de Cerf avec les deux bois. 7) une corne de renne, le tout trouvé en Sibérie.

De la part de Mr. de *Waxell*:

Un Musaraigne de Botany-Bay.

Un Loriot du Bengale.

Un Idole de bois des habitans de la nouvelle Zélande.

Un Kangourou (Didelphis gigantea).

De la part de Mr. le Baron de *Paykull*:

Encore 13 oiseaux empaillés et 11 pièces de Coquilles.

De la part de Mr. le Dr. *Langsdorff* à Lisbonne.

Une Collection de poissons et d'insectes.

III. Pour le Cabinet de Minéralogie.

De la part S. E. Mr. de *Nartoff*.

Un grouppe de Spath calcaire de la minière Klitschkinskoy de Nertschinsk.

De la part de Mr. l'Académicien *Hermann*:

Six groupes d'Améthyste et autres crystaux de Quartz, trouvées sur l'isle de Kisha située dans le Lac d'Onega.

Une

Une collection de minéraux remarquables des monts Altaïques.

Dixneuf pièces de Spath de plomb rouge de Sibérie.

Six pièces de Chromiate de fer.

IV. Pour le Jardin botanique.

De la part de Mr. le Baron Marchal de *Biberstein*:

Cent trente espèces de semences du Caucase.

De la part de Mr. *Schanguine* à Salairsk.

Un paquet de semences du Rhododendron Chrysanthum.

De la part de S. E. Mr. le Comte de *Moussin Pouchkin*:

Un arbuste de l'Azalea Pontica.

Un paquet de sémences cueillies au Caucase.

Une autre collection de semences cueillies au Caucase par l'Etudiant Adams.

Encore une collection de soixante huit espèces de semences du Caucase et de l'Ararat.

De la part de Mr. *Frazer*:

Quatre paquets de semences du Cotonnier de l'Amérique septentrionale.

De la part de Mr. *Rudolphi* à Greifswald:

Une grande quantité de semences fraiches, tirées des Jardins de Paris, Vienne etc.

De la part de Mr. le Cap. des Mines *Schanguine* à Barnaul:

Sept paquets de semences, savoir 1) Lonicera caerulea. 2) Lilium pomponicum. 3) Lilium bulbiferum. 4) Ribes procumbens. 5) Рвотное сѣмя. 6) Pirus baccata. 7) Paeonia albiflora.

V.

V. Pour le médailler.

De la part de S. E. Mr. le Comte de *Dietrichstein*:

Trois medailles, savoir l'une en or et les autres en argent, frappées l'an 1797 en mémoire de la sommation faite aux habitans de Vienne, pour repousser l'approche de l'armée françoise.

De la part de Mr. le Prince *A. A. Ouroussoff*:

Une medaille d'or des Tzars Ivan Alexeyevitsch et Pierre Alexeyevitsch.

Une medaille d'argent de Dmitri Samosvanetz.

Deux pièces de cuivre, l'une quarrée et l'autre ronde, qui servoient de quittance à ceux qui avoient payé l'impot sur les barbes.

Un demi-Rouble en argent, frappé sous le regne du Tzar Pierre Alexeyevitsch.

Deux copeks d'or des Tzars Ivan Alexeyevitsch et Vladislav Sigismundovitsch.

VI. Pour le Laboratoire chymique.

Six livres de Spath de plomb rouge.

Une pièce de Spath de plomb rouge de Sibérie, et trois livres de crystaux détachés de ce minérais.

Quarante cinq livres de Chromiate de fer.

Deux poudes de Chromiate de fer, exploités aux environs des minières de Poläkof.

IV.

Mémoires et autres Ouvrages manuscrits présentés à l'Académie.

1799.

Le 10. *Janvier.* Silicis Topazii Sibirici examen chemicum; *par Mr. l'Académicien Lovitz.*

Le 17. *Janvier.* Observations faites avec le Quart de cercle mural de l'Académie Impériale des Sciences, dans le courant de l'année 1798; *par Mr. l'Académicien Henry.*

2) Résultats de l'Observati n de la Lune au méridien et de l'occultation de φ du Sagittaire du 21 Octobre 1798; *par Mr. l'Académicien Henry.*

3) Sur l'occultation de ε des Gémaux du 8 Août 1798, observée à la tour astronomique de St. Pétersbourg; *par Mr. l'Académicien Henry*

Le 21. *Janvier.* Fumariae quatuor Species e regno Japanico descriptae et delineatae; *par Mr. Thunberg.*

Le 24. *Janvier.* Examen chymique des tablettes métalliques, qu'on emploie pour faire des fils d'argent; *par Mr. l'Académicien Zakharof*, (mémoire russe).

Le 31. *Janvier.* Дифференцїальное и интегральное исчисленїе, собранное на французскомъ языкѣ Гмъ Кузенемъ. и приумноженное при преложенїй на Россїйской языкъ; *par Mr. l'Académicien Gourief.*

Le 21. *Fevrier.* Extrait des Observations météorologiques faites à St. Petersbourg. Année 1798; *par Mr. J. A. Euler.*

— — — Figürliche Uebersicht der meteorologischen Beobachtungen und derselben Resultaten in der Gouvernements - Stadt Wologda, vom 1. Décembre 1798 bis zum 31 Januar 1799 alt. Stil.; *par Mr. le Conseiller de Cour Fries.*

Le

Le 11 *Mars.* Essay sur les équations. Premiere partie. Essai sur celles du 5me degré; *par Mr. le Comte de Tredern.*

— — — Meditatio de figura telluris exactius cognoscenda; *par Mr. l'Académicien Roumovsky.*

Le 21 *Mars* Darstellung einer Theorie der Electricität, welche auf Grundsätzen des neuen Systems der Chemie beruht; *par Mr. Schrader.*

Le 1 *Avril.* Stirpium quarundam Caucasi Rossici et planitierum finitimarum illustratio botanica; *par Mr. le Baron Marschal de Biberstein.*

Le 25 *Avril.* Mineralogische Reisen in Sibirien vom Jahr 1783 bis 1796. Fortsetzung des dritten Theils und der vierten Abtheilung; *par Mr. l'Académicien Hermann*

Le 2 *Mai.* Von den nächsten und entferntesten chemischen Bestandtheilen der Pflanzen und Pflanzen-Substanzen. 6te Abtheilung; *par Mr. l'Académicien Georgi.*

— — — Traité sur la manière de conserver les animaux empaillés; *par Mr. l'Abbé Manesse.*

Le 16 *Mai.* Пробирное искуство, или руководство къ химическому испытанїю металлическихъ рудъ; *par Mr. l'Académicien Severguine.*

Le 10 *Juin.* Sur la nature et la formation du basalte; *par le même.*

Le 13 *Juin.* Decas problematum geometricorum e methodo tangentium inversa, radium osculi spectantium; *par Mr. l'Académicien Fuſs.*

Le 17 *Juin.* Principe du Calcul différentiel et intégral de Mr. Bezout, traduit en russe; *par Mr. Wiscovatof.*

Le 1 *Juillet.* Abhandlung über die Bearbeitung Herschelscher Telescope und deren Vervollkommnung; *par Mr. Schrader.*

Le 4 *Juillet.* 1) Physisch-statistische Resultate aus den Consistorial Berichten und dem Tagebuche der medicinischen Polizei in Wologda, für die Jahre 1797 u. 1798; *par Mr. Fries.*

2) Das Merkwürdigste aus den physisch-medicinischen Factis im Gouvernement Wologda, vom 10 April 1798 bis den 10 April 1799; *par le même.*

Le 4 *Juillet.* 1) Observations météorologiques faites à Moscou et à St. Pétersbourg en Mai et Juin 1799; *par Mr. Euler.*

2) Extrait des Observations météorologiques, faites à Moscou et à St. Pétersbourg, pendant l'hyver de 1798 à 1799, ou depuis le 1 Novembre 1798 jusqu'au 1 Mai 1799; *par le même.*

— — — 1) De la division d'un Rhomboide en quatre parties égales, par deux lignes droites qui se coupent à angles droits; *par Mr. l'Académicien Fuſs.*

2) Demonstrations de quelques Théorèmes de Géométric; *par le même.*

Le 8 *Juillet.* Сочиненїя о Сибирскихъ рудникахъ и заводахъ: часть третїя; *par Mr. l'Académicien Hermann.*

Le 11 *Juillet.* Bemerkungen über die Scheidung des Zuckers aus einheimischen Naturproducten, *par Mr. l'Académicien Lowitz.*

Le 19 *Août.* Ad Geographiam practicam P. Ignatii Kautsch. Supplementum I. Eclipsium Solis et Lunae, ab anno 1800 usque ad annum 1825, cum typo ecliptico et tabulis projectionis geographicis, quibus regiones solares spectaturae perspicue exhibentur.

Supplementum secundum. Eclipsium Solis et Lunae, ab anno 1825 usque ad annum 1860, cum typo ecliptico et tabulis geographicis, quibus regiones eclipsis spectaturae exhibentur; *par le P. Kautsch.*

Le 26 *Août.* Recherches sur les équations aux différences partielles du premier degré à quatre et plusieurs variables; *par Mr. Trembley.*

Le 2 *Septembre.* Cours de Mathématiques par l'Abbé Bossut, traduit en langue russe; *par Mr Viscovatof.*

Le 9 *Septembre.* Sammlung historischer Nachrichten über die Mongolischen Völkerschaften. II. Th.; *par Mr. Pallas.*

Le 16 *Septembre.* Réflexions sur les bornes des deux regnes de la Nature, l'animal et le végétal, ou sur les vrais signes distinctifs des corps qui les composent; *par Mr. Sevastianof.*

— — — Опытъ ѳеорїи о сопротивленїи причиняемомъ дорогами всякаго рода четыреколеснымъ и двуколеснымъ повоскамъ, съ опредѣленїемъ обстоятельствъ, при которыхъ однѣ изъ сихъ повосокъ полезнѣе другихъ. Сочиненїе Г-на Академика Фуса; *traduction de Mr. Viscovatoff.*

Le

Le 3 *October.* Specimen novae parallelarum Theoriae, quod Imperiali Scientiarum quae Petropoli floret, Academiae, ad testificandum grati animi sensum, ob honorificentissimam receptionem in Membrorum correspondentium illius numerum, inque signum summae erga eam observantiae offert Joannes Christophorus Schwab.

Le 7 *Octobre.* Nova demonstratio Theorematis, nec summam nec differentiam duorum biquadratorum biquadratum esse posse; *par Mr. Kausler.*

Le 4 *November.* Сокращенная Оптика Гна Шмита, переводъ съ Аглинскаго представленный Академїи флота Капитаномъ Г. Гамалѣею; *par Mr. de Gamalea.*

Le 7 *Novembre.* Nova demonstratio theorematis, nec summam nec differentiam duorum cubo-cuborum cubo-cubum esse posse; *par Mr. Kausler.*

Le 2 *Décembre.* Mirabilium Jalaparum hybridarum spicilegium ultimum. Exp. XCV – CXXX. Additamenta ad descriptionem quarundam Jalaparum hybridarum naturam pluribus exemplis illustrandam maxime conducentia; *par Mr. Koelreuter.*

Le 5 *Décembre.* Proprietates linearum parallelarum novo modo enucleatae; *par Mr. Roumovsky.*

Le 16 *Décembre.* Figürliche Vorstelluug der atmosphärischen Veränderungen im Horizont der Stadt Wologda, zur Aufklärung des epidemischen Catharrs; *par Mr. Fries.*

Le 23 *Décembre.* Extrait parallèle des observations météorologiques faites à Moscou et à St. Pétersbourg pendant l'été de 1799, depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre; *par Mr. l'Académicien I. A. Euler.*

1800.

Le 9 *Janvier.* Formularum quarundam differentialium angularium integratio; *par Mr. l'Académicien Fuſs.*

Le 23 *Janvier.* Sommaire des extraits parallèles des observations météorologiques faites à Moscou et à St. Pétersbourg pendant toute l'année 1799; *par Mr. I. A. Euler.*

Le 2 *de Mars.* Solution de quelques problèmes remarquables de l'Analyse de Diophante; *par Mr. Kausler.*

Le

Le 16 *Avril.* Recherches sur la Sphère et le Cylindre percés cylindriquement, et sur une infinité de manieres de percer la Sphère de façon que le résidu de sa surface et de sa solidité soit géométriquement assignable; *par Mr. l'Académicien Fuſs.*

Le 30 *Avril.* Observations sur la génération des oiseaux et la formation des oeufs; *Mr. l'Abbé Manesse.*

— — — 1) Sur la vraie Théorie de l'aberration de la lumiere et

2) Sur une précaution qu'il est utile de prendre dans l'usage du Quart-de-cercle pour les observations astronomiques, *par Mr. Flaugergues.*

Le 11 *Mai.* Observations sur les Calmucques; *par Mr. Bergmann.*

Le 9 *Juillet.* Sur les passages de Mercure sur le Soleil, qui auront lieu dans le 19 Siécle, premiere partie, contenant les principes et les formules de calcul; *par. Mr. Schubert.*

— — — Tabelle über die Volksmenge des Wologdaischen Gouvernements, aus Kameral-Listen von 1 Januar 1800. und

Physisch-statistischer Zustand des Gouvernements, aus eigenen Beobachtungen vom Jahr 1799; *par Mr. l'Inspecteur Fries.*

Le 13 *Août.* Solution de quelques problèmes d'Analyse indéterminée. Continuation; *par Mr Kausler.*

Le 27 *Août.* Наставленїе о дѣланїи стали, съ Французскаго о семъ предметѣ сочиненїя кратко преложенное и примѣчанїями дополненное. Академикомъ В. Севергинымъ; *par Mr. l'Académicien Severguine.*

Le 26 *d'Octobre.* Всеобщая и частная естественная Исторїя Графа Бюффона. Часть VI. перевед. И. Лепехинымъ.

Le 5 *Novembre.* De numeris qui semel vel pluries in summam duorum quadratorum resolvi possunt; *par Mr. Kausler.*

Tabula numerorum pronicorum a 2 usque ad 1001000 eorumque semisses etc. *par le même.*

Le 10 *Décembre.* Von den nähern und entfernten chemischen Bestandtheilen der Pflanzen-Substanzen, der VI Abtheilung 2r Abschnitt, Alcalische feuerfeste Salze der Vegetabilien; *par Mr. Georgi.*

Le

Le 10 *Décembre.* Покушеніе разрѣшить задачу Географико-Магнитную славнѣйшею Императорскою Академіею на 1791 годъ предложенную. Traduction du mémoire de Mr. Kratzenstein; *par Mr. Ossipovski.*

1801.

Le 11 *Fevrier.* Умозрительной и опытной Гидродинамики Г. Боссю часть I. traduit *par Mr. Kotelnikoff.*

Le 18 *Fevrier.* Déscription d'une machine pour diviser les lignes circulaires et droites nouvellement inventée et exécutée; *par Mr. Schrader.*

Le 1 *Mars.* Extrait des observations météorologiques de l'année 1800; *par Mr. l'Académicien Inokhodzoff.*

Le 4 *Mars.* Наблюденіе надъ рожденіемъ птицъ и образованіемъ яицъ; *traduction du mémoire de Mr. l'Abbé Manesse.*

Le 11 *Mars.* De innumeris curvis circa punctum fixum describendis, a quibus quilibet angulus in illo puncto formatus aequales arcus abscindat; *par Mr. l'Académicien Fuſs.*

— — — Всеобщая и частная естественная исторія Графа Бюффона. Часть VII. съ французскаго языка на Россійской преложенная Академикомъ И. Лепехинымъ.

Le 12 *d'Avril.* 1) Генеральная Табель о числѣ народа въ городахъ и уѣздахъ Архангельской Губерніи; *par Mr. Fries.*

2) Physisch-statistische Tabelle über einige Gouvernements des Russischen Reichs, aus den allerneuesten Urkunden und Beobachtungen gezogen. 1801; *par le même.*

Le 19 *d'Avril.* 1) Resultate aus ehedem in Ustiug angestellten und 9 Jahre nach einander fortgesetzten meteorologischen Beobachtungen; *par le même.*

2) Resultate aus eben dergleichen 3 jährigen Beobachtungen in Wologda angestellt, seit Errichtung der medicinischen Polizey; *par le même.*

3) Diarium meteorologicum, in der Gouvernements-Stadt Wologda gehalten 1801 Januar, Februar, März; *par le même.*

4) Parallele der Tages-Temperaturen in Wologda und Ustsisolsk. December 1800. Jan. u. Febr. 1801; *par le même.*

Le

Le 22 *d'Avril.* Statistische und physische tabellarische Uebersicht des Gouvernements Wologda, gezogen und berechnet 1) aus den Archiven des Kameralhofes; 2) aus Consistorial-Berichten; 3) aus eigenen Beobachtungen 1801; *par le même.*

Le 29 *d'Avril.* Refutation de quelques erreurs singulieres de Mr. d'Alembert sur les principes du Calcul des probabilites; et solution d'un problème connu sous le nom de problème de Pétersbourg sur le jeu de croix et pile, que personne n'avoit résolu jusqu'à présent et que Mr. d'Alembert a jugé insoluble, *par un Anonyme de Bohème.*

Le 6 *de Mai.* Tables mortuaires complettes des années 1798, 1799 et 1800; *par Mr. l'Inspecteur Fries à Wologda.*

Le 17 *Juin.* О замерзаніи ртупи въ Сибирскомъ климатѣ; *par Mr. Kritschevski à Nertschinsk.*

— — — Remarques pour faciliter la recherche des diviseurs des nombres et des nombres premiers; *par Mr. Kausler.*

Le 21 *Juin.* Table comparative du nombre des morts de tous les âges depuis un an jusqu'à cent ans, dressée pour l'année 1800 et pour les deux Gouvernements de Jaroslav et de Wologda; *par l'Inspecteur Fries.*

Le 12 *d'Août.* Annonce de la découverte intéressante d'un secret de préserver les vieux livres, manuscrits, tableaux de bois etc. contre les vers de bois; *par Mr. le Baron de Hüpsch.*

— — Liste raisonnée manuscrite d'une collection nombreuse et précieuse de 109 anciennes éditions rares; *par Mr. le Baron de Hüpsch.*

Le 26 *d'Août.* Система природы Карла Линнея на Россïйской языкъ переведенная со многими примѣчанïями. А. Севастïяновымъ, часть 1ая.

Le 2 *Septembre.* Химическïя основанïя ремеслъ и заводовъ Іог: Фрид. Гмелина, съ Нѣмецкаго на Россïйской языкъ съ присовокупленïемъ нѣкоторыхъ примѣчанïй преложенныя. Часть I.; *par Mr. Severguine.*

— — — Novae disquisitiones super numeris formae $mx^2 + ny^2$; *par Mr. Kausler.*

Le 2 *Décembre.* Всеобщая и частная естественная исторïя Графа де Бюффона, часть IX. перев. И. Лепехинымъ.

Le 9 *Décembre.* De antherarum pulvere. Sectio I.; *par Mr. Koelreuter.*

Le

Le 16 *Décembre.* Разсужденіе о истинныхъ признакахъ отличающихъ тѣла царства животныхъ отъ тѣлъ царства растѣній; *par Mr. l'Adjoint Sevastianoff.*

— — Разсужденіе Г. Галлера о причинѣ движенія сердца; *par le même.*

1802.

Le 20 *Janvier.* Théorie de Mars; premiere partie, contenant les équations qui ne dépendent que de l'excentricité simple; *par Mr. l'Académicien Schubert.*

Le 10 *Fevrier* Observations météorologiques de l'année passée, avec des extraits de chaque mois; *par Mr. l'Académicien Inokbodzoff*

— — — Résumé des observations de toute l'année 1801; *par le même.*

— — — Comparaison de ces observations avec les observations faites à Wologda, Nicolaef, Riga et Neradowa; *par le même.*

Le 3 *Mars.* Всеобщая и частная Естественная Исторія Графа де Бюффона, часть X. Перев. И. Лепехинымъ.

Le 22 *d'Avril* Описаніе поѣздки въ Лапландію одного изъ учителей Морскаго Кадетскаго Корпуса, для опредѣленія достопримѣчательныхъ пунктовъ на западномъ берегу бѣлаго моря.

— — — Expressions analytiques, savoir les fonctious $(1+x)^n$, e^x et $l(1+x)$, exprimées en fractions décimales; *par Mr. Viscovatof.*

Le 2 *Mai.* Sur les perturbations de la nouvelle Planète par l'action de Jupiter; *par Mr. Schubert.*

Le 12 *Mai.* Novae plantarum species Imperii Rossici, iconibus atque descriptionibus illustratae; *par Mr. Fuchs.*

— — — Coup d'oeil sur les progrès de la botanique en Russie; *par le même.*

Le 16 *Juin.* Experimenta quaedam salis sedativi acidum spectantia, *par Mr. de Crell.*

Le 23 *Juin.* Abhandlung über die Eigenschaften und den wesentlichen Nuzzen der Agave Americana, der Kayserlichen Akademie der Wissenschaf-

schaften zu St. Petersburg ehrfurchtsvoll gewidmet; *par Mr. le Conſ. privé Baron de Vietinghoff.*

Le 18 *Août.* Descriptio et Analysis lapidis Marecani; *par Mr. Gmelin.*

Le 1 *Septembre.* Записки путешествїя по западнымъ провинцїямъ Россїйскаго Государства, или минералогическїя, хозяйственныя и другїя примѣчанїя, учиненныя во время проѣзда чрезъ оныя въ семъ 1802мъ году; *par Mr. Severguine.*

— — — Химическїя основанїя ремеслъ и заводовъ, предложенныя Іог. Фрид. Гмелинымъ. часть 2я, перевед. В. Севергинымъ; *par le même.*

— — — de Rhododendro chrysantho, arthritidis vero remedio; *par Mr. Strack.*

Le 19 *Semtembre.* Observatio eclipsis solis, anno 1802 die $\frac{16}{28}$ Augusti, habita in Observatorio Petropolitano; *par Mr. Roumovski.*

Le 3 *d'Octobre.* Additamentum ad dissertationem: Decas problematum geometricorum ex methodo tangentium inversa, radium osculi spectantium; *par Mr. l'Académicien Fuſs.*

Le 20 *Octobre.* Théorie de Mars; seconde partie, contenant les équations qui dépendent de la seconde dimension de l'excentricité, et les tables; *par Mr. Schubert.*

Le 3 *Novembre.* О Россїйской Лапландїи; *par Mr. Ozeretskovsky.*

— — — Expositio methodi series quascunque in fractiones decimales convertendi; *par Mr. Kausler.*

Le 28 *Novembre.* Supplément aux observations astronomiques de Mitau; *par Mr. Beitler.*

— — — Essai d'une synthèse des équations du 5me degré; *par le même.*

Le 5 *Décembre.* Essai d'une démonstration du principe des vitesses virtuelles; *par Mr. Viscovatoff.*

Le 8 *Décembre.* Continuatio dissertationis de pulvere antherarum. Sectio tertia. De colore antherarum pulveris; *par Mr. Koelreuter.*

De

De plus l'Académie a reçu, pendant la période dont nous rapportons les évènemens, les observations météorologiques faites :

à Riga par Mrs. Inokhodzoff et Sohn;

à Moscou par Mrs. Stritter et Bause;

à Cathrinenbourg par Mr. Hermann;

à Saratoff par Mr. Meyer;

à Kieff par Mr Bunge;

à Neradova, près de Kasan, par Mr. Lokhtin;

à Nertchinsk par Mrs. Tchernytzin et Kritchevski;

à Wologda par Mr. Fries;

à Nicolayeff à l'Ecole des pilotes de la mer noire;

s unes complettement et regulièrement tous les mois, les autres en extraits annuels.

V.

Mémoires lus dans les Séanccs académiques.

Lectures en 1799.

Le 10 *Janvier.* Mr. l'Académicien *Lowitz :*

Silicis Topazii Sibirici examen chemicum.

Le 17 *Janvier.* Mr. l'Académicien *Henry* :

Observations faites avec le Quart-de-Cercle mural de l'Académie Impériale des Sciences, dans le courant de l'année 1798.

Le 24 *Janvier.* Mr. l'Académicien *Zakharoff*:

Examen chymique des tablettes métalliques, qu'on emploie pour faire des fils d'argent.

Le 14 *Mars.* Mr l'Académicien *Roumovsky*:

Meditatio de figura telluris exactius cognoscenda.

Le 1 *Avril.* Mr. l'Académicien *Lepechin*:

Cheirantus Tauricus descriptus à I. Lepechin.

Le 4 *Avril.* Mr. l'Académicien *Krafft*:

Anzeige einiger Versuche über die Stärke rundgewebter Stricke, zum Gebrauch bey der Marine und bey Bergwerken.

Le 25 *Avril.* Mr. l'Académicien *Ozeretskovsky*:

De duobus foetibus humanis monstrosis.

Le 20 *de Mai.* Mr. l'Académicien *Fuſs*:

Solution d'un problème de Mécanique relatif au vol des oiseaux.

Le 23 *de Mai.* Mr. l'Académicien *Schubert*:

Supplementum ad Theoriam Lunae Eulerianam.

Le 30 *de Mai.* Mr. l'Académicien *Hermann*:

Mémoire sur la pierre de poix ou Pissite de Sibérie.

Le 13 *Juin.* Mr. l'Académicien *Severguine*:

Dissertation sur l'influence des terres et pierres dans la formation des métaux, considérée dans une collection de mines des environs de Toula.

Le 21 *Juin.* Mr. l'Académicien *Lowitz*:

Methodi novae, facillimae et simplicissimae acidum aceticum glaciale pa randi, expositio.

Le

Le 4 *Juillet.* Mr. l'Académicien *Henry*:

1) Occultation de ε des gémaux du 8 Août 1798, observée à Danzig par Mr. Koch.

2) Passage de Mercure sur le Soleil du 7 Mai 1799.

Le 22 *Août.* Mr. l'Académicien *Zakharoff*:

Sur la différente capacité des corps pour contenir le calorique, ou pour admettre le calorique entre leurs molécules.

Le 29 *Septembre.* Mr. l'Académicien *Gourieff*:

Observations sur le Théorème de Taylor, avec sa démonstration par la méthode des limites etc.

Le 10 *d'Octobre.* Mr. l'Adjoint *Busse*:

De reliquiis nationum Rossiae olim incolarum in sepulcris variorum locorum detectis. Disquisitio secunda.

Le 31 *Octobre.* Mr. de *Roumovsky*:

Observatio transitus Mercurii per discum Solis, habita in Observatorio Petropolitano Anno 1799 die $\frac{26\ \text{Aprilis}}{7\ \text{Maii}}$ temp. civil.

Le 14 *Novembre.* Mr. l'Académicien *Lepechin*:

Способы къ отвращенїю въ рогатомъ скотѣ падежа, и средства къ излѣченїю сея болѣзни служащїе.

Le 28 *Novembre.* Mr. l'Académicien *Krafft*:

Essai sur la méthode de trouver la latitude sur mer par les hauteurs simultanées de deux astres.

Le 5 *Décembre.* Mr. l'Académicien *Inokhodzoff*:

Summarium Observationum meteorologicarum in urbe Kamyschim ad Wolgam, sub latitudine 50°, 5′, 6″ et longitudine 63°, 4′, ab Octobri 1770 ad Augustum 1774 institutarum et cum respondentibus Petropolitanis collatarum.

Le

Le 19 *Décembre* Mr. l'Académicien *Ozeretskovsky*:

De ovis quae aliquando gallinacei parere reputantur.

Lectures en 1800.

Le 6 *Januar.* Mr. l'Académicien *Fuss*:

De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus hyperbolicos metiri licet.

Le 28 *Janvier.* Mr. l'Académicien *Hermann*:

Déscription d'une nouvelle mine de cuivre nommée Aschirite.

Le 30 *Janvier.* Mr. l'Académicien *Schubert*:

Supplementi ad Theoriam Lunae Eulerianam continuatio.

Le 13 *Février.* Mr. l'Académicien *Lowitz*:

Meditationes experimentis superstructae, de vero agendi modo pulveris carbonum, dum vim suam depuratricem exserit.

Le 27 *Février.* Mr. l'Académicien *Henry*:

1) Résultats de l'observation de la Lune au meridien, et de l'occultation de φ du sagittaire, du 21 Octobre 1798.

2) Sur l'occultation de ε des gémaux du 8 Août 1798, observée à la tour astronomique de St. Pétersbourg.

Le 12 *Mars* Mr. l'Académicien *Gourieff*:

Сферическая Тригонометрïя.

Le 26 *Mars.* Mr. l'Adjoint *Sevastianoff*:

Déscription du Harfang, ou de la Chouette blanche (Strix nyctea).

Le 16 *Avril.* S. E. Mr de *Roumovsky*:

Proprietates linearum parallelarum novo modo enucleatae.

Le

Le 23 *d'Avril.* Mr. l'Académicien *I. A. Euler*:

Extrait des observations météorologiques, faites à St. Pétersbourg en 1799 n. st.

Le 7 *de Mai.* Mr. l'Académicien *Lepechin*:

О раздѣленїи народовъ Мунгальскаго поколѣнїя.

Le 11 *de Mai.* Mr. l'Académicien *Krafft*:

Supplément au mémoire sur la réduction des distances lunaires.

Le 4 *Juin.* Mr. l'Académicien *Inokhodzoff*:

De relativa nonnullorum locorum elevatione, in quibus observationes barometricae ac thermometricae sunt institutae.

Le 11 *Juin.* Mr. l'Académicien *Ozeretskovsky*:

De speciebus systematicum genus Trichechi constituentibus.

Le 2 *Juillet.* Mr. l'Académicien *Fuss*:

Formularum quarundam differentialium angularium integratio.

Le 13 *Août.* Mr. l'Académicien *Schubert*:

Sur les passages de Mercure sur le Soleil, qui auront lieu dans le dix-neuvieme siècle.

Le 20 *Août.* Mr. l'Académicien *Hermann*:

Notice sur les roches des monts Altaï en Sibérie, Section premiere.

Le 10 *Septembre.* Mr. l'Académicien *Zakharoff*:

О произхожденїи свѣта отъ тренїя различныхъ тѣлъ.

Le 28 *Septembre.* Mr. l'Académicien *Gourieff*:

Общее правило равновѣсїя, доказанное наипростѣйшимъ образомъ какъ прямо, такъ и обратно, съ приложенїемъ его къ махинамъ.

Le

Le 8 *d'Octobre.* Mr l'Adjoint *Sevastianoff*:

Description d'une nouvelle espèce de canard et d'une variété de l'huitrier.

Le 19 *Novembre.* Mr. l'Académicien *Krafft*:

Remarques analytiques sur la construction des Microscopes à réflexion.

Lectures en 1801.

Le 14 *Janvier.* Mr. l'Académicien *Fuss*:

Recherches sur la sphère et le cylindre percés cylindriquement etc.

Le 21 *Janvier.* Mr l'Académicien *Schubert*:

Sur les passages de Mercure sur le Soleil, qui auront lieu dans le 19me siècle. Partie II. Contenant les résultats de calcul.

Le 15 *Février.* Mr. l'Académicien *Hermann*:

Remarques sur les différentes méthodes de rendre le fer malléable.

Le 18 *Février.* Mr. l'Académicien *Severguine*:

Exposition de quelques expériences docimastiques faites sur les mines de cuivre.

Le 25 *Février.* Mr l'Académicien *Lowitz*:

Anzeige einer neuen Gattung eines Sibirischen Chromium - Ertzes, nebst einigen Bemerkungen über die sicherste Art mineralogische Körper auf Chromiumgehalt zu untersuchen.

Le 15 *Mars.* Mr. l'Académicien *Zakharoff*:

Описанїе Газомѣтра Лавоазьеромъ изобрѣтеннаго и во многихъ частяхъ мною исправленнаго.

Le 1 *Avril.* Mr. l'Académicien *Fuss*:

Histoire de l'Académie pour les Années 1795 et 1796.

Le 8 *d'Avril* Mr. l'Adjoint *Sevastianoff.*

Déscription de *l'Acarauna latirostris.*

Le 29 *Avril.* Mr. l'Académicien *Krafft*:

Serierum principalium, quae sinus angulorum multiplorum exprimunt, demonstratio elementaris.

Le 6 *May.* Mr. l'Académicien *Inokhodzoff*:

Extrait parallèle des observations météorologiques, faites à St. Pétersbourg et à Moscou, en 1800 d'aprés le nouveau Style.

Le 20 *May.* Mr. l'Académicien *Ozeretskovsky*:

De ossibus ligno inclusis.

Le 7 *Juin.* Mr. l'Académicien *Fuss*:

De polygonis symmetrice irregularibus circulo simul inscriptis et circumscriptis.

Le 10 *Juin.* Mr. l'Académicien *Schubert*:

Remarques sur un mémoire intitulé: Refutation de quelques erreurs de Mr d'Alembert, et Solution du problème de Pétersbourg.

Le 17 *Juin.* Mr. l'Académicien *Hermann*:

Notice sur une grouppe remarquable de Spath de plomb de la Sibirie.

Le 1 *Juillet.* Mr. l'Académicien *Severguine*:

Distribution méthodique des pierres de roche aggrégées

Notice I. Sur une nouvelle variété de Spath de plomb.

Notice II. Sur l'oxide de fer en forme d'aiguilles, qui se trouve sur les Améthystes de l'Ile de Kija du Lac Onega.

Le 16 *Septembre.* Mr. l'Académicien *Krafft*:

Zusammenstellung einiger die Galvanische Säule betreffender Beobachtungen.

Le 7 *Octobre* Mr. l'Académicien *Ozeretskovsky*:

De Myrmecophaga et Mane:

Le 28 *Octobre.* Mr. l'Académicien *Fuss:*

Supplément au mémoire. Solution d'un probléme de Mécanique relatif au vol des oiseaux.

Le 4 *Novembre.* Mr. l'Académicien *Schubert*:

Supplément au mémoire sur les passages de Mercure sur le Soleil dans le 19me siècle.

Le 11 *Novembre.* Mr. l'Académicien *Hermann*:

Supplément au mémoire sur l'exploitation des mines de l'Empire de Russie, inséré au Tome XI. des nouveaux Actes.

Lectures en 1802.

Le 20 *Janvier.* Mr. l'Académicien *Lepechin*:

Symphiti asperi nova species descripta.

Le 27 *Janvier.* Mr l'Académicien *Krafft*:

Bericht über meine bisherigen Versuche mit der Galvanischen Säule.

Le 17 *Février.* Mr. l'Académicien *Ozeretskovsky*:

De analogia aves inter et mammalia.

Le 10 *Mars.* Mr. l'Académicien *Fuss*:

Demonstrations de quelques thèorèmes de Géométrie.

Le 31 *Mars.* Mr. l'Académicien *Schubert*:

Théorie de Mars.

Le

Le 28 *Avril.* Mr. l'Académicien *Lowitz*:

Anzeige eines sehr einfachen Mittels die Pottasche von allen in ihr befindlichen fremdartigén Substánzen zu befreyen.

Le 12 *Mai.* Mr. l'Académicien *Gourieff*:

La continuation de son mémoire: Приложенїа общаго правила равновѣсїя къ Махинамъ.

Le 9 *Juin.* Mr. l'Académicien *Krafft*:

Serierum principalium, quae sinus angulorum multiplorum exprimunt, demonstratio elementaris. Continuatio.

Le 16 *Juin.* Mr. l'Académicien *Inokhodzoff*:

О метеорологическихъ наблюденїяхъ, или погодословїи вообще, и о правдоподобномъ восвышенїй нѣкоторыхъ мѣстъ въ разсужденїи Петербурга.

Le 2 *Juln.* Mr. l'Académicien *Ozeretskovsky*

О добыванїи сала изъ неупотребительныхъ животныхъ.

Le 7 *Juillet.* Mr. l'Académicien *Fuss*:

Observationes circa ellipsin quandam prorsus singularem.

Le 1 *Septembre.* Mr. l'Académicien *Lowitz*:

Observationes nonnullae circa commune cupri et stanni cum acido muriatoso connubium.

Le 29 *Septembre.* Mr. l'Académicien *Zakharoff*:

О тепломѣрѣ.

Le 6 *Octobre.* Mr. l'Académicien *Gourieff*:

О нѣкоторыхъ достопримѣчательныхъ Өеоремахъ до тристоронней пирамиды относящихся.

Le 13 *Octobre.* Mr. l'Adjoint *Sevastianoff*:

Общїя замѣчанїя о пресмыкающихся земноводныхъ или змѣяхъ.

Le 3 *Novembre.* Mr. l'Académicien *Krafft*:

Annotationes ad acus magneticae inclinatoriae usum pertinentes.

Le 7 *Novembre.* Mr. l'Adjoint *Smelovsky*:

De plantis tetradynamis vulgo cruciformibus.

Le 10 *Novembre.* Mr. l'Académicien *Inokhodzoff*:

О бывшемъ явленїй Меркурїя на солнцѣ 28го Октября 1802 года.

Le 1 *Décembre.* Mr. l'Académicien *Fuſs*:

Decas problematum geometricorum, ex methodo tangentium inversa, radium osculi spectantium.

Le 8 *Décembre.* Mr. l'Académicien *Schubert*:

Théorie de Mars, seconde partie.

Le 22 *Décembre.* Mr. l'Académicien *Lowitz*:

Methodi novae kali Borussicum, barytae ope, ab adhaerente eidem acido sulphurico depurandi, expositio.

VI.

Observations, expériences, et notices intéressantes, faites et communiquées à l'Académie.

I. Essai pour tirer du sucre de la *bète-rave*.

Le 7 Mars 1799 Monsieur le Conseiller de Cour de Zimmermann à Brunsvik donna à l'Académie une notice des essais qu'on a faits depuis peu en Allemagne, pour tirer du sucre de

de la bète-rave (Runkelrübe). Il mande qu'on en a déja obtenu à Brunsvik, par le seul pressoir et la cuite du jus qui en decoule, un syrop d'un très bon goût et même du candis. Mr. l'Académicien Lowitz rapporta à cette occasion d'avoir reçu une lettre de S. E. Mgr. le Procureur-Général, Prince de Lapoukhin, qui l'encourage à faire des recherches à ce sujet; mais que comme cette bète-rave ne se trouve pas actuellement à St. Pétersbourg, et qu'il est essentiel d'en avoir de la même espèce, il a proposé à Son Excellence d'en faire venir des semences de Brunsvik, afin de pouvoir en sémer tout de suite et en moissonner l'été prochain une quantité suffisante pour des essais decisifs. En attendant Mr. Lowitz exposa et fit voir du syrop qu'il avoit tiré, il y a longtems, des carottes, mais qu'il n'a jamais pu transformer en une substance crystallisée semblable au sucre, aussi peu que le miel, qui ne lui a donné qu'une espèce de pâte dure sans aucune crystallisation.

II. Observation d'un grand froid en Sibérie.

Le 11 Mars 1799 Monsieur le Conseiller de Cour Hermann communiqua à l'Académie les observations d'un froid excessif qu'il a fait à Barnaoul en Sibérie le 19 Décembre 1798, où le Thermomètre à Mercure étoit descendu jusqu'au 41me degré de Réaumur. Ce même jour un quart de livre de Mercure, exposé dans une tasse au plein air, y géla d'une telle force, qu'on put le reduire, par des coups de marteau, en feuilles assez minces. Le 15 Mars S. E. Monsieur le Conseiller privé de Nartoff envoia les observations météorologiques originales que Mr. le Colonnel de Tchernitzin avoit faites pendant le mois de Décembre dernier à Nertschinsk, d'après lesquelles le 23, 24, 29 et 30, pendant un temps

temps entièrement serein, le Thermomètre est descendu jusqu'à 55 degrés de Réaumur: ensorte que le mercure, gelé et descendu jusques dans la boule, ne reprit son état de liquidité qu'après 2, 3 et 6 heures de temps, et qu'en ayant mis séparément dans une tasse de fayence, le mercure s'y congela ces mêmes jours avec une telle force, que sa solidité le rendit malléable, et qu'il demeura dans cet état pendant 8 heures de temps. Le froid a surpassé 30 degrés pendant 9 jours consécutifs, c'est-à-dire dépuis le 22 jusqu'au 30 Décembre.

III. Nouvelle méthode de dissoudre les fossiles.

Le 4 Avril 1799 Mr. l'Académicien Lowitz communiqua à l'Academie une découverte qu'il vient de faire d'une nouvelle méthode de disposer les fossiles les plus opiniâtres à être dissous dans les acides, par la seule voye humide, en employant un petit fourneau chymique de fer de son invention, qu'on peut mettre dans la poche et qui se chauffe par une lampe à esprit de vin, en mettant le fossile à dissoudre dans un creuset d'argent placé au dessus du fourneau. L'opération est très simple et ne demande que peu de temps. Mr. Lowitz fit voir ce fourneau et exposa aussi le fluide qu'il a obtenu d'une terre silicieuse par cette nouvelle méthode.

IV. Crystaux de sucre de la bète-rave.

Le 13 de Mai 1799 Mr. l'Académicien Lowitz fit voir deux crystaux de sucre qu'il a obtenus de la bète-rave, poussés, par le moyen de l'esprit de vin, à un point plus haut de perfection, étant très-distincts et très-transparens.

V.

V. Crystaux de Chrome et de Platine.

Le 1 Juillet 1799 Mr. l'Académicien Lowitz communiqua à l'Academie une lettre de S. E. Mr. le Chambellan actuel Comte de Moussin-Pouchkin, datée de Moscou le 2 Juin, contenant la notice de quelques expériences sur l'action de l'acide nitrique pour la décomposition de la mine de plomb rouge, et les résultats de quelques autres expériences chymiques que Mr. le Comte a faites tout récemment sur le chrome et la platine, dont il envoye des crystaux, que Mr. Lowitz exposa et fit voir par le microscope.

VI. Tremblement de terre ressenti sur la mer d'Azoff.

Le 11 Novembre 1799 S. E. Mr. l'Amiral van Dessen, Commandant en Chef des Ports de la mer noire, communiqua un rapport du Pilote Poukhof qui, étant occupé à décrire les ports aux frontières du Kuban, a entendu le 6 Septembre, à 8 heure du mâtin, à Yekaterinodar, un tremblement de terre bien fort, accompagné d'un bruit souterrain. Sur la mer d'Azoff, à 60 versres environ du Fort Fanagorsk', on ressentit trois fortes secousses qui durèrent près de deux heures, et à 150 toises on vit sortir de l'eau une fumée épaisse suivie d'une éruption de Lave noire. Les pierres et le sable, jettés dehors, formèrent à cet endroit une petite isle longue de 72, large de 48 sagènes et élevée de 7 pieds au dessus du niveau de la mer. La Conférence ayant trouvé ce récit fort intéressant, résolut de s'adresser au Collège Impérial de l'Amirauté, pour le prier de vouloir bien charger quelque Officier habile de ces environs, de faire une déscription plus circonstanciée de ce phénomène, et d'envoyer à l'Académie quelques echantillons des pierres et ter-

terres dont cette île a été formée (On a sû depuis que cette île a bientôt disparüe, sans qu'il en fut resté de vestige au dessus de la surface de l'eau).

VII. Analyse de l'Aschirite.

Le 9 Décembre 1799 Mr. l'Académicien Lowitz lut un rapport, contenant les résultats des expériences, qu'il avoit été chargé de faire sur l' *Aschirite*, fossile remarquable, présenté pour cet effet à l'Académie par Mr. l'Académicien Hermann. D'après ces expériences la pesanteur spécifique de l' Aschirite est = 3, 361, et il contient sur 100 parties 55 parties d'Oxide de cuivre, 33 de terre silicieuse et 12 d'eau. Comme jusqu'ici l'on ne connoît aucune liaison semblable du cuivre avec la terre silicieuse, Mr. Lowitz croit que ce fossile, dont Mr. Severguine a deja fait mention dans sa traduction de la Minéralogie de Kirvan et dans sa propre Minéralogie, mérite d'être cité comme une espèce particulière de mine de cuivre.

VIII. Nitre dans le syrop de la bète-rave.

Le 9 Janvier 1800 Mr. l'Académicien Lowitz rapporta à la Conférence d'avoir découvert, par ses nombreuses experiences, faites sur la bète-rave, pour en tirer du sucre, que le syrop de ces raves, comme de celles des autres espèces, contient, outre un sel ammoniacal, qu'il y avoit déja trouvé l'hyver passé, encore une quantité très considérable de nitre, qui s'y manifeste par des crystaux en aiguilles très distinctement exprimés, lorsqu' on expose le syrop à un froid de 10 à 12 degrés de Reaumur. Il en présenta divers échantillons au poids d' $1\frac{1}{2}$ onces obtenus de 2 livres de syrop, que lui avoient donnés 20 à 25 livres

livres de Bête-raves. Les crystaux en étoient très purs et très bien formés.

IX. Usage du charbon dans la culture des fleurs.

Le 23 Mars 1800 Mr. l'Académicien Lowitz communiqua une lettre de Mr. l'Apothicaire Meyer à Vitepsk, datée du 23 Fevrier. Il mande que depuis 2 ans il se sert avec le meilleur succès des charbons, pour garantir contre la pourriture les bulbes des Hyacinthes qu'on fait fleurir à l'eau. Il verse dans le vase rempli d'eau, sur lequel on met le bulbe, une demi once de poudre de charbon, en secouant bien le mélange, moyennant quoi on peut laisser écouler plus de 2 semaines sans changer l'eau, laquelle ne manifeste, pendant tout ce tems, aucun indice de putréfaction. Mais il faut se garder d'y mettre plus que la quantité indiquée, parceque la fleur est sujette à perdre de son odeur, si l'on augmente la dose. Mr. Meyer ajoute d'être de l'avis de Mr. Lowitz, qui soutient que le charbon est un agent chymique plutôt que mécanique, sentiment qui a été combattu par plusieurs Chymistes.

X. Ecroulement de terre.

Le 17 Août 1800 la Régence du Gouvernement de Vladimir communiqua la relation d'un écroulement de terre arrivé le 30 Juin passé, près du Village Koromyslowo. La circonférence de la brèche faite par cet écroulement dans une plaine, a été trouvée de 77 Sagènes et la profondeur de $13\frac{1}{2}$ Archines et remplie d'eau à la hauteur de $6\frac{1}{2}$ Archines. Les parois de l'ouverture au dessus de l'eau montroient des couches de

de sable. Outre l'espace de terrain, ensemencé de seigle, que la brèche a englouti, il n'en est resulté aucun autre dommage.

XI. Préparations remarquables de Sels.

Le 20 Août 1800 Mr. l'Académicien Lowitz fit voir à la Conférence deux préparations de sels qu'il a faites, savoir: 1) du chromiate de potasse en crystaux prismatiques de couleur de vermillon, 2) du prussiate de potasse en crystaux remarquables par leur beauté et pureté. L'une et l'autre préparation a été obtenue au moyen d'une méthode nouvelle, imaginée par Mr. Lowitz.

XII. Stalactite de Sel.

Le 12 Novembre 1800 Mr. l'Académicien Lowitz fit voir un Stalactite de sel, produit accidentellement au moyen de la sulfate de potasse acidule sursaturée avec de l'acide sulphurique. Mr. Lowitz avoit gardé dans un coin de son logis, depuis plus d'un an, tous les résidus de la distillation de l'acide acetique glacial. Le 11 Nov. il trouva de très beaux crystaux qui s'étoient formés dans cette solution; mais il trouva aussi qu'une partie considérable de cette même solution avoit coulé, ou suinté, petit-à-petit, à travers la fente du vase de verre crevé, et qu'elle avoit formé au dessous du répositoire, où le vase avoit été placé, un rameau de sel de 9 pouces de longueur, entouré d'une espèce de végétation du même sel de la plus grande finesse et blancheur.

XIII.

XIII. Refoulement des eaux de la Soukhona et de la Wologda.

Le 27 de Mai Mr. l'Inspecteur et Correspondant de l'Académie Fries à Wologda donna une notice relative à un phénomène singulier, savoir le refoulement des eaux de la Soukhona et de la Wologda, occasionné, à la vérité, régulierement chaque année, pendant 10 à 13 jours, par la crue des eaux du lac Kubina, mais qui cette année a duré 29 jours de suite dans les deux rivieres, au point d'interrompre la navigation et le passage des barques vers la Dwina.

XIV. Expériences galvaniques.

Le 16 Septembre 1801 S. E. Mr. le Conseiller privé Comte de Moussin-Pouschkin, fit voir, par quelques expériences, les principaux phénomènes du Galvanisme, moyennant une colonne composée de 150 plaques d'argent, autant de plaques de Zinc et un égal nombre de morceaux de laine trempés dans une solution de sel commun. Après les expériences, qui réussirent parfaitement bien, Mr le Comte fit présent à l'Académie de tout cet appareil électrique, se reservant seulement les plaques d'argent, qu'il permit cependant dans la suite à Mr. l'Académicien Lowitz de garder pour la répétition de ces expériences.

XV. Oxide de platine.

Le 30 Septembre 1801 S. E Mr. le Comte de Moussin-Pouschkin communiqua à la Conférence la notice suivante, concernant quelques nouvelles recherches relatives au platine:

Fourcroy, dans son Système général des connoissances chymiques, rappelle, en parlant du platine, une experience de Margraf, par laquelle ce savant Chymiste, en traitant ce métal avec le nitre en fusion, étoit parvenu à le convertir en partie en poudre noire; c'est-à-dire, que la plus grande portion du platine n'avoit pas changé de nature, mais que la surface s'étoit recouverte de la dite poudre qui avoit été enlevée par les lavages. Fourcroy dit à cette occasion: qu'il seroit important de pousser plus loin cette expérience, et de voir si toute une portion de platine pourroit être ainsi convertie en poudre noire, qu'il appelle *Oxide de Platine.*

Un travail que j'ai fait en dernier lieu sur quelques onces de ce métal, m'a fourni l'occasion de remplir ce voeu du célèbre Chymiste François, sous des circonstances à la vérité différentes, mais dont le produit paroît être le même. Desirant de constater ma découverte, je vous prie de mettre sous les yeux de l'Académie l'échantillon ci-joint de platine en forme d'une poudre noire que j'ai obtenue de la maniere suivante:

J'avois trouvé qu'une solution de platine, où le muriate de soude avoit été employé au lieu de l'acide muriatique, déposoit, par l'addition d'une portion surabondante de soude en crystaux, un précipité très-abondant, floconnant, brun, et qui n'étoit pas du platine, mais du fer uni à une substance blanche, soluble dans tous les acides, et que je n'ai pas encore analysée. La solution de platine, après avoir laissé déposer ce précipité, n'avoit plus la couleur rouge-brune des dissolutions de ce métal, mais une belle couleur jaune un peu plus foncée que celle

celle des dissolutions d'or. Evaporée à siccité et rougie dans un creuset, elle m'a fourni, par la lessive du contenu de creuset, le platine en forme de poudre noire que je Vous envoye. Elle a pris un caractère d'insolubilité dans l'Acide nitro-muriatique, qui la distingue infiniment du platine ordinaire, plusieurs onces d'acide ayant à peine dissous 4 à 5 grains de cette poudre. Sa ténuité est si extrème qu'avant d'etre sèchee elle a passé, à plusieurs reprises, par le filtre. Sa pésanteur specifique annonce le platine dans son état metallique. Par la voye humide elle ne change en rien les proprietés de l'Alcali caustique ou pur. L'Acide muriatique lui enlève un peu de fer et une très petite portion de platine, probablement par l'action de l'acide sur l'oxyde de fer qui le fait passer à l'etat d'Acide muriatique suroxygéné. Poussee au feu blanc elle reprend l'éclat metallique, mais paroît être moins malléable que le platine pur. Fortement comprimée la poudre noire ne présente point le brillant métallique. Son extrème pésanteur me fait croire, cela non-obstant, que ce n'est que sa grande ténuité et la division des particules du métal, qui lui donne sa couleur, et non son oxydation. Sa grande indissolubilité, au contraire, semble prouver, malgré l'opinion de *Proust*, un degré considérable de pureté, puisque j'ai remarqué, en général, que plus le métal étoit pur, plus il faloit d'Acide pour opérer la dissolution; tandisque *Proust* s'imagine, au contraire, que c'est à l'hétérogénéité des corps combustibles qui composent le platine, qu'il faut attribuer son indissolubilité.

Le Kali décompose, par la voye humide, le muriate de soude de platine, et le muriate de Kali de platine se précipite sous la forme de très petits crystaux d'un magnifique jaune de ci-

citron J'ai travaillé deux portions de ce précipité par le nitre; l'une jusqu'à decomposition parfaite du nitre; d'où j'ai retiré le platine, par le lavage, dans l'etat métallique; l'autre, en faisant uniquement fondre le nitre dans son eau de crystallisation, sans faire rougir le creuset de platine, lessivé, avoit une couleur de brun-roux sale et terne. Il se peut qu'entre ces deux degrés de chaleur il en existe un, où le platine passe à l'état de poudre noire; mais je n'ai pu m'en assûrer par cette manière d'opérer. Mon travail m'a offert, outre ceux dont je Vous parle, plusieurs phénomènes nouveaux et intéressans, dont je me reserve à Vous parler, aussitôt que je les aurai approfondi d'avantage.

XVI. Charbon brun et ambre jaune trouvés sur les bords de l'Iset.

Le 22 Août 1802 Mr. le Capitaine en Chef des mines Hermann à Cathérinenbourg envoya quelques échantillons d'un bois transformé en charbon brun, trouvé en couches sur les bords de l'Iset, près de Kaltschedanskoy-Ostrog, à 18 verstes de la fonderie de Canons établie à Kamensk. Ce charbon contient des morceaux detachés d'une résine, qui ressemble à l'ambre jaune, et qui mériteroit d'être examinée chymiquement, lors même que ce ne seroit que de la résine ordinaire, parcequ'il seroit intéressant de voir quels changemens elle a subi dans ces couches souterraines. Les échantillons de cette résine, de même que du charbon, furent remis à Mr. l'Académicien Lowitz, qui se chargea de les examiner. (Son rapport se trouve ci-après).

XVII. Tremblement de terre ressenti à Kief et ailleurs.

Le 3 Novembre 1802 Mr. le Correspondant Bunge à Kief, mande dans une lettre à l'Académie: que le 14 Octobre passé, à 1^h, 30 min. après midi, par un ciel parfaitement serein et un tems calme, on a ressenti à Kief un tremblement de terre venant du Sud-Ouest. Les secousses, au nombre de six, duroient trois minutes en tout, et étoient si fortes que non seulement la maison de Mr. Bunge, reposant sur des fondemens de pierre, et son Apothicairie, toute construite en maçonnerie, en furent fortement ébranlées, mais que le clocher très élevé, qui est seulement à quelques toises de sa maison, en reçut des oscillations. Sa pendule s'arrêta, et les cloches de la maison de ville sonnèrent d'elles-mêmes. Le thermomètre de Réaumur étoit à 16 degrés au dessus de 0; et le Baromètre, qui n'en avoit point été affecté, étoit à la hauteur de 30, 5 pouces de Londres. Mr. Bunge observe encore que c'est le troisième tremblement de terre qu'il a eu l'occasion de ressentir à Kief; les deux autres ayant eu lieu le 26 Mars 1790 à $9^h, 40'$ après midi et le 27 Novembre 1793 à $8^h, 10'$ après midi. Il ajoute d'avoir trouvé dans les papiers de son grand père qu'en 1730 un tremblement de terre a endommagé beaucoup d'églises et maisons à Kief, et fait écrouler la voûte de son Apothicairie. Depuis cette année jusqu'en 1790 il n'y a pas eu d'exemple de ce phénomène à Kief.

Le 10 Novembre 1802 Mr. l'Académicien Severguine communiqua à la Conférence une lettre de Mr. le Conseiller de Cour Lewschin à Belef, contenant quelques notices sur le même tremble-

blement de terre qui, le 14 Octobre passé, à 2 heures après midi, a eté ressenti aussi à Kalouga, à Lichwin, Kozelsk, Peremyschl, Toula et Belef. Ce phenomène y a eu lieu, comme à Kief, par un tems parfaitement serein et calme. Sa direction étoit du Nord au Sud, le long du bord gauche de l'Oka, sans se faire sentir à la droite de cette riviere. Sa durée a été de 5 minutes, sans secousses, et il n'a point causé de dommages. A Kalouga et à Kozelsk les cloches ont sonné d'elles-mêmes. Ce tremblement de terre a été suivi de brouillards, et ensuite de fortes gelees et de neige, au point que le 23 Octobre les rivieres se sont couvertes de glaces.

VII.

Rapports présentés à l'Académie par des Académiciens chargés de commissions particulières.

I. Observations astronomiques à faire sur les côtes de la mer blanche.

Le Collège Impérial de l'Amirauté ayant reçu l'ordre Suprème de faire dresser une nouvelle carte de la mer blanche, il s'addressa à l'Académie pour le choix des endroits où il conviendroit de faire des observations astronomiques. Mr. l'Academicien Schubert, chargé de conferer sur ce sujet avec S E. Mr. le Géneral-Major de Koutouzoff, à qui le dit Collège avoit remis le soin de cette nouvelle carte, rapporta le 21 Janvier 1799, d'avoir été chez Mr. le Général de Koutouzoff, et d'être convenu avec lui des endroits dont il seroit convenable de determiner la position géographique par des observations.

II.

II. Modèle d'un vaisseau dans lequel on puisse naviguer sous l'eau.

Le 7. Mars 1799 S. E. Mr. le Comte de Koucheleff, Amiral et Vice-President du Collège Impérial de l'Amirauté, envoya à l'Académie le modèle d'un vaisseau inventé et présenté à Sa Majesté l'Empereur par le Sieur Ravodanovski, habitant de la ville de Krementchouk. Selon les idées de l'inventeur on devoit être en état de se submerger dans ce vaisseau au fond de la mer, naviguer entre deux eaux et s'élever à la surface à volonté et sans le moindre risque. La volonté de Sa Majesté étant que l'Académie examinât ce modèle, afin de voir si un vaisseau construit ainsi puisse produire l'effet que l'inventeur en promet: Mr. le Président nomma un Comité composé de Mrs. les Académiciens *Euler*, *Roumovski*, *Krafft*, *Fuss* et *Gourieff*, qui rapportèrent à la Conférence le 11 Mars: que l'invention du Sieur Ravodanovski ne pouvoit nullement répondre à l'effet qu'il en promet, et qu'elle ne mérite point l'approbation de l'Académie.

III. Méthode générale de résoudre les équations algébriques.

Mr. l'Académicien *Fuss*, chargé d'examiner le quatrième mémoire sur les équations, et nommément sur celles du 5me degré, présenté à l'Académie par Mr. le Comte de Trédern, il en fit son rapport le 18 Mars 1799, accompagné d'un apperçu général sur la suite entière des mémoires de cet auteur, dont il résulte: que l'Analyse n'a point été avancée par les recherches pénibles, mais peu fructueuses, de Mr. le Comte de Trédern.

IV.

IV. Théorie de l'électricité, fondée sur les principes de la nouvelle Chymie.

Le 28 Mars 1799 Mrs. les Académiciens *Krafft* et *Lowitz* présentèrent leur rapport sur un mémoire présenté à l'Académie par Mr. Schrader, sous le titre: *Darſtellung einer Théorie der Electricität, welche auf Grundsätzen des neuen Systems der Chemie beruht.* Dans ce rapport ils rendent un témoignage favorable à l'explication des effets chymiques de l'électricité, donnée par l'auteur conformément aux principes de la Chymie antiphlogistique, en désirant cependant qu'il y eut donné aussi l'explication des autres phénomènes de l'électricité, qui se manifestent dans les attractions et repulsions électriques, dans la bouteille de Leyde, dans l'électrophore, dans le condensateur etc. phénomènes qui s'expliquent si bien par la théorie de Franklin.

V. Ouvrage sur les eclipses.

Mr. l'Académicien *Roumovski* ayant été chargé d'examiner un ouvrage du père Kautsch, contenant les calculs et les projections de toutes les eclipses depuis l'an 1800 jusqu'en 1860, il en fit son rapport le 2 May 1799, à la suite duquel l'Académie accepta l'offre du père Kautch, de faire imprimer cet ouvrage, en accordant à l'auteur un honoraire de cent Ducats.

VI. Déscription de quelques plantes du Caucase.

Mr. l'Académicien *Lepekhin*, chargé par l'Académie d'examiner le mémoire de Mr. le Baron Marchal de Bieberstein, présenté

présenté à la Conférence sous le titre: *Stirpium quarundam Caucasi Rossici et planitierum finitimarum illustratio botanica*, il en fit son rapport le 13 Mai 1799, dans lequel il dit: que la description des plantes que l'auteur donne dans ce mémoire est très digne de l'attention des Botanistes et mérite d'être inserée dans les Actes. Mais comme ces descriptions sont sans figures, Mr. Lepekhin fut d'avis d'en différer l'impression, jusqu'à ce que les plantes, dont il a semé les grains dans le jardin botanique, fussent parvenues à leur maturité, afin d'en pouvoir faire dessiner les figures et les ajouter au mémoire.

VII. Etat du Musée académique.

Mrs. les Académiciens *Ozeretskovski*, *Georgi*, *Hermann*, et *Severguine*, chargés d'examiner l'état du Musée d'histoire naturelle et du Cabinet de Mineralogie, rapportèrent le 13 May 1799 sur l'état dans lequel ils ont trouvé les differentes parties de ces collections et en remirent les catalogues.

VIII. Culture du Heracléum Sphondylium recommandée au lieu de la Bète-rave.

Sa Majesté l'Empéreur ayant envoyé à l'Académie, pour en savoir son avis, l'ouvrage de Mr. Achard: *Ausführliche Beschreibung der Methode, nach welcher bey der Kultur der Runkelrübe verfahren werden muss, um ihren Zuckerstoff zu vermehren u. s. w*: Mrs. les Académiciens *Lepekhin*, *Lowitz* et *Zakharoff*, chargés de lire cet ouvrage, en firent, le 10 Juin 1799, leur rapport qui fut transmis à S. E. Mr. le Prince Lopoukhin, pour être mis sous les yeux de Sa Majesté. A cette

 occasion

occasion Mr. l'Académicien Lepekhin proposa de faire venir du Kamtchatka, où elle croit en abondance, la plante nommée сладкая трава (Heracleum sphondylium), parcequ'elle contient une grande abondance de substance sucrée, qu'il seroit facile de l'acclimater ici, et qu'elle seroit préférable à toutes les plantes dont les Chymistes ont essayé jusqu'ici de tirer du sucre.

IX. Manière de conserver et d'empailler les animaux.

Mr. l'Abbé Manesse ayant envoyé à l'Académie un mémoire manuscrit sur la meilleure manière de empailler et de conserver les animaux, Mr. l'Académicien *Ozeretskovski*, chargé d'examiner ce mémoire, en fit son rapport le 10 Juin 1799, portant en substance: que la méthode que l'auteur propose dans ce traité mérite d'être suivi dans tous les Musées d'histoire naturelle.

X. Leçons d'Astronomie pratique, données à l'Observatoire, à deux maîtres d'Astronomie du Corps des Cadets de la Marine.

Le 10 Juin 1799 Mr. l'Académicien *Roumovski* présenta son rapport sur les progrès qu'ont fait dans l'Astronomie pratique les Capitaines Abrossimoff et Ivanoff, maîtres d'Astronomie nautique au Corps Impérial des Cadets de la marine, que le Collège de l'Amirauté avoit adressés à l'Académie, pour être instruits à l'Observatoire, afin de pouvoir être envoyés faire, sur les côtes de la mer blanche, les observations dont il a été question ci-dessus à l'article I. page 72. Mr. Roumovski rendit

rendit dans ce rapport un compte exact et détaillé de la méthode qu'il a suivie, et du bon succès qui en a été la suite. Il y joignit le journal que ces élèves ont tenu de leurs observations faites sous sa direction, afin que l'Académie et le Collège de l'Amiranté pussent se convaincre par autopsie de l'habilité de ces Messieurs, et de leur aptitude à faire, avec la précision requise, les observations dont ils seront chargés.

XI. Sur le perfectionnement des miroirs dans les Télescopes de Herschel.

L'Opticien Schrader ayant présenté à l'Académie un mémoire sur le sujet mentionné, Mr. l'Académicien *Fuss*, chargé d'en faire l'examen, en fit le 4 Juillet 1799 son rapport, dans lequel il rendit justice à la sagacité et à la patience de Mr. Schrader, qualités par lesquelles il est parvenu, comme on voit par ce mémoire, à surmonter tous les obstacles qu'il avoit rencontrés dans les nombreuses tentatives faites pour donner aux télescopes de Herschel un plus haut degré de perfection, principalement aux miroirs. Mr. Fuss donna aussi de justes éloges à la candeur et au désintéressement, avec lesquels cet habile Opticien donne dans son mémoire les détails de toutes les opérations à faire et de toutes les précautions à prendre dans le choix des matériaux, la fonte et la polissure des miroirs etc.

XII. Théorie des lignes parallèles.

Le 24 Octobre 1799 Mr. l'Académicien *Fuss*, chargé déxaminer un mémoire de Mr. le Conseiller aulique intime Schwab, intitulé: *Specimen novae parallelarum theoriae*, en fit son

son rapport, contenant en substance: que Mr. Schwab n'a pas éte plus heureux que tant d'autres qui se sont efforcés ou d'éluder le 11me axiome d'Euclide, ou de le démontrer rigoureusement, et que dans ses raisonnemens il se trouve un cercle évident. Mr. l'Académicien Schubert, dans un rapport qu'il présenta sur le même mémoire dans la séance du 28 Octobre, fut du même avis, et ajouta que la méthode dont s'est servi feu Mr. Karsten, dans son *Lehrbegriff der Mathematik*, lui paroît préférable, par sa brièveté, sa simplicité et son évidence, à la méthode de Mr. Schwab.

XIII. Méthode de forger le platine.

Le 16 Janvier 1800 Mr. l'Académicien *Lowitz* rapporta à la Conférence: que S. E. Mr. le Comte de Moussin-Pouchkin, dans une lettre datée de Nishney-Novgorod, lui a communiqué une nouvelle méthode de forger le platine; que lui (Mr. Lowitz) a suivi exactement le procédé de Mr. le Comte, avec une portion de platine cru que S. E. lui avoit envoyée avec la lettre, et que ce procédé a réussi si complettement qu'il se trouve parfaitement convaincu de la justesse et de l'utilité de cette nouvelle méthode découverte par Mr. le Comte. Mr. Lowitz fit voir en même tems une petite cuillère forgée par le Comte, et un parallelépipède de ce métal si refractaire, qu'il a forgé lui-même d'après les préceptes de l'inventeur.

XIV. Analyse d'une substance trouvée dans la rivière Wislinga.

Le Correspondant de l'Académie, Mr. le Conseiller Fries à Wologda, avoit envoyé à l'Académie le 5 Nov. 1800 deux substan-

substances trouvées dans la rivière Wislinga, osseuses en apparence, mais dont la configuration donnoit des doutes sur la véritable nature de cette substance. Mr. l'Académicien *Lowitz*, chargé de l'examiner chymiquement, rapporta le 9 Novembre que toutes les expériences qu'il a instituées prouvent que c'est véritablemant un os; et ce point décidé les Naturalistes présumèrent que c'est le fragment d'un crane d'Elephant.

XV. Machine pour rendre l'eau de mer potable.

Le 11 Mars 1801 Mr. l'Académicien *Lowitz*, chargé d'examiner un moyen de rendre l'eau de mer potable par la filtration, proposé par Mr. Lang à Laichingen, rapporta à l'Académie: que la machine imaginée pour cet effet, aussi bien que les principes, sur lesquels elle est fondée, sont également reprouvables, et que cette filtration, loin de délivrer l'eau de mer de ses sels, la gâteroit encore d'avantage par l'emploi de la limaille de fer et du charbon de terre.

XVI. Moyen proposé pour faire aller les bateaux contre le courant de l'eau.

Le 8 Avril 1801 Mr. l'Académicien *Gourieff*, chargé d'examiner un mémoire envoyé à l'Académie par Mr. le Chirurgien-Major Kritschevski à Nertschinsk, sous le titre: О само-проти-водо-ходѣ, en fit son rapport, contenant en substance: que l'idée de Mr. Kritschevski, difficile à déchiffrer, paroît être un jeu d'esprit plutôt qu'une invention utile; que le projet n'implique à la verité rien d'absolument impossible, mais que sa

sa réussite dépend d'un concours de circonstances favorables qui se trouvent rarement, ou jamais, réunies ensemble, que le moyen demande, pour être employé avec quelque succès, une eau de peu de profondeur, d'un cours rapide et d'un fond partout uni et ferme.

XVII. Charbon de terre en Courlande.

Le 3 Mai 1801 Mr. l'Académicien *Lowitz*, chargé d'examiner des charbons de terre et pyrites trouvés dans le cercle de Pilten en Courlande et envoyés à l'Académie par la Régence du Gouvernement, en fit son rapport, dont la substance est: que le charbon de terre, quoique pauvre en parties bitumineuses, si on le compare au charbon de terre Anglois, pourra néanmoins être employé avec avantage. Quant aux pyrites sulphureuses, qui ne contiennent que du fer et du souffre, sans aucune indice de cuivre, ni d'Arsénic, Mr. Lowitz est d'avis qu'elles pourroient fournir du souffre et de la sulfate de fer, supposé qu'elles fussent en assez grande abondance pour qu'il valut la peine d'en tirer ces substances.

XVIII. Observations astronomiques faites sur la côte de la mer blanche par Mr. Ivanoff.

Le 24 Mai 1801 Mr. l'Académicien *Inokhodzoff*, chargé d'examiner les observations astronomiques faites sur les côtes de la mer blanche, par Mr. le Capitaine Ivanoff et envoyées à l'Academie par S. E. Mr. le Général de Koutouzoff, en fit son rapport, qui est très favorable à l'exactitude de cet observateur. Car en supposant les divisions du quart-de-cercle et du sextant justes

justes, les corrections de ces instrumens exactement déterminées et les momens des observations pris avec justesse, Mr. Inokhodzoff a trouvé un accord surprenant et à peine concevable entre la détermination des mêmes points tirée de différens phénomènes. La longitude de Sviatoy-Noss, par exemple, déduite d'une observation des distances de la Lune, ne diffère que de $\frac{31}{100}$ de seconde de celle qui a été conclue d'une émersion du premier satellite de Jupiter. Et cet accord est d'autant plus étonnant que du tems de la premiere observation le froid a été rigoureux au point d'arrêter la marche du Chronomètre peu après l'observation. Mr. Inokhodzoff rapporte encore d'autres différences de Méridiens tirées d'observations qui s'accordent pareillement très bien entre elles, et qui ne permettent par d'attribuer cet accord à un pur hazard.

XIX. Prétendue solution d'un problème du calcul des probabilités.

Mr. l'Académicien *Schubert* avoit été chargé d'examiner un mémoire intitulé: *Réfutation de quelques erreurs de Mr. D'Alembert et solution du problème de Pétersbourg*, qu'un anonyme avoit envoyé à l'Académie de Stiekna en Boheme, avec la priere de l'examiner et de lui faire savoir s'il a résolu d'une maniere satisfaisante le problème sur le jeu de croix et pile connu sous le nom de problème de Pétersbourg. (C'est le problème dont parle Daniel Bernouilli dans son *Specimen theoriae novae de mensura sortis. Comment. Acad. Imp. Scient. Petrop. T.* 5.p. 187.). Le dit Académicien remit son rapport à la Conférence le 10 Juin 1801. Son avis fut que l'auteur anonyme du mémoire en question eclaircit très bien le véritable point de

vue sous lequel il faut envisager le problème mentionné; que tous les raisonnemens qui précèdent sa solution, sont très justes; que ses idées sur l'enjeu, sur l'espérance des joueurs, sur la certitude et la probabilité, et sur les regles générales de ce calcul sont aussi nettes et claires que la manière dont il les développe est lumineuse. Mais quant à l'objet principal, le problème de Pétersbourg, Mr. Schubert ne trouve pas que l'Anonyme l'ait résolu d'une manière satisfaisante. L'Académicien passe en revue tous les divers argumens par lesquels l'auteur s'efforce de prouver que l'enjeu doit être de deux écus, et il fait voir que ces argumens ne sont ni assez solides ni duement développés. Mr. Schubert finit ses remarques par faire voir la source des faux calculs de l'auteur.

XX. Tourbes et pyrites de fer de Krasnoye Sélo.

Le 15 Novembre 1801 Mrs les Académiciens *Hermann*, *Lowitz* et *Severguine*, chargés d'examiner des pyrites de fer et des tourbes, envoyées, par ordre de Sa Majesté l'Impératrice Mère, à l'Académie pour y être examinées, en présentèrent leur rapport. Le résultat de l'examen institué par les dits Académiciens est: que deux des trois espèces de pyrites pourroient être employées avec avantage à en tirer du soufre et de la sulfate de fer, avantage que la troisième espèce ne présente pas. Quant aux tourbes: que la premiere espèce, étant fort flasque, poreuse et mal brûlante, ne sauroit être d'aucun usage, mais que les deux autres, plus fermes et plus inflammables, donnent un charbon dur et consistant et peuvent servir en beaucoup de cas comme matière de chauffage et de combustion.

XXI.

XXI. Déscription d'un voyage en Lapponie.

Le 2 Mai 1802 Mr. l'Académicien *Ozeretskovski*, chargé d'examiner la déscription d'un voyage en Lapponie, présenté par Mr. le Capitaine Ivanoff, en fit son rapport à la conférence, dont la teneur est que cette déscription est assez intéressante et instructive, pour mériter d'être publiée, après avoir été retouchée par rapport au stile.

XXII. Sur un ouvrage d'Entomologie.

Sa Majesté l'Empéreur ayant ordonné d'envoyer à l'Académie, pour y être examiné, un ouvrage manuscrit, intitulé: *Beytrag zur Naturgeschichte Lief- und Estlands, vorzüglich in Hinsicht der Entomologie; von E. W. Drümpelmann* etc. Mr. l'Académicien *Ozeretskovski*, chargé d'examiner cet ouvrage, en fit son rapport le 5 Mai 1802, dans lequel, après avoir rendu justice à l'exactitude des dessins et des déscriptions de Mr. Drümpelmann, il ajoute que tous les insectes que contient cet ouvrage, se trouvent déjà décrits et dessinés dans beaucoup d'autres livres d'Entomologie.

XXIII. Fossiles trouvés dans le parc de Pavlofsk.

Sa Majesté l'Impératrice Mère ayant ordonné d'envoyer à l'Académie deux fragmens de cornes de cerf et un morceau de bois de pin les premiers imprégnés de terre calcaire, l'autre recouvert de cette même terre, sur lesquels Sa Majesté demandoit l'opinion de l'Académie: Mr. l'Académicien *Severguine*, chargé d'examiner ces fragmens, en fit le 23 Juin 1802 un

 rapport

rapport conçu en ces termes: Les fossiles que l'accident à fait trouver à Pavlofsk, pendant qu'on y creusoit un puits, et qui ont été présentés à la Conférence de l'Académie par S. E. Mr. le Président, dans la séance du 16 juin, sont de deux espèces. L'une présente des fragmens de bois de Cerf qui n'ont subi presque aucune altération, excepté qu'ils sont imprégnés par-ci par-là de terre calcaire grise et très impure. L'autre est un morceau de bois de pin, un peu pourri, qui s'écrase entre les doigts assez facilement, et qui est recouvert de terre calcaire grise foncée, en forme d'écorce de quelques lignes d'épaisseur. Les observations des minéralogistes voyageurs qui ont eu l'occasion de visiter des plaines, ou des collines et des montagnes de formation plus récente, nous fournissent des exemples assez nombreux, qu'il se trouve entre les couches de ces pays differens ossemens d'animaux intactes, calcinés, terrifiés, pétrifiés même, ou minéralisés. Il en est de même des fragmens de bois que l'accident y a pû transmettre et ensevelir. Les observations prouvent encore, qu'il y a des cas, où de tels corps y ont été transmis d'endroits plus éloignés; et qu'il en y a d'autres, où on voit que ce ne sont que des restes et des debris des corps qui habitoient dans l'endroit même. Enfin tous les faits viennent à l'appui de l'observation que les pays, où est située la ville de Pavlofsk, ainsi que tout le terrein depuis la mer Baltique jusqu'à Moscou, et même plus loin, est un pays neuf, pour ainsi dire, qui n'est resté à sec, que depuis que les eaux, dont il étoit recouvert jadis, se sont retirées et rassemblées dans les profondeurs que les revolutions du globe terrestre leur ont fournies. Ce pays donc ne peut présenter que des phénomènes semblables. Cependant les fragmens de bois de cerf mentionnés et le bois de pin incrusté

semblent

semblent être encore plus accidentels et n'être provenus que de l'endroit même. Toutes les qualités de ces deux fossiles mentionnés prouvent que l'époque de leur passage au regne minéral n'est pas trop éloignée de nos tems. Mais pour en juger encore plus solidement, il auroit fallu savoir la profondeur à laquelle ils ont été trouvés. Car plus elle seroit grande, plus l'époque de leur transmission seroit reculée.

XXIV. Charbon de terre et ambre jaune trouvés à Kamensk.

Le 19 Septembre 1802 Mr. l'Académicien *Lowitz* présenta et lut à la Conférence un rapport concernant un bois converti en charbon de terre et une substance résineuse trouvée entre les couches de ce charbon près de la fonderie de canons à Kamensk, envoyés l'un et l'autre à l'Académie par Mr. le Capitaine en chef des mines de Cathérinebourg, Hermann. D'après ce rapport Mr. Lowitz a trouvé que cent parties des charbons, brulés dans un feu clos, donnent 48 parties d'un charbon très dur et luisant dans la cassure, et que brûlés dans un feu libre ils laisent quatre parties d'une cendre rouge-brune fort légère. Le rapporteur ajouta que plusiers morceaux de ce charbon sont pénétrés d'une pyrite sulphureuse en décomposition et ont un goût vitriolique très fort. Quant à la substance resineuse l'odeur qu'elle rend et l'enflure qu'elle prend, lorsqu'elle est exposée au feu; la propriété d'attirer des corps legers, après avoir été frottée; et de ne se mettre en fusion qu'après que l'acide en a été chassé, confirment, selon Mr. Lowitz, la conjecture de Mr. Hermann, et ne laissent pas douter que ce ne soit un véritable ambre jaune.

XXV.

XXV. Machine pour déterminer la longitude en mer.

Mrs. les Académiciens *Krafft* et *Schubert*, ayant été chargés d'examiner une machine inventée par l'Enseigne congédié, Mr. Stolb-Rapinski, au moyen de laquelle il prétend qu'on puisse trouver la longitude et la latitude de tous les points de la surface terrestre: ils en firent le 20 Octobre 1802 leur rapport, contenant 1°) la déscription détaillée de cette machine; 2°) l'opinion des rapporteurs sur son mérite. La substance de la seconde partie du rapport est: que cette machine est fondée sur une théorie absulument fausse, et que, quand même la théoric seroit plus conforme aux vrais principes, la machine seroit sujette, dans la pratique, à tant de difficultés qu'on ne sauroit s'en promettre aucune justesse, et par conséquent d'autant moins d'utilité, que l'on a, pour déterminer la longitude et la latitude par mer, des méthodes si exactes, que ce problème peut être regardé comme complettement résolu.

XXVI. Observations astronomiques faites dans la mer Baltique, par Mr. de Sarytcheff.

Le 27 Octobre 1802 Mr. l'Académicien *Inokhodzoff*, présenta et lut son rapport concernant le Journal des Observations astronomiques, faites pendant une navigation dans la Baltique, par Mr. le Capitaine-Commandeur Sarytcheff, et envoyés à l'Académie par le Collège Impérial de l'Amirauté, pour être examinées. Le dit Académicien, chargé de cet examen, dit qu'après avoir refait lui même plusieurs des calculs de

de Mr. de Sarytcheff, il s'est assûré qu'ils sont faits avec soin, et que les latitudes et longitudes qui en ont été déduites, sont d'une justesse parfaitement suffisante pour l'usage géographique.

XXVII. Observations astronomiques faites sur les côtes de la mer blanche par Mr. Abrossimoff.

Le 31 Octobre 1802 S. E. Mr. le Vice-Président de *Roumovski* présenta et lut son opinion sur les observations astronomiques faites sur la côte de la mer blanche par Mr. le Capitaine Abrossimoff, avec les calculs faits pour en déduire la position géographique des points de cette côte qu'il avoit été chargé de déterminer (V. les articles I, X, XVIII.). Mr. de Roumovski y rend un témoignage favorable à la justesse des observations et des calculs de Mr. Abrossimoff, s'étant assûré, à ce qu'il dit, par l'examen de son journal envoyé à l'Académie par le Collège de l'Amirauté, que ce Collège possède dans la personne de Mr. Abrossimoff un observateur intelligent et exact.

VIII.

Leçons publiques.

Elles furent données dans les mois d'été, de 1799, 1800 et 1801 par Mrs. les Académiciens Ozeretskovski, Severguine, Zakharoff et Gourieff, le premier donnant chaque année un Cours d'histoire naturelle; le second: de Minéralogie; le troisième: de Chymie; le quatrième: de Physico-Mathématique. En 1802 les trois premiers Cours furent donnés par les mêmes

sa-

savans; mais au Cours de Physico-Mathematique de Mr. l'Académicien Gourieff fut substitué un Cours de Botanique donné par Mr. l'Adjoint Smélovski.

IX.

Cartes et ouvrages publiés par l'Académie.

1°) Mappa exhibens declinationes acus magneticae ad initium saeculi decimi noni, constructa a C. A. Kratzenstein.

2°) Карты Острововъ Малты, Годзо и Куманія.

3°) Начальныя основанія физики Г-на Кузеня, переведенныя съ Французскаго языка, съ присовокупленіемъ нѣкоторыхъ по химической части примѣчаній и добавленій, Академикомъ и Надворнымъ Совѣтникомъ Севергинымъ.

4°) Способы къ отвращанію въ рогатомъ скотѣ падежа, и средства къ излѣченію сея болѣзни служащіе. Сочин: Академика Лепехина.

5°) Supplementa duo ad Geographiam practicam. Auctore P. Kautsch.

6°) Nova Acta Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae. Tom. XII.

7°) Дифференціяльное и интегральное изчисленіе, собранное на французскомъ языкѣ Г. Кузенемъ и приумноженное при преложеніи наРоссійской Академикомъ Сем. Гурьевымъ и пр. Книга 1.

8°)

8°) Академическія сочиненія выбранныя изъ перваго тома дѣяній Императорской Академіи Наукъ и пр. Часть 1.

9°) et 10°) Всеобщая и частная естественная исторія Графа де Бюффона, преложенная съ французскаго языка на Россійской Академикомъ И. Лепехинымъ, часть VI и VII.

11°) Sammlungen hiſtoriſcher Nachrichten über die Mongoliſchen Völkerſchaften, durch P. S. Pallas. 2r Theil.

12°) Nova Acta Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae. Tom. XIII.

13°) Гиртаннера начальныя основанія Химіи горючее существо опровергающей, переведено съ немецкаго Академикомъ Я. Захаровымъ.

14°) Пробирное искуство, или руководство къ химическому испытанію металлическихъ рудъ и другихъ ископаемыхъ тѣлъ. Сочин. Вас. Севергина и пр.

EXTRAITS
DES MÉMOIRES
CONTENUS
DANS CE VOLUME.

CLASSE MATHÉMATIQUE
ET
PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

I.

Recherches sur quelques intégrations remarquables dans l'Analyse des fonctions à deux variables, connuës sous le nom de différences partielles.

Par Mr. *L. Euler*, pag. 3.

Le but que l'auteur de ce mémoire avoit eu en vue, a été d'enseigner une méthode de trouver les intégrales complettes des équations differentielles suivantes :

$$P = x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

$$Q = x^2\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + xy\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right) + y^2\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) = 0$$

$$R = x^3\left(\frac{\partial 3 z}{\partial x 3}\right) + 3x^2y\left(\frac{\partial 3 z}{\partial x^2\partial y}\right) + 3xy^2\left(\frac{\partial 3 z}{\partial x\partial y^2}\right) + y^3\left(\frac{\partial 3 z}{\partial y 3}\right) = 0,$$

- - - - - - - - - -

- - - - - - - - - -

- - - - - - - - - -

$$Z = x^\lambda\left(\frac{\partial^\lambda z}{\partial x^\lambda}\right) + \frac{\lambda}{1}.x^{\lambda-1}.y\left(\frac{\partial^\lambda z}{\partial x^{\lambda-1}\partial y}\right) + \frac{\lambda}{1}.\frac{\lambda-1}{2}.x^{\lambda-2}y^2\left(\frac{\partial^\lambda z}{\partial x^{\lambda-2}\partial y^2}\right) + \text{etc.} = 0.$$

Pour cet effet il commence par démontrer que chacune des expres-

pressions Q, R, S, . . . Z peut être formée de celle qui la précède immédiatement, attendu que:

$$Q = x\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - 1 \cdot P$$
$$R = x\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - 2 \cdot Q$$
$$S = x\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) - 3 \cdot R$$

etc. etc.

Et moyennant ces beaux rapports entre les quantités P, Q, R, etc. il est conduit à l'avantage de trouver les intégrales complettes des équations différentielles $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, et ainsi de suite. Or la méthode dont feu Mr. Euler s'est servi dans ces intégrations exige pour chaque cas autant d'intégrations que le degré du différentiel indique, tandis que toutes ces solutions peuvent être exécutées plus facilement, moyennant une seule intégration, méthode qui a encore le grand avantage de s'étendre aussi à l'intégration des équations différentielles composées des précédentes et comprises sous la forme générale $Az + BP + CQ + DR + ES +$ etc. Une suite de problèmes dans lesquels l'integrale complette des équations de cette forme est cherchée, termine ce mémoire.

II.

Illustratio paradoxi circa progressionem numerorum idoneorum sive congruorum. (V. N. Acta. T. XIV.)

Auctore *L. Eulero*, pag. 29.

Il faut se rappeller ici d'un mémoire de feu Mr. *Euler*, inséré dans le volume précedent des *Nova Acta*, sous le titre: *Me-*

Methodus generalior numeros quosvis satis grandes perscrutandi, utrum sint primi, nec ne? Ce mémoire renferme une table de tous les nombres $\alpha\beta$ tels que tous les nombres contenus d'une seule manière dans la forme $\alpha xx + \beta yy$ soyent premiers. Le dernier nombre de cette table est 1848; et quoique l'auteur ait poussé fort loin ses recherches, il lui a été impossible de trouver encore un nombre propre à cet examen des nombres premiers, au delà de 1848; ce qui l'a porte à soutenir que ce soit effectivement le dernier. Le paradoxe dont il est question dans ce petit mémoire consiste donc en ce qu'une suite de nombres formés d'après une certaine loi, ne consiste qu'en 65 termes, tandis que le nombre des termes devroit être infini. Pour expliquer en quelque façon ce paradoxe, Mr. Euler s'est attaché ici à montrer par une espèce de ces nombres, savoir par les nombres carrés que la table renferme, comment, non obstant la loi de progression, la multitude des nombres $\alpha\beta$, propres à l'examen de la forme $\alpha xx + \beta yy$, puisse être finie et même se reduire à un assez petit nombre de termes.

III.

Demonstratio insignis theorematis numerici circa uncias potestatum binomialium.

Auctore *L. Eulero*, pag. 33.

En developpant la puissance p du binome $1 - x$, le coëfficient du terme x^q sera, comme tout le monde sait, $\frac{p}{1} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{p-q+1}{q}$. Pour désigner ce coefficient feu Mr. Euler a introduit dans l'analyse le caractère $(\frac{p}{q})$. On sait donc

donc ce que signifient chez lui les caractères $(\frac{m}{0})$, $(\frac{m}{1})$, $(\frac{m}{2})$, $(\frac{n}{c})$, $(\frac{n}{c+1})$, $(\frac{n}{c+2})$ etc. En faisant usage de ces caractères dans l'acception indiquée, le théorème, dont on trouve ici la démonstration, porte que :

$$(\frac{m}{0})(\frac{n}{c}) + (\frac{m}{1})(\frac{n}{c+1}) + (\frac{m}{2})(\frac{n}{c+2}) + \text{etc.} = (\frac{m+n}{m+c}) = (\frac{m+n}{n-c}).$$

L'immortel auteur avoit dejà démontré cette vérité pour les cas où m est un nombre entier positif. Ici il fait voir que cette égalité a lieu dans tous les cas, et que m et n peuvent être des nombres entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs.

IV.

Accuratior evolutio problematis de linea brevissima in superficie quacunque ducenda.

Auctore *L. Eulero*, pag. 44.

L'auteur suppose donnée cette équation pour la surface : $p\partial x + q\partial y + r\partial z = 0$; p, q, r, étant des fonctions des coordonnées x, y, z, l'équation pour la plus courte ligne qu'on peut tracer sur cette surface sera :

$$\partial\partial z(q\partial z - r\partial y) + \partial\partial y(r\partial y - p\partial z) + \partial\partial z(p\partial y - q\partial x) = 0.$$

Mais comme il ne se lui présente aucune voye qui puisse conduire à l'intégration de cette équation, quoiqu'il y ait plusieurs cas particuliers, où elle réussit, il se contente de developper quelques uns de ces cas, ce qui lui fournit l'occasion de déployer la richesse de ses artifices analytiques. Mais c'est par là même que le mémoire se refuse à toutes les tentatives que nous

nous pourrions faire d'en donner une idée à nos Lecteurs autrement qu'en le transcrivant presqu'en entier.

V.

De resolutione formulae integralis $\int x^{m-1}\,\partial x\,(\Delta + x^n)^\lambda$ in seriem semper convergentem; ubi simul serierum quarundam summatio directa traditur.

Auctore *N. Fuſs*, pag. 55.

La résolution de la formule intégrale mentionnée en une série toujours convergente a été donnée par feu Mr. L. Euler. On la trouve dans le 4me volume supplémentaire de son calcul intégral. La méthode a cela de particulier, qu'au lieu de $\Delta + x^n$ on met $\Delta + a^n$, qu'on prend les intégrales des termes de la puissance développée depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$, et qu'on réstitue à la fin x à la place de a. L'auteur de ce mémoire a cru qu'une méthode de résoudre cette formule, dans laquelle il ne fut pas nécessaire d'établir des termes d'intégration étrangers à la nature du problème, pourroit avoir quelque intérêt. Il présente une pareille méthode dans le présent mémoire, et il arrive, par une route aussi directe que simple et facile, à la même série que feu Mr. Euler a donnée. Il en fait l'application à quelques cas particuliers remarquables, qui mènent à des sommations dejà connues, entre autres à la série:

$$\frac{\mu}{m+n} + \frac{\mu}{m+n}\cdot\frac{\mu+n}{m+2n} + \frac{\mu}{m+n}\cdot\frac{\mu+n}{m+2n}\cdot\frac{\mu+2n}{m+3n} + \text{etc.} = \frac{m}{m+\mu},$$

sommation que feu Mr. Euler a aussi donnée, et qui lui a paru d'autant plus remarquable qu'il se présente à peine une méthode directe de la démontrer. L'auteur en donne une démonstration di-

directe, qui explique pourquoi la quantité n a disparu dans la somme de cette série, et qui conduit naturellement à la démonstration de quelques autres sommations remarquables.

VI.

Observationes circa ellipsin quandam prorsus singularem.

Auctore *N. Fuſs*, pag. 71.

Un cercle étant donné, si l'on ajoute au sinus de chaque angle le cosinus correspondant, ou qu'on l'en retranche, lorsqu'il est négatif ou affecté du signe contraire à celui du sinus, les points ainsi déterminés se trouvent dans une ellipse douée de plusieurs propriétés remarquables qui font le sujet de ce mémoire, dans lequel l'auteur donne la démonstration de ces propriétés.

VII.

Solution d'un problème de Mécanique relatif au vol des oiseaux.

Par *Mr. Fuſs*, pag. 88.

Le problème dont Mr. Fuſs donne la solution dans ce mémoire est énoncé ainsi: La figure et la grandeur des ailes étant données, avec la force musculaire que l'oiseau employe pour les mettre en mouvement, trouver, pour tel angle qu'elles ont parcouru en battant l'air, leur vitesse, le tems écoulé, et l'action des ailes, ou la force avec laquelle l'oiseau en est mû. La solution générale de ce problème est suivie de plusieurs co-

rol-

rollaires et de l'application à un cas particulier qui se prête à l'intégration, et qui est éclairci par l'exemple d'un aigle dont feu Mr. Silberschlag a observé et décrit soigneusement les phénomènes du vol. En faisant usage des données trouvées dans le mémoire de ce savant, l'auteur trouve le plus bel accord entre les résultats de cette application de sa solution et les observations faites par Mr. Silberschlag sur le vol ascensionnel de son aigle. Dans une addition l'auteur, après avoir combattu une opinion de feu Mr. R. Forster sur le vol des oiseaux, montre, que la seule force et action des ailes suffit pour expliquer l'élévation de l'oiseau, sans qu'il soit besoin de recourir à l'hypothèse absolument insoutenable et contraire aux loix de l'hydrostatique que le savant mentionné avoit publiée.

VIII.

Solution de quelques problèmes de l'analyse indéterminée, continuation.

Par *Mr. Kausler*, pag. 116.

On trouve dans le XIme volume des *Nova Acta* un mémoire de feu Mr. Euler, intitulé: *De novo genere quaestionum arithmeticarum, pro quibus solvendis certa methodus adhuc desideratur.* Parmi les questions dont Mr. Euler parle dans ce mémoire, et pour la solution desquelles il soutient que l'Analyse n'a point encore de méthode certaine et sûre, se trouve aussi celle d'assigner toutes les valeurs rationnelles de x et y qui rendent l'expression $(x^2 - 1)(y^2 - 1)$ égale à un nombre entier. C'est la solution de ce problème que Mr. Kausler donne dans ce mémoire, par une méthode qui lui semble pouvoir être

n 2 em-

employée avec un égal succès à la solution de toutes les questions de cette espece.

IX.

Demonstratio theorematis: nec summam, nec differentiam duorum cubo-cuborum cubo-cubum esse posse.

Auctore *C. F. Kauslero*, pag. 146.

Une marche semblable à celle que le même auteur a tenue dans le XIIIe volume des *Nova Acta*, pour arriver à la démonstration que ni la somme ni la différence de deux bicarrés puisse être un bicarré, il la suit ici, avec le même succès, pour démontrer le théorème énoncé dans le titre de ce mémoire. Après avoir fait voir, dans un lemme, qu'il n'y a point de valeurs rationnelles de x et y qui rendent $x^4 + x^2 y^2 + y^4$ un nombre carré, il passe en revue toutes les suppositions possibles que la nature de l'équation $(x^2 - y^2)(x^4 + x^2 y^2 + y^4) = m^6 n^6$ admet, et il fait voir de chacune qu'elle est impossible.

X.

Novae disquisitiones super numeris formae $m x^2 + n y^2$.

Auctore *C. F. Kausler*, pag. 156.

C'est encore un mémoire de feu L. Euler qui a donné à Mr. Kausler occasion aux recherches qu'il présente ici, savoir le mémoire inséré dans le XIIe volume des Nova Acta, sous le titre: *De formulis speciei $m x x + n y y$ ad numeros primos ex-*

explorandos idoneis, earumque mirabilibus proprietatibus. La lecture de ce mémoire lui a ſuggéré des idées propres à repandre du jour ſur une propriété remarquable des nombres, à la démontrer, à reſoudre différens problèmes qui y ſont relatifs, et à en faire quelques applications remarquables. Tout cela fait le ſujet du préſent mémoire, que l'auteur prie le lecteur de regarder comme un Supplément au mémoire de feu Mr. Euler ci-deſſus mentionné.

XI.

Eſſai d'une méthode générale pour reduire toutes ſortes de quantités en fractions continues.

Par Mr. *Viſcovatoff*, pag. 181.

L'auteur de ce mémoire donne une méthode pour reduire toutes ſortes de quantités en fractions continues. La méthode qu'il a employée eſt la même qui ſert à convertir les fractions ordinaires en fractions continues; elle eſt appliquée au développement de pluſieurs expreſſions algébriques remarquables en fractions continues, parmi leſquelles il y a de neuves et de curieuſes.

XII.

Eſſai d'une ſyntheſe des équations du cinquième degré.

Par *Mr. Beitler*, pag. 193.

Mr. Beitler conſidère dans cet eſſai l'équation du cinquième degré générale: $x^5 * - 5Bx^3 - 5Cx^2 - 5Dx - E = 0$, et il ſuppoſe aux cinq racines la forme:

$x =$

$$x = \varrho\sqrt[5]{p^2 q^3 r^4 a^6} + \varrho^2 \sqrt[5]{p^4 q^6 r^3 a^2} + \varrho^3 \sqrt[5]{p^6 q^4 r^2 a^8} + \varrho^4 \sqrt[5]{p^3 q^2 r^6 a^4}$$

où ϱ indique chacune dès cinq valeurs différentes de $\sqrt[5]{1}$. Les cinq racines qui en résultent donnent autant de facteurs, dont le produït fournit l'équation qui a ces cinq racines. Une suite d'exemples, où l'auteur donne à p, q, r, a des valeurs déterminées, et où il résoud encore quelques autres équations numériques données, terminent ce petit mémoire sur un sujet que Mr. Beitler se propose de reprendre et de traiter plus à fond dès qu'il en aura le loisir.

XIII.

De curva loxodromica in corpore quovis rotundo descripta.

Auctore *F. T. Schubert*, pag. 225.

La Loxodromie étant une courbe qui coupe tous les Méridiens d'un corps sous un angle constant, on peut la concevoir décrite à la surface d'un corps quelconque qui a des méridiens, ou des poles, ou bien un axe, c'est-à-dire, de tous les corps *ronds* qui sont engendrés par la rotation d'une ligne autour d'un axe, quelle que soit sa figure. L'auteur de ce mémoire, s'étant proposé d'examiner ces courbes, commence par trouver des expressions générales tant pour les courbes mêmes que pour leur rectification et quadrature, qu'il applique ensuite au cône, à la sphère, au spheroïde elliptique, parabolique, et à un corps produit par la rotation d'une courbe transcendente qui a des proprietés singulières. Il trouve que la projection orthographique de la Loxodromie décrite à la surface d'un cône

cône, produit la spirale logarithmique. Enfin il démontre, que la Loxodromie decrite sur un Paraboloïde, a la proprieté remarquable, qu'un corps, en tombant du sommet du Paraboloïde placé verticalement par un pareil canal loxodromique, parcourt tous les tours de cette spirale dans le même tems, de sorte que, plusieurs corps tournant de cette façon autour du Paraboloide, quand ils ont passé dans le même instant sur le même méridien parabolique, l'un au dessus de l'autre, ils se trouveront toujours dans le même méridien ou plan vertical. C'est donc la théorie, sur laquelle est fondée la construction d'une machine que le P. Sebastien a présentée sur la fin du 17me siècle à l'Académie des Sciences de Paris, sans en donner la démonstration.

XIV.

Sur les tables de population des Etablissemens Impériaux pour les mines de Cathérinebourg, présentées à l'Académie par S. E. Mr. Hermann, Capitaine en Chef des mines.

Par Mr. *Krafft.* pag. 237.

Les tables qui font l'objet de ce mémoire, ont été construites par les soins de S. E. Mr. de Hermann, en sa qualité de Chef des mines de Cathrinenbourg, sur une population de plus de 16000 hommes. Elles ont été formées, par ses ordres et sous sa direction, avec une exactitude particulière, et en plusieurs points avec plus d'étendue qu'à l'ordinaire. Mr. Krafft présente dans ce mémoire la rédaction qu'il a faite de ces tables, et

et les résultâts et conclusions qu'il en a tirées. Il a suivi dans cette rédaction le même ordre et la même méthode qu'il a établis dans le premier de la suite de ses mémoires sur les tables de population de la ville de St. Petersbourg (voyez Actes de l'Académie pour 1782. Part. I.; Nova Acta. Tome IV — Tome XII.). Nous renvoyons les lecteurs au mémoire même pour ce qui régarde les résultâts, tous dignes de l'attention du Gouvernement, qui dérivent des rapports réciproques de la population, des nombres annuels des mariages, des naissances, des morts et d'autres, pour nous borner dans cet extrait à un seul, dans lequel Mr. Krafft fait voir combien le jugement sur le bon état de la tendance d'une population à s'accroître pourroit être trompeur, si le Gouvernement eut voulu le former en ne consultant à cet égard que le rapport seul du nombre annuel des naissances à celui de la population. Ce rapport étant composé de deux autres, savoir du rapport des nombres annuels des naissances et des mariages; ces deux rapports peuvent s'écarter, en sens opposé, de la norme ordinaire, moyennant quoi le rapport composé qui en dérive, présente un résultat bien-satisfaisant, quoique, tandisque l'un des deux rapports composans, s'élève favorablement au dessus du niveau de la norme ordinaire, l'autre baisse au dessous de lui à un point assez désavantageux, pour mériter l'attention et demander le secours du Gouvernement.

Il y a nombre de circonstances intéressantes de ce genre que le Gouvernement n'apercevroit peut-être jamais sans le secours de pareilles tables; et cette considération suffiroit seule (s'il n'y en avoit pas tant d'autres) pour démontrer l'utilité qu'auroit pour le bien-être public, l'établissement formel d'un Bureau

reau Impérial des tables de population et des produits naturels des différentes provinces, qui composent le vaste Empire de Russie.

XV.

Recherches sur les intégrales premieres des équations aux différences partielles du second degré et du troisième, à trois variables.

Par Mr. *J. Trembley.* pag. 257.

Nous ne saurions mieux indiquer l'objet et le but de ce mémoire herissé de calculs, qu'en transcrivant ce que l'auteur en dit lui-même dans l'espèce de préface qu'il a mis à la tête de ses recherches. Il observe d'abord avec raison que, lorsque les différentielles ne sont pas linéaires dans les équations aux differences partielles du second degré, ces équatious paroissent peu traitables et que les Géomètres s'en sont peu occupés jusqu'ici. Une recherche plus simple que l'Analyse génerale est, dit-il, de chercher les intégrales premieres de ces sortes d'équations. Mr. de Niewport a traité ce sujet très savemment dans ses mélanges mathématiques; mais il a regardé les solutions générales comme impossibles et a eu recours à des méthodes particulieres très ingénieuses. Le but de Mr. Trembley est de traiter la chose généralement dans ce mémoire, et de faire voir comment on peut lever les difficultés dont parle Mr. de Niewport. Dans cette vue il trouve d'abord des équations à trois variables, qui offrent des résultats plus simples et plus satisfaisans. Ensuite il jette un coup d'oeil sur les équations à quatre et à cinq variables, parceque, malgré la complication de leurs résultats, elles fournissent quelques propositions qui lui ont paru mériter l'attention des Géomètres.

CLASSE DE PHYSIQUE

I.

Methodi novae facillimae, ac simplicissimae, acidum aceticum glaciale parandi, expositio.

Auctore *T. Lowitz*, pag. 313.

La faculté de l'acide acétique de se crystalliser, découverte en 1788 par Mr. Lowitz, encouragea ce fameux Chymiste de chercher des méthodes sûres et faciles, pour gagner cet acide dans le degré de concentration qui lui donne cette proprieté. C'est dans la poudre de charbons et le sulfate de potasse acidule qu'il crût en avoir trouvé les moyens, le simple acide sulfurique, à cause de l'eau qu'il contient, lui ayant paru insuffisant pour la production d'un acide acétique concentré ou de la glace végétale (Eisessig).

Mais dans ce mémoire Mr. Lowitz donne un compte bien détaillé de sa dernière découverte, d'après laquelle on peut se procurer en tous tems la plus forte glace végétale par le simple acide sulfurique, sans y employer un grand froid d'hiver, pourvu que, pour décomposer l'Acétate, on l'employe dans une proportion beaucoup plus grande que celle que Mr. Westendorf a préscrite. D'après la méthode établie sur cette observation, que son mémoire expose dans tous les details, il faut 3 livres de l'Acétate de potasse décomposé par 4 livres d'acide sulfurique concentré de 1,839 poids spécifique, pour gagner 22 onces de glace végétale crystallisée, qui demande une

une température de + 10° R. pour être mise en fonte, et 6 drachmes d'acide acétique foible; de manière, que 100 parties d'acétate de potasse en donnent 61 de glace végétale. Il developpe en même tems avec beaucoup de clarté les raisons pour lesquelles l'acide acétique, préparé d'après la méthode de Mr. Westendorf, doit toujours être plus foible que celui fait d'après la sienne. D'après la première c'est un sulfate de potasse absolument saturé, qui n'est propre à contenir qu'une très petite partie de l'eau de crystallisation; mais d'après la méthode de Mr. Lowitz on reçoit un sulfate de potasse acidule qui, d'après ses découvertes, a la propriété de recevoir une quantité considérable d'eau de crystallisation et de la réténir avec une telle force que pour la chasser il faut un degré de feu beaucoup plus considérable que celui auquel l'acide acétique si excessivement volatil est distillé.

L'auteur ajoute de plus les portions de la glace végétale que d'après sa méthode les différentes sortes de vinaigre offrent, s'avoir de 100 parties de vinaigre de raisins cru on reçoit 5,9 et de la même quantité de vinaigre de bière il n'y en a que 2,3.

C'est encore un objet digne d'attention et de recherches ultérieures que l'observation de Mr. Lowitz sur l'apparition du soufre qui eût lieu sur un morceau de bois (copeau) mis dans l'acétate de potasse et l'acide sulfurique au moment de la distillation.

II.

Meditationes experimentis superstructae de vero agendi modo pulveris carbonum dum vim suam depuratricem exserit.

Auctore *T. Lowitz*, pag. 326.

C'est par une voie aussi simple que satisfaisante que Mr. Lowitz a prouvé que l'effet du charbon est chymique et non pas mécanique, comme quelques Chymistes ont soutenu. Après avoir dit, que la plus soigneuse pulverisation mécanique de la poudre de charbon en augmente l'effet purifiant; que cet effet n'est pas interrompu par l'eau qui remplit et pénètre ses pores; que l'odeur et la couleur ôtées au charbon ne peuvent en aucune manière être retrouvées dans celui qui reste; que le charbon employé en abondance détruit souvent la composition de l'objet auquel il est appliqué; que les couleurs et les odeurs ne sont en elles-mêmes que des résultats de réunions chymiques; — pour prouver l'effet chymique du charbon il ajoute quelques expériences très intéressantes, dont voici le résumé. La poudre de charbon, purifiée et précipitée dans l'eau bouillante, est attirée à la surface par les liqueurs spécifiquement plus légères qui se trouvent dessus, telles que l'éther sulfurique, l'esprit de vin etc. mais elle est trainée en bas par huile volatile, plus pésante que l'eau, et celle-ci est alors absolument privée de charbon. C'est ce qui met hors de doute que l'effet du charbon se fait d'après des lois chymiques.

III.

III.

Déscription du Harfang ou de la chouette blanche.

Par *Mr. Sevastianoff*, pag. 334.

Dans cette description du Harfang ou Hibou blanc, l'auteur donne notice des variations, que cet oiseau subit dans les différentes contrées qu'il habite.

IV.

Exposition de quelques expériences docimastiques faites sur les mines de cuivre.

Par *Mr. Severguine*, pag. 342.

Ces expériences ont été faites par la voye séche sur la mine de cuivre rouge, sur la Malachite compacte, sur le cuivre oxydé bleu fibreux, sur la pyrite de cuivre, sur le verd de montagne et le cuivre natif, toutes de différens endroits de la Russie. Quant aux résultats voyez la dissertation, où ils sont présentés d'une manière succincte et précise.

V.

De Myrmecophaga et Mani.

Auctore *N. Ozeretskovski*, pag. 354.

Comparaison des fourmillers, du Pangolin et du Phatagin; ressemblance de ces deux genres; énumeration des especes qui se trouvent au Musée de l'Académie.

VI.

VI. et VII.

De antherarum pulvere.

Auctore *I. T. Koelreuter*, pag. 359.

Ce mémoire contient des recherches estimables sur un point intéressant de la Physiologie végétale, il renferme une richesse distinguée d'observations soigneuses sur la poudre des anthères, et donne des résultats qui, puisés dans la nature, ne sont point fondés sur des hypothèses adoptées, et sous ce point de vue ce traité est digne de l'attention des Botanistes.

VIII.

De analogia aves inter et Mammalia.

Auctore *N. Ozeretskovski*, pag. 399.

Exposition des caractères, par lesquels se ressemblent les animaux quadrupèdes et les oiseaux.

IX.

Experimenta quaedam, acidum salis sedativi acidum spectantia, instituta a

Laurentio de Crell, pag. 402.

L'idée, conçue par l'auteur de ce mémoire, d'avoir des fondemens assez graves, pour présumer la production de l'acide boracique, comme provenant de la décomposition des parties organiques et de la nouvelle recomposition de ces parties, l'a

por-

porté, à ce qu'il dit, à essayer d'en faire l'analyse. — C'est ce qu'il a fait moyennant la distillation avec l'acide muriatique oxygené. Après en avoir décrit en détail les expériences, sa maniere d'y procéder, et le phénomènes, dont elles étoient accompagnées, il vient à l' exposition de celles qu'il a faites en traitant cet acide tout seul par le feu. Conformement à ces dernières l'acide boracique, qu'on a cru être un acide extrèmement fixe, se décompose au feu sans aucune addition, se boursoufle avec véhémence, brûle en partie et se charbonne, et laisse échapper un fluide acide. L'auteur pense, suivant l'examen chymique quil en a fait, que l'acide, dont le fluide mentioné fut impregné, n'est ni l'acide boracique, ni muriatique, ni même sebacique. Cependant il est porté à croire, que la différence qu'il a observée entre cet acide et l'un ou l'autre des acides ci-devant nommés, ne provient peut-être d'autre chose, que d'une différence très peu sensible, qui existe entre eux, à l'égard des parties constituantes ou la proportion de ces parties, — en avouant franchement, que tout cela exige encore des expériences ultérieures et plus exactes.

X.

Observationes nonnullae circa commune cupri et stanni cum acido muriatoso connubium.

Auctore *T. Lowitz*, pag. 428.

En examinant un mélange de cuivre, d'étain, de zinc et de plomb Mr. Lowitz y observa trois différentes réunions de cuivre, d'étain et d'acide muriatique, également caracteristiques par les phénoménes qui s'y présentent dans l'état de solution, que

que par la forme de leurs crystaux et par l'effet produit sur eux par l'eau, l'air, l'acide nitrique et l'ammoniaque, mais particulièrement remarquables parcequ' elles ne sont ni colorées ni dissolubles dans l'eau.

XI.

Methodi novae Kali borussicum, barytae ope, ab, adhaerente eidem, acido sulphurico depurandi, expositio.

Auctore *T. Lowitz*, pag. 431.

La séparation du fer et de l'acide sulphurique d'avec le prussiate de potasse a, comme on sait, beaucoup occupé les Chymistes, mais malgré tous les soins qu'ils ont mis à leurs recherches, toutes les méthodes employées jusqu ici pour y parvenir, étoient ou insuffisantes ou demandoient trop de tems et de moyens.

Voici celle de feu Mr. Lowitz. Pour ôter l'acide sulphurique du Prussiate de potasse il employoit la solution de la potasse caustique dans l'esprit de vin le plus rectifié, pour décomposer le prussiate de fer, et l'effectuoit simplement en remuant ce melange, sans l'influence de la chaleur; où il séparoit l'acide sulfurique du prussiate de potasse par le moyen de l'acétate de baryte.

XII.

XII.

Nouvelles observations sur les pierres de roches aggrégées.

Par *Mr. Severguine*, pag. 435.

L'auteur poursuit ici ses observations sur les pierres de roche aggrégées, sur lesquelles il a dejà fourni plusieurs dissertations à l'Académie. La présente contient un apperçu d'un voyage qu'il a fait dans la Lithuanie et puis à Moscou. Il y discute sur les pierres aggrégées roulées qu'il a eu occasion d'observer pendant sa route. Il insiste entre autres sur le passage de quelques granites en Agathe, fait sur lequel il a trouvé des preuves très convainquantes dans les granites roulés de la Lithuanie.

XIII.

De Viburno Opulo.

Auctore *N. Ozeretskovski*, pag. 452.

Description des usages tant alimentaires que médicinaux de l'aubier et de son efficacité dans la guérison des éruptions cutanées.

XIV.

Proteae, plantae generis, species novae, descriptae

a *C. P. Thunberg*, pag. 458.

Le celèbre auteur de ce mémoire a donné une Monographie de ce genre (*Dissert. de Protea.* Upsal. 1781). Il dé-

crit ici, avec la plus grande précision, les espèces suivantes: *Pr. candicans, erecta, villosa, odorata, hirsuta, obtusa, virgata, truncata, ciliata, tenuifolia, pyramidalis, verticillata, macrocephala, laurifolia, reticulata, scabrida, daphnoides.*

Tous les ouvrages de Mr. Thunberg renferment une foule d'observations intéressantes et contiennent les descriptions d'un grand nombre d'espèces nouvelles.

XV.

Commentatio botanica in genus Ziziphora dictum.

Auctore *I. A. Rudolph*, pag. 468.

Cette première Section ne contient qu'une critique étymologique de ce genre, les sections suivantes, qu'on n'a pû y joindre, parceque les gravures n'en étoient pas achevées, contiendront en partie de nouvelles espèces, ou des preuves que le genre *Ziziphora* et *Cunila* font un seul et même genre.

XVI.

Commentatio anatomica abortus humani rarissimi descriptionem ac delineationem sistens.

Auctore *P. Zagorsky*, pag. 473.

Mr. Zagorsky donne dans ce mémoire la déscription anatomique d'un foetus monstrueux humain qu'il a eu l'occasion de disséquer et qui appartient aux jeux de la nature les plus rares, non

non seulement à cause de la difformité remarquable du corps, mais aussi principalement à cause du défaut total de plusieurs organes : la tête, les extrémités supérieures, quant aux parties externes ; quant aux viscères : les poumons, le coeur, le ventricule, la rate, manquoient absolument à cet avorton. Les planches apartenant à cette déscription représentent le monstre entier et les parties qui s'écartent de la voye naturelle.

XVII.

Sur un mélange granitique particulier de Finnlande.

Par *Mr. Severguine*, pag. 483.

L'auteur décrit une substance particulière qu'il a remarquée dans les granites de Finnlande. Il y a trouvé quelques ressemblances avec la Diallage du celèbre Haüy, dont elle se distingue cépendant par quelques caractères qui lui sont propres. L'auteur a crû devoir la désigner par un nom particulier, et notamment par celui de Lotalalite, ou plutôt en l'abrégeant: Lotalite, du lieu de son gissement en Finnlande. Elle se trouve orginairement mélangée avec le Feldspath, le Quarz et le Mica dans les granites de ce pays.

CLASSE D'ASTRONOMIE
ET
DE MÉTÉOROLOGIE.

I.

Observations de l'éclipse de soleil le 11 Fevrier, et de celle des Pléïades le 12 Avril, faites à l'observatoire de l'Académie en 1804.

Par *Mr. Schubert*, pag. 493.

L'éclipse solaire fut presque totale à St. Pétersbourg, sa plus *grande phase* étant de 11 doigts 6 min. Le *commencement* fut observé à $1^h\ 15'\ 6''$, 781; la *fin* à $3^h\ 35'\ 33''$, 167 tems moyen. Les observateurs, Mrs. Schubert et Wisnievski, mesurèrent plus de 30 phases, avec un héliomètre de Short, dont Mr. Schubert a calculé seize. L'observation de la fin n'est sûre qu'à 2 ou 3 secondes près, à cause de la fumée d'une cheminée voisine, qui couvrait le soleil de tems en tems. Mr. Schubert ayant calculé les observations du commencement, de la fin, et des phases de cette eclipse, et les ayant comparées à celles de Gotha, trouve l'erreur des tables lunaires de Mr. Lalande, en longitude $= + 0''$, 72; en latitude $= - 3''$, 2; celle des tables solaires de Mr. de Zach $= + 22''$, 43; et la différence des méridiens de St. Pétersbourg et de Gotha $= 1^h\ 18'\ 20''$ ou $23''$, la fin n'étant pas tout-à-fait sûre: ce qui donne la différence des méridiens de St. Pétersbourg et de Paris $= 1^h\ 51'\ 55''$ ou $58''$. Le mémoire contient le detail de ce calcul.

Le

Le 12 Avril, Mrs. Schubert et Wisnievski observèrent douze immersions et deux émersions des Pléïades, dont Mr. Schubert donne, dans ce mémoire, le calcul de sept immersions et d'une émersion. Mais il n'en a pu tirer de résultat, parce-qu'aucune observation correspondante de ce phénomène n'était venue à sa connoissance.

II.

Animadversiones de methodo determinandi locum Cometae ope projectionis.

Auctore *F. T. Schubert*, pag. 507.

Les astronomes qui s'occupent à calculer des orbites de comètes, n'ignorent pas l'utilité d'une méthode graphique, par laquelle on peut trouver à-peu-près les élémens, avant que d'entrer dans le calcul analytique, pour donner à ces élémens toute l'exactitude possible. La méthode graphique exige que l'orbite de la comète, projettée d'après les élémens adoptés, soit divisée en jours et en heures etc. Or, comme dans ce premier calcul, l'orbite peut être supposée parabolique, le 22 problème du 1 livre des *Princ. Phil. Math*, de Newton, en vertu duquel le centre du cercle mené par le périhelie, le soleil, et la comète, avance dans la ligne droite qui coupe perpendiculairement la distance périhélie par le milieu, d'un mouvement uniforme — ce problème, dis-je, donne une méthode fort simple, de diviser l'orbite, en partageant cette ligne droite en parties égales, comme une echelle ordinaire. Mr Schubert, après avoir donné la démonstation de ce beau théorème, cherche par le calcul, quelles corrections il faudrait employer, pour appliquer une semblable méthode à l'ellipse et à l'hyperbole.

III.

III.

Détermination de la latitude et de la longitude de quelques endroits de l'Empire Russe.

Par *Mr. Schubert*, pag. 516.

Sa Majeste l'Empéreur ayant daigné charger Mr. l'Académicien Schubert, de mettre quelques Officiers de Sa suite en état de vérifier et d'orienter les cartes geographiques par des observations astronomiques, en leur donnant des leçons, et leur fournissant les instrumens nécessaires, plusieurs de ces officiers viennent de faire, dans différentes provinces de la Russie, des observations intéressantes pour la géographie de ce vaste empire. Les Lieutenans Thesleff et Schubert furent envoyes à Polotzk, pour observer la grande eclipse de soleil le $\frac{30 \text{ Janv.}}{11 \text{ Févr.}}$ 1804, et ensuite à Archangel. Ils ont fait environ 5000 observations, et Mr. l'Académicien Schubert a calculé ces observations dont il donne les résultats dans ce mémoire. Les voici:

	Latitude	Longitude par rapport au méridien de Paris	
		en tems	en degrés
Polotzk	55°. 28′. 55″,7.	1^h. 45′. 51″.	26°. 27′. 45″.
Archangel	64. 31. 40.	2. 32. 30.	38. 7. 30.
Onéga	63. 53. 36.	2 22. 14.	35. 33. 30.
Powenetz	62. 50. 40.	2. 9. 26,3.	32. 21. 35.
Wytegra	61. 0. 16.	2. 15. 41.	33. 55. 15.
Wosnesénie	61. 0. 41,9.	2. 12. 1.	33. 0. 15.
Nicolsk	60. 31. 39,6.	2. 1. 2,5.	30. 15 37.

Plus de cent observations de la hauteur du soleil, que Mr. Brückner a faites à Riga, et qu'il a envoyées à Mr. Schubert, donnent la latitude de cette ville = 56° 57′ 0″.

IV.

IV.

Observationes Veneris et Saturni, habitae in specula Academiae Scientiarum Imperialis a V. Wisnievski, pag. 524.

Les observations qui sont exposées ici, ont été faites à la Lunette méridienne de Ramsden et au quart-de-cercle mural de Bird. Mr. Wisniewski a tiré de ces observations les résultats suivans: L'opposition de Saturne est arrivé le $\frac{8}{20}$ Mars 1804. a $14^h 46' 59'', 6$. t. m., Saturne ayant $6^s\ 0^\circ\ 13'\ 29, 26$ de longitude vraie comptée de l'équinoxe moyen et $2^\circ\ 35'\ 14, 2$ de latitude géocentrique boréale. Correction des tables solaires $= -11'', 0$ et de celles de Saturne $= -21''$ en longitude et $= -9'', 7$ en latitude.

Correction des tables de Venus vers le tems de la plus grande digression orientale arrivée le $\frac{14}{26}$ May 1804. $= -0'', 2$ en longitude et $-8'', 9$ en latitude.

V.

Observationes Cereris, Palladis, Junonis, Saturni Uranique, habitae in specula Academiae Scientiarum Imperialis.

A V. *Wisnievski*, pag. 533.

Les observations que Mr. l'Adjoint Wisnievski présente ici ont été faites selon la même méthode, et avec les mêmes instrumens, que les précédentes No. III. Les Positions du Soleil, de Saturne et d'Uranus ont été déduites des tables de Delambre, les positions de Ceres, Pallas et Junon ont été computées d'après les élémens de Mr. le Docteur Gauſs.

VI.

VI.

Extraits des observations météorologiques faites à St. Pétersbourg en 1799.

Par *Mr. Euler*, pag. 550.

La plus grande hauteur du Baromètre en Mars 29″,96.
- - - petite - - - - - - - - en Nov. 27, 31.
Le plus grand froid le 16 Fevrier de 206 Dégres de Delile.
La plus grande chaleur le 3 Juillet de 105 - - - - -
Il a gelé continuellement en 112 jours.
Il n'a gelé point du tout en 214 —
Le nombre des jours parfaitement sereins 68
- - - - - - - à nuages - - - 183
- - - - - - - à ciel couvert - - 114
Brouillards en 75 jours, pluye en 123 jours, neige en 50 jours, grèle 3 jours, orages 12, aurole boréale 1, parhélies 2. La Neva a été couverte de glaces 146 jours.

VII.

Extraits parallèles des observations météorologiques faites à St. Pétersbourg et à Moscou en 1800.

Par *Mrs. Euler* et *Inokhodzoff*, pag. 565.

Cet extrait, qui a été commencé par feu Mr. I A. Euler et achevé par Mr. Inokhodzoff, contient à la fin un sommaire de ces observations, fait par le dernier, ce qui nous dispense d'en donner ici les principaux résultats. Le lecteur curieux de les connoître, les trouvera aux pages 589 et 590.

SUP-

SUPPLÉMENT.

REFLEXIONS

sur l'état de la Statistique en Russie et sur la Nature de la Statistique en general, servans d'Introduction à la Description statistique des Salines de la Russie et à l'Histoire de l'Administration du Commerce des Sels.

PAR

CHARLES THEODORE HERRMANN.

Présenté à la Conférence le 8 Janvier 1806.

Le Voile mystérieux qui couvroit l'Intérieur de la Russie commence à se dérouler. La publicité que plusieurs Ministres donnent aux Actes de leur ministere (*), la facilité avec laquelle on accorde aux savans des pieces authentiques pour des ouvrages statistiques, et avant tout, les sentimens paternels de S. M. l'Empéreur (**), font dâter du regne d'Alexandre, qui fait

I. Reflexions sur l'état de la Statistique en Russie.

1. Publicité sous le regne actuel.

(*) Le Ministre de l'Intérieur, le Comte Kotschubei, publie ses Compte-rendus et donne un Journal ministeriel. Le Ministre du Commerce, le Comte Rumanzow, donne annuellement le tableau du commerce de la Russie. Le Ministre de l'Instruction publique, le Comte Sawadowski, donne un journal qui contient les actes de ce Département. Le Ministre de la Marine publie un almanac de la Marine et donne un journal à l'Amirauté. Enfin tous les Rapports remarquables paroissent dans la gazette de Pétersbourg.

(**) Voyez: Tableau du commerce de la Russie, 1802. Preface: Quand le Souverain est le Pere de ses sujets, *quel Secret* auroit-il pour ses enfans? —. Sa Majesté *a permis* de rendre ces tableaux publics — Et le Tableau de 1803: C'est en suivant *le chemin tracé par la main de S. M. même*

fait époque à tant d'égards, *l'Age d'or de la Statistique en Russie.* Le savant appellé par sa charge (*) à faire connoitre la Russie, seroit indigne de cette fonction honorable, s'il ne saisissoit ces momens précieux, pour tracer un tableau fidele et fini du plus grand des Empires de l'Europe. Le gouvernement l'appelle, les archives lui sont ouverts, et la posterité le jugera.

2. Mystère sous les regnes precédans.

Quelles etoient les sources d'où nos prédecesseurs puisoient? — Les archives leurs etoient fermés (**), sans l'Autorité Souveraine il étoit impossible d'avoir les moindres renseignemens d'une Chancellerie (***). Combien y a-t-il eu de savans qui ont jouis de cette protection particuliere? — Et même ceux-ci avoient quelque fois raison de se plaindre de la malveillance des subalternes (****)! — Donc il restoit aux savans qui faisoient

---

même que le Chef du commerce soumet ces tableaux à la connoissance du public. — On a *commencé sous le regne de S. M. l'Empéreur* à rassembler ces tableaux et à les rendre publics.

(*) Les places fondées par S. M. l'Empéreur pour la Statistique sont: à l'Académie des Sciences, à toutes les Universites, à l'Institut paedagogique de St. Pétersbourg et à tous les Gymnases.

(**) V. Tableau du commerce, l'an 1802. Preface: Ces notices étoient consacrées au *mystère*, et là même où elles étoient conservées elles, ne donnoient aucun résultat clair, n'étant pas redigées d'après un ordre systematique. — Les tableaux concernant le commerce étoient *mystère.* — Il en étoit de même sur les autres parties.

(***) Quiconque osoit communiquer un papier d'une Chancellerie risquoit non seulement de perdre sa place, mais encore d'être puni.

(****) Un savant de la plus grande réputation eut cette protection. On lui communiqua les extraits qu'il demandoit, il en fit usage dans ses écrits, mais quel fut son chagrin, quand il sut après que ces extraits avoient été composés à la Chancellèrie pour lui cacher l'état effectif des choses.

soient des recherches statistiques que les actes publics que le Gouvernement faisoit imprimer, les renseignemens que des particuliers bien ou mal instruits pouvoient et ôsoient leur communiquer, enfin les observations qu'ils avoient occasion de faire pendant leurs voyages. Toutes ces sources sont ou moins abondantes ou moins pures que celles d'où l'homme d'état puise ses connoissances statistiques. A quelles erreurs le savant devroit-il necessairement être exposé dans ses tableaux et dans ses raisonnemens, puisque les details, les dates intermédiaires lui manquoient ordinairement. Encore avec quelle circonspection le savant devoit-il travailler sur ces notices imparfaites! — En un mot, la Statistique de l'homme-de-lettres differoit beaucoup en Russie de celle de l'homme-d'état, qui devoit quelquefois sourire en lisant les ouvrages statistiques, que le premier ne pouvoit donner mieux. Et pourtant, il est étonnant que malgré toutes ces difficultés et avec si peu de moyens, on ait pu rassembler tant de dates qui se trouvent avérées.

La Statistique est la déscription véridique de l'état, faite avec un esprit philosophique qui sait démêler ce qui est important, propre à donner des résultats intéressans. Elle ne va donc pas au-delà de ses materiaux. Si le Gouvernement a ses raisons pour les lui refuser elle n'existera pas, mais sa place ne restera par vuide, elle sera occupée par *un fantôme*, que le public, curieux de renseignemens statistiques — qui ont passés même jusque dans nos almanacs — prendra pour la science. Malheureusement le ridicule que l'homme-d'état trouve dans le fantôme, retombera sur la plus intéressante des connoissances pour tous ceux qui aiment leur patrie. La Mysticité politique a pris naissance chez les peuples barbares où une voix surnaturelle doit

3. Effets du Mystère.

doit remplacer la voix de la raison, elle a été accueillie par les états foibles, qui disputent leur existence précaire aux dangers éminens qui les environnent, elle a été perfectionnée sous les Gouvernemens perdus par les erreurs des Siècles passés et elle a été generalement reçue en Europe par la force de l'exemple. Mais elle ne convient plus au Gouvernement dès que les progrès des lumières deviennent sensibles parmi la nation, car elle detruit le patriotisme raisonné, elle sême la défiance elle protêge et elle propage les chimeres des mal-intentionnés, elle voudroit vainement arreter le cours de la lumiere quand ses rayons ont percés la nuit des tenebres, elle ôte aux démarches du Gouvernement cette noble franchise qui accompagne la veritable grandeur et elle est en contradiction avec le regne de la Loi.

4. Des secrets d'état.

Les *Secrets d'Etat* — chaque particulier a les siens — sont en très petit nombre dans les états eclairés sur leurs veritables intérets, et ne le sont ordinairement que pour le moment. La Statistique est trop modeste pour vouloir les pénétrer, *elle prétend être utile à l'Etat* en fixant l'opinion publique, qui se divergue necessairement par le mystère et ne se règle que sur la confiance que des tableaux veridiques inspirent; elle fait l'eloge d'un bon Gouvernement de la manière la moins suspecte: en nombres; elle facilite aux hommes d'état les calculs pénibles; elle designe les parties qui languissent et les forces qu'on n'a pas encore employé, et c'est ainsi que la Statistique prétend servir l'etat et pas lui déplaire par des indiscretions. Elle n'ira jamais au delà des materiaux que le Gouvernement voudra bien lui accorder, et un Gouvernement qui ne peut que gagner à être mieux connu, lui en fournira assez, pour pouvoir tracer un tableau fidèle. S'il arriveroit enfin que les circonstances rendoient quelques lacunes necessaires, la Statistique sera assez franche pour declarer son ignorance sur ces articles.

Mais

Mais *quel est le prix veritable des materiaux que le Gouvernement peut fournir au savant?* — Le Gouvernement ne sauroit donner que les renseignemens qu'il a reçu lui même des personnes en fonction. Ceux-ci se servent pour composer leurs tableaux statistiques, de gens qui manquent souvent de connoissances, de pénetration, de bonne volonté. On a avoué ce fait en Prusse (*), où l'on se pique de la plus grande exactitude, et où les lumieres sont très répandues, on ne le niera pas en Russie, pourvû qu'on soit instruit des détails et qu'on voudra parler avec franchise (**). Donc les renseignemens que le Gouvernement peut com-

5. Du prix veritable des materiaux que le Gouvernement peut donner.

(*) La gazette literaire, nommée *Allgemeine Literatur-Zeitung*, qui paroit à Halle en Prusse, dit (Nombre 265 le 7 Octobre, 1805, pag. 45.). Quand on sait, comment se font la plûpart des tableaux présentés aux Chambres, avec quelle insouciance et avec quelle négligence on y agit, que les nouveaux tableaux sont en grande partie copiés sur les anciens, et changés au hazard, pour ne pas paroitre absolument les mêmes, que la plûpart de ces tableaux ne sont pas estimés mêmes des tribunaux suprêmes, et que parconsequent les places sécondaires sont portées à n'y mettre aucun soin, sachant que leur travail sera enfoui dans la masse (unter den schon vorhandenen Wust): on doit se méfier des dates tirées de ces tableaux. — L'auteur de cette feuille assure qu'un Pasteur avoit mis par mégarde le nombre des mariés sous la rubrique des nouveau-nés sans que cette grosse faute fut remarquée — Mais il faut lire toute cette feuille qui est des plus remarquables pour la Critique des tableaux statistiques en Prusse.

(**) Le Comte Kotschubei dit dans son Compte-rendu de 1803. pag. 158, qu'aiant demandé des descriptions statistiques aux Gouverneurs, plusieurs ont repondu avec précision. mais la difficulté et le peu d'usage (Необыкновенносшь) dans ce genre de travail, le manque de renseignemens sur plusieurs articles dans les Gouvernemens mêmes, ont fait qu'en général ce travail n'a pas encore cette perfection et cette précision, qu'on devroit lui souhaiter.

muniquer au savant n'auroient-ils aucun prix? — Où en prendre de plus véridiques? S'il existe une vérité statistique, elle doit se trouver dans ces papiers. Mais quel est ce genre de vérité? — Elle n'est pas absolue pour les nombres pris séparement, tout raisonnement fondé sur les calculs d'une année manque d'évidence, mais elle est absolue dans la comparaison d'une longue suite de nombres de la même classe. En supposant partout la même ignorance, la même negligence de la part des redacteurs: la différence marquée qui résulte de la comparaison de dix à vingt années est une vérité statistique absolue, qui donne des résultats nets, contre lesquels l'esprit le plus sceptique ne sauroit former des doutes raisonnables.

Encore ne faut-il pas outrer ces fautes commises par les subalternes. Si elles sont trop évidentes, elles donnent lieu à des révisions. Enfin l'esprit calculateur de la Statistique contre lequel on ne sauroit déclamer, que pour dire quelque chose d'extraordinaire, qui éblouit les ignorans et charme les paresseux, l'esprit de calcul se repand de plus en plus en Europe. On sent depuis le Portugal jusqu'en Russie l'importance de ces calculs (*). C'est des résultats du calcul statistique que l'éco-no-

(*) Le Compte-rendu de 1803 du Ministre de l'Intérieur contient pag. 157, tout un chapitre intutilé: des notices statistiques. Comme ce chapitre est très remarquable pour l'Histoire de la Statistique en Russie et sert à faire connoitre l'état actuel où se trouve cette science dans cet Empire nous le donnerons en entier:

,, Dabord à la premiere organisation du Département du Ministre de l'Interieur on a déjà reconnu l'utilité et la necessité d'avoir dans ce Département des notices sur l'état actuel de chaque Gouvernement, aussi

nomie politique, dont on commence à reconnoitre l'importance, tire son origine, et ces calculs, même dans leur imperfection, forment le seul argument décisif dans les questions douteuses de

---

aussi parfaites que possible. Outre la facilité que ces notices donnent pour les affaires courantes en général, où le cas arrive tous les jours qu'il faut connoitre par exemple, l'état de la population d'un district, le nombre et la qualité de ses habitans, le plan d'une ville ou d'un édifice public, le genre d'industrie etc. on avoit le dessein que ces notices augmentées et perfectionnées de tems en tems, serviroient un jour de materiaux très utiles pour la composition d'une *Statistique* générale.

Pour cette fin on a dabord envoyé des ordres à tous les Chefs de Gouvernemens, en marquant les objets sur lesquels ils devoient donner des notices statistiques.

Beaucoup de Gouverneurs ont repondu à ces demandes avec assez de précision, mais la difficulté et le peu d'usage dans ce genre de travail, le manque de renseignemens sur plusieurs articles dans les Gouvernemens mêmes, ont fait qu'en général ce travail n a pas encore cette perfection et cette precision qu'on devroit lui souhaiter. Malgrè tout cela ce premier essai fait esperer avec raison qu'on pourra parvenir a un plus haut degré d'exactitude et d'uniformité par l'indication plus détaillée des matieres, par des remarques sur les objets qui manquent encore et qu'on a passé la premiere fois, en distribuant des tableaux, et par le zêle des personnes chargées à les remplir, et qu'on pourra ainsi s'approcher du but proposé.

En attendant, ces notices statistiques, même telles qu'elles sont, ont déja été d'une utilité marquée en beaucoup d'occasions pour les affaires courantes. Souvent des circonstances locales, qu'on n'auroit pû savoir ou vérifier autrement qu'en perdant beaucoup de tems à écrire

de l'économie politique, où le génie s'égare si facilement en probabilités (*). La France et la Prusse ont des Bureaux de statistique auxquels les départemens doivent répondre et desquels le Gouvernement demande des renseignemens.

Il

écrire de part et d'autre, furent eclaircies au premier coup d'oeil jetté sur la carte du district, sur le plan de la ville, sur les notices statistiques de la population, du genre d'industrie, etc."

(*) Il y a des auteurs qui ont de la reputation en économie politique et qui ne font pas grand cas des calculs statistiques, les uns croians deduire les principes de leur science de notions générales et de verités prouvées par l'expérience de tous les siecles, les autres convaincus de l'utilité de ces calculs, mais doutans de leur précision. Les notions générales sont le resultat des données individuelles et l'économie politique n'est rien autre chose que la philosophie de la statistique. L'économie politique a une partie formelle ou générale qu'elle tient de la nature de l'esprit humain et de la nature inalterable des objets tels que nous les appercevons, et une partie materielle qu'elle tient de la statistique. Celle-ci ne sauroit se passer de ces tableaux et de ces calculs, donc ces calculs si recriés ont une influence directe sur les principes de l'économie politique. Quant à la possibilité de leur perfection, elle dépend en grande partie du Gouvernement. Si les tableaux que les subalternes doivent remplir sont parfaits, et ils peuvent l'être puisqu'ils doivent être faits d'après les principes d'une théorie philosophique, et si le Gouvernement attache du prix à des notices exactes, les fait revoir soigneusement et reprend ceux qui se negligent, ces tableaux statistiques, parviendront à un haut degré de perfection qui suffira assurement pour l'usage ordinaire dans les Departemens, pour l'economie politique et pour l'instruction publique. Pourquoi s'obstiner à ne vouloir deduire la verité que d'un principe quand elle découle de plusieurs sources! Si le legislateur veut donner une

loi

Il resulte delà que les materiaux que le Gouvernement peut fournir au savant ont un grand prix, aucune des autres sources sauroit les remplacer. Mais le savant doit savoir en faire usage, il doit avoir le talent de rectifier ces materiaux, l'art de les rediger et la ferme resolution de ne dire que la verité. *Critique*, *Ordre et Verité* sont les qualités indispensables du statisticien. 6 devoirs du statisticien.

Le Statisticien qui a le bonheur de travailler sur des materiaux fournis par le Gouvernement doit connoitre la maniere comment ces tableaux statistiques sont composés, il doit savoir quelle classe des employés de l'Etat s'occupe à rassembler les materiaux, quel interet ceux qu'ils doivent interroger peuvent avoir pour dire la verité ou ponr la cacher, quelle perfection les tableaux distribués pour être remplis ont d'après les principes de la theorie, quel prix le Gouvernement met à l'exactitude de ces rapports, et c'est d'après cela qu'il doit apprècier le degré de croiance que les tableaux communiqués par l'Etat meritent. Convaincu que les dates d'une seule année ne décident rien il doit chercher la verité statistique dans les nombres moiens d'une suite d'années. Et c'est alors qu'il remarquera

loi salutaire il doit dabord consulter la théorie, ces loix immuables de la nature, ces verités générales, fruit d'une longue experience, puis le statisticien qui lui donnera l'état actuel avec tous les détails et des notices historiques sur le passé, enfin des personnes qui rectifieront sur les lieux mêmes les dates statistiques, qui au plus haut degré de leur perfection possible auront toujours besoin d'une pareille revision, puisque l'état des chôses change à tout moment.

quera des inegalités, des contradictions parmis lesquels il est difficile de démeler la verité. Il faut recourir à d'autres tableaux dont les resultats peuvent eclaircir celui qui paroit faux. Cette comparaison est necessaire même pour les tableaux qui ne paroissent pas douteux et ce n'est donc qu'après *une critique sévere*, qu'après un travail penible et enuieux qu'on peut esperer de parvenir enfin à decouvrir la vérite statistique.

Ce premier travail sur les materiaux mêmes doit encore être perfectionné par des renseignemens tirés des sources auxilaires. Le statisticien qui ne vit pas toujours dans l'enceinte etroite de son Cabinet, mais qui recherche la societé des personnes qui ont servi longtems dans un Departement et qui ont quelquefois une grande experience sans se douter des principes de la theorie, peut avoir des renseignemens très veridiques dans un siecle ou l'on ne craint pas jusqu'à ses amis; le grand art est de savoir faire les questions et de savoir apprècier les reponses. Encore faudra t-il consulter plusieurs sur le même objet et la verité paroitra.

Enfin les observations faites par des voyageurs étrangers serviront aussi à rectifier les dates suspectes. Il y a souvent une très grande différence entre l'etat des choses tel qu'il doit être et entre l'etat effectif. Ce qu'on trouve dans les Chancelleries ne dit ordinairement que ce qui devroit se faire, le voyageur independant nous dit souvent ce qui est. Même la maniere de voir les choses différe quelquefois entre les personnes nés dans le païs et les etrangers, et cette différente maniere de voir peut donner des idées interessantes sur les materiaux que le Gouvernement peut fournir.

Ces

Ces materiaux precieux epurés et rectifiés — pas par des informations réiterees de la part du Gouvernement, prétention exagerée et inutile, exagerée, vu le nombre d'affaires qui accablent les Gouverneurs, et les peines infinies qu'il leur coute de ne rassembler que les premiers materiaux, inutile, parceque les mêmes fautes se retrouveroient sous d'autres rapports — mais par une critique severe, par une comparaison exacte, par le secours des sources auxiliaires, doivent encore être *redigés.* Comment? — Le Secretaire d'une Chancellerie est obligé d'inserer les rapports qui lui viennent selon les formes prescrites. Ces formes sont ordinairement imparfaites, adoptées depuis bien du tems, faites par des personnes qui ne conoissoient que la marche ordinaire des affaires, étrangers aux principes de l'economie politique et qui parconsequent ne pouvoient pas faire ressortir du tableau général ce qu'il y a de plus interessant. Le savant seul jouit de toute la liberté de ranger ses materiaux d'après un ordre philosophique.

Pour qui fait-il ce travail statistique? Pour l'homme d'état, *ut se ipsam nosset respublica!* Il doit donc savoir ce qui peut être le plus interessant pour l'homme d'état. Il ne le sauroit, s'il ne connoit pas les principes de l'économie politique. C'est elle qui montre comment la richesse nationale s'aquiert et se distribue, c'est elle qui fait connoitre les moiens de l'augmenter en suivant l'ordre de la nature, et les dangers à faire pousser les plantes dans la serre, c'est elle qui prouve par ses derniers resultats que le bonheur des Gouvernans est essentiellement uni au bonheur des Gouvernés. En developpant les sources premieres de ce bonheur national le statisticien doit consulter la nature de l'homme, la philosophie sur son état primitif,

primitif, l'origine des états d'après l'histoire et pas d'après l'ideal philosophique, en un mot, le statisticien doit rediger les materiaux epurés d'après la théorie de la statistique. Cette théorie a une partie générale qui traite de la nature, des bornes, des parties essentielles, des sources et de l'utilité de la statistique, et une partie speciale qui fait des recherches sur les differentes manieres de traiter chaque partie de la statistique pour determiner celle qui donne les resultats les plus surs. La statistique ne date, comme science systematique, que depuis 1749, les premiers essais de théorie générale datent depuis 1800, et la théorie speciale, peut-être la partie la plus interessante, n'est pas encore écrite. Le bon sens et le genie doivent guider le statisticien tant que sa théorie n'est pas parfaite, le premier est un sentiment obscur, le second une faculté de l'esprit qui voudroit toujours devancer l'experience, donc ces deux guides mènent souvent en erreur.

L'esprit du tems a toujours eu la plus grande influence sur la redaction des matieres statistiques.

I. La force armée et l'état des finances interessoient sur tout le Gouvernement, et ces forces de l'etat, considerées comme sources uniques de sa grandeur et de sa puissance furent le premier objet des recherches statistiques depuis Ciceron jusqu'en 1678.

II. Le droit public et les recherches politiques venant de prédominer en Europe, l'organisation politique de l'état étoit la matiere favorite de la statistique, elle étoit: scientia quae versatur in perspiciendis rationibus quibus civitates gubernantur.

L'état

L'état des Gouvernans étoit pris pour la description de l'état en général. Cette statistique du moien âge dominoit surtout en Allemagne.

III. Ce n'est que depuis peu que les modernes, eclairés par l'economie politique commencent à juger des ouvrages statistiques d'après les principes de cette science. Les statisticiens s'etoient trop attachés à l'état des gouvernans et trop peu à l'état des gouvernés ou de la nation. En parlant de la richesse nationale ils l'ont envisagés selon les principes du systéme mercantil, ce qui a donné lieu à un grand nombre de calculs erronés; enfin l'histoire et la géographie, la physique et la minéralogie, le droit de gens et la politique se trouvent melés dans ces ouvrages statistiques, faute d'une bonne théorie. C'est elle qui fait prevoir une revolution prochaine et heureuse dans la statistique. Combien d'auteurs statistiques de haute reputation ne voudroient refondre leurs ouvrages estimés à juste titre, d'après les principes de l'economie politique et d'une meilleure théorie! —

C'est ainsi que le travail statistique du Sécretaire d'une Chancellerie différe essentiellement du travail du statisticien. Le Gouvernement qui met du prix aux connoissances statistiques doit avoir pour les affaires courantes des personnes du premier ordre, mais outre cela des personnes instruites de la seconde classe. Il doit être interessant, même pour l'homme d'état, de voir comment le savant traite le même objet tout autrement que l'employé dans les affaires, de voir les effets heureux du genie, de l'instruction et de la liberté.

Le Gouvernement qui a des statistiques, puisqu'il les croit utiles, le Gouvernement qui leur fournit les materiaux neces-

cessaires, doit leur accorder aussi cette sage liberté (*), essentielle au travail de l'homme de lettres, et celui-ci ne doit pas s'avilir en trahissant la bonne cause.

Loin de nous ce ton emphatique qui ne sait que louer jusqu'aux moindres démarches du Gouvernement. Il rend suspectes aux contemporains les verités qu'on dit, il devient ridicule à la posterité qui lit dans les introductions aux memoires des ministres l'analyse raisonée des erreurs de ceux qui les ont precedés. La verité présente est une divinité difficile à reconnoitre, ce n'est pas son éclat qui trouble nos yeux, c'est l'intéret du moment qui les obfusque. Mais lorsqu'elle a passée, nous découvrons ses formes majesteuses à travers le nuage des tems qui ne sont plus.

La Statistique ne loue point, elle ne blâme rien, elle trace à grands traits le tableau de l'état. Les louanges et le blâme resultent de ses tableaux. Sa rhétorique consiste en nombres suivis, les passions n'ont aucune influence sur ce langage. C'est par *un amour inalterable pour la verité*, que le savant appellé par son devoir à faire des recherches statistiques et fourni de tous les materiaux que le Gouvernement peut donner doit honorer son siecle et remplir son devoir envers ses contemporains, envers la posterité et surtout envers le gouvernement

---

(*) Il est à remarquer que le siecle de la publicité à succedé au siecle de la mysticité politique en Prusse comme en Russie justement dans la même periode: (v. All. L. Z. l. c.) cet ouvrage prouve *l'esprit eclairé* que anime les tribunaux et la censure en Prusse, puisque non seulement ils ne défendent pas *la liberté de dire son opinion* sur l'organisation de l'interieur, mais puisqu'ils permettent encore de *rendre publiques nombre de dâtes statistiques qui autrefois furent religieusement gardées dans les Archives comme des grands mystères.*

nement, dont le monument le plus précieux: qui seul survivra à la main destructive du tems est une Statistique ecrite avec verité. La posterité etonnée s'écriera avec admiration: quel gouvernement, où il etoit possible de tracer ce tableau! —

D'après ces reflexions qui le trouvera exageré si nous avouerons que tout ce qu'on a ecrit sur la Statistique de la Russie demande une *révision* pour les matieres et seroit susceptible d'un plus haut degré de perfection pour la forme. La Russie a vécu des siecles en peu d'années, la publicité est devenu l'esprit du tems, les principes de l'économie politique viennent d'ête developpés et doivent necessairement changer les tableaux statistiques. Le moment est venu pour faire cette revision. Là où nos resultats seront les mêmes, là nous prouverons que nos prédecesseurs ont eu raison, et nous donnerons le temoignage le plus flateur, le temoignage de la posterite, à leur zele, à leur intelligence, à leur courage, là où il y aura des différences, nous ferons preuve d'avoir vécu dans un siecle plus heureux.

7. De ce qui reste à faire pour la Statistique de la Russie.

La statistique générale doit être le resultat des *descriptions statistiques particulières*. Personne n'en doute en théorie et tout le monde fait le contraire en pratique. Où se trouvent les materiaux pour ces descriptions particulieres? Que faudroit-il pour les rédiger? Les materiaux se trouvent principalement au département du Ministre de l'Interieur et du Ministre des finances, il y en a aussi de fort bons sur différens objets au Depôt des Cartes. La redaction ne sauroit être que le resultat de forces reunies. Cinquante-un Gouvernemens donnent autant de rapports. Les dates d'une année ne decidant rien il faut au moins comparer cinq années, ce qui feroit 255 rapports, chacun de 10 à 12 feuilles, ne contenans presque que des tableaux en nombres qu'il faut rediger, collationner, vérifier de toutes les manieres, la plus legere faute d'un copiste dé-

mande souvent une semaine pour être rectifiée, même quand on a tous les moiens. Avant que ce travail preliminaire ne soit fini, il ne faut point penser à la statistique générale. Un Bureau auroit assez d'ouvrage, et il est difficile de concevoir comment un seul savant pourroit rediger tous ces materiaux pour en tirer des statistiques particulieres dont resulteroit la statistique générale, le plus beau monument d'un gouvernement eclairé d'après le côde des loix.

La richesse et la pauvreté sont des idées relatives. Tant que je ne connoissois que les livres statistiques sur la Russie, j'ai crû qu'on etoit riche en materiaux et qu'il ne faudroit que les rediger d'après une théorie philosophique eclairée par l'economie politique; mais quand j'ai été assez heureux de voir les riches collections à faire dans les Departemens, j'ai bien senti, que malgré tout ce que l'esprit de critique exige encore de ces materiaux, il faudroit recommencer l'ouvrage par une revision totale et que cet ouvrage ne sauroit etre que le resultat des forces reunies (*).

En

(*) L'Académie Impériale de St. Petersbourg concut en 1777 un projet dont l'execution auroit beaucoup facilité le travail qui reste actuellement à faire. Un comité de savans se reunit pour donner une description topographique de l'Empire de Russie. On voit par le prospectus que l'ouvrage devoit avoir trois parties, la premiere devoit contenir la geographie, la seconde l'histoire, la troisieme la statistique. Le plan pour la seconde partie est de Monsieur Stritter, le plan pour la troisieme de Mr. Güldenstaedt le reste de Mr. Pallas. Malheureusement ce plan ne fut pas executé, mais il prouve toujours qu'on a reconnu depuis long tems que la statistique générale de la Russie ne pourroit être ecrite que par une societé de gens de lettres.

En attendant que ce beau moment arrivera, qui fera époque dans l'histoire de la Statistique de l'empire de Russie, je me suis appliqué à faire la description statistique de quelques branches de cet arbre immense. La facilité que j'ai trouvé d'avoir des pieces authentiques n'a pas été l'effet d'une protection particuliere, elle auroit été accordée à tout savant qui l'auroit recherchée, ce n'est pas une faveur, c'est l'esprit du tems. J'ai travaillé sur les actes mêmes et par sur des extraits. Les objets qui m'ont occupés jusqu'apresent sont les salines de la Russie, les manufactures, les bois et forêts, enfin la flotte. Je me propose de déposer les resultats de mes recherches dans les Actes de l'Académie. Ce sera une suite de descriptions statistiques qui fourniront quelques materiaux pour la statistique générale. 8. Introduction à la Description statistique des Salines de la Russie.

J'ai choisi dabord les Salines de la Russie. La consommation étonnante de sel en Russie et qui augmente considerablement chaque année (*), les operations compliquées que le transport exige et qui deviennent tous les ans plus difficiles, les augmentations des prix que la couronne a du faire aux proprietaires des Salines pour les mettre en état de continuer leurs travaux indispensables, les materiaux et la main d'oeuvre étant devenus plus chers, forcent presque le Gouvernement à se désaisir un jour de la Régie de cette branche de la richesse nationale, qu'elle a plusieurs fois administrée dans la vue de soulager le peuple et en sacrifiant dans les derniers tems

*) La Couronne a vendu dans les 32 Gouvernemens où elle s'est reservée le commerce de Sel :

en 1801	— 14,404,166	Pouds	$34\frac{1}{4}$	Livres,	
en 1802	— 14,897,860	—	$8\frac{1}{2}$	—	
en 1803	— 14,990,819	—	35	—	
en 1804	— 15,639,256	—	$11\frac{1}{4}$	—	

tems des millions (*) et qu'elle a autrefois rendue aux marchands sans que la liberté du Commerce des Séls ait produit l'effet désiré. En un mot il est tout aussi onereux pour la couronne de conduire le Commerce des Sels, qu'il est dangereux de l'abandonner entierement aux particuliers. Des circonstances locales font naitre des difficultés qui n'existent pas dans les autres pays. Cet objet est devenu actuellement de la plus grande importance, et S. M. l'Empéreur a nommé une Commission particuliere qui s'occupe actuellement des moyens pour débarasser la Couronne de ce fardeau, sans en charger la nation.

Loin de prétendre à pouvoir developper des vues nouvelles sur un objet qui occupe maintenant les personnes les plus eclairées, je me bornerai à donner:

I. la description statistique des Salines de la Russie,

II. le tableau des Consommations annuelles d'une longue Suite d'années,

III. l'histoire de l'Administration des Sels par la Couronne.

Peut-être que ces recherches donneront quelques résultats interessans, en tout cas, cette partie sera mieux connue par le public et j'aurai rempli ma tache pour la Statistique.

La

(*) C'est depuis 1793 que la Couronne a commencé a perdre sur le Commerce exclusif de Sel. Cette perte montoit en 1793 à 40,000 Roubles en 1804 à 601,461 Roubles 87 Kopeques et la perte totale pendant les onze années est de 3,400,000 Roubles.

II. Sur la Nature, les parties essentielles et les bornes de la Statistique.

La confusion des idées n'étant que trop commune dans une science nouvellement formée, j'ai crû qu'il étoit nécessaire au commencement de ma carriere statistique dans les Actes de l'Académie de m'expliquer sur *la Nature, les parties essentielles* et *les bornes de la Statistique*. Je tacherai d'être court, j'énoncerai simplement mon opinion et je me reserve les preuves et le développement de mes idées pour un autre Mémoire.

1. Definition.

La Statistique *est* la description véridique de l'état.

2. Parties generales et sécondaires.

Tout état est composé de Gouvernans et de Gouvernés, ou, comme nous disons, d'un Gouvernement et d'une nation. La Statistique a donc *deux parties generales*, pas plus, pas moins, savoir la description de l'état de la nation et la description de l'état du Gouvernement. Toutes les *parties secondaires* doivent être rangées sous ces deux titres. Le premier, ou la description de l'état des Gouvernés comprend l'état de la population, de la richesse nationale, et des lumieres dans le sens le plus étendu. Le second ou la description de l'état des Gouvernans parle du Gouvernement, de l'Administration, des forces militaires, des finances et des relations exterieures. Voilà toutes les matieres qui me paroissent appartenir essentiellement à la Statistique.

Premiere remarque sur l'étendue de la Statistique.

Et ces matieres, quoique nous en aïons admis moins que plusieurs auteurs celebres, sont toujours d'une si grande étendue qu'il est difficile d'embrasser d'un coup d'oeil ce vaste tableau. On a eu raison de se borner à *ce qui est important*, c'est a dire, à tout ce qui influe souverainement sur le bien-être des gouvernés et des Gouvernans, on a eu raison puis-

puisqu'on a du se conformer à la foibleſse humaine qui perdroit l'ensemble dans tous ces details et qui ne distingueroit pas toujours ce qui est réellement important, de ce qui ne l'est pas. Mais on a eu tort en faisant de ce qui est important une marque characteristique de ce qui est statistique. Les moindres details, pourvû qu'ils appartiennent à la description de l'état, sont tout aussi statistiques que les notions generales, les dates les plus indifferentes comme les données de la plus haute importance.

Seconde remarque sur les pays dont on ne peut faire la Statistique.

Là, *où il n'y a point d'état*, là il n'y a point de Statistique. Il y a bien de pays où ce genre de Gouvernement n'est pas établi; où les hommes vivent dans une liaison moins étroite et moins reglée. Ces pays ne sont susceptibles que de descriptions géographiques, physiques et historiques.

3 Limites de la Statistique.

Tout ce qui n'appartient pas essentiellement à cette liaison sociale, que nous appellons Etat, n'appartient pas essentiellement à la Statistique. Ce principe decrit *les limites* de cette science d'une maniere invariable.

a) elle differe de la Geographie

Il resulte delà que la Statistique differe de la *Geographie* par son objet. La Géographie decrit le pays, la Statistique l'Etat. Tout ce qui appartient à la Géographie mathematique, physique et politique n'est pas du ressort de la Statistique.

b) de l'Histoire.

Elle differe de *l'Histoire* par la maniere dont elle traite les objets. La Statistique donne l'état des choses tel qu'il est dans un certain espace de tems, pendant lequel cet état de choses n'a pas éprouvé des changemens considerables. Elle exclut

clut donc l'exposition suivie d'une suite d'états et la recherche sur les causes de l'état qu'elle decrit. L'un et l'autre appartiennent exclusivement à l'histoire. Mais la statistique resserrée dans des bornes aussi étroites donne cet état de choses avec un détail incompatible avec l'esprit de l'histoire. C'est ordinairement le tems présent qu'elle decrit, l'état actuel des choses, puisqu'il a le plus grand interet pour les contemporains. Ceci n'exclut pas les statistiques des tems passés, qui se nomment antiquités quand ces tems sont très reculés, mais dire que la statistique est une histoire non-suivie, c'est dire quelque chose qui me paroit moins vrai qu'extraordinaire.

La Statistique differe *de l'Economie politique* et par son objet et par la manière de le traiter. L'économie politique s'occupe des moyens de conserver et d'augmenter la richesse nationale. La Statistique decrit l'état de la richesse nationale qui fait une partie sécondaire de la description de l'état de la nation. Elle n'indique pas ces moyens, elle décrit l'état. L'économie politique embrasse tous les états cultivés, la statistique ne décrit qu'un seul à la fois. S'il existera un jour une statistique universelle, elle ne portera jamais ce titre par l'universalité des dates, qui est impossible, mais par l'assemblage de toutes les statistiques partielles. L'économie politique approuve certains moyens de conserver et d'augmenter la richesse nationale elle en rejette d'autres, la statistique n'approuve rien et ne blame rien, elle trace simplement le tableau de l'état. L'économie politique est le résultat, la philosophie de la statistique, mais il ne faut pas confondre le principe avec le résultat.

c) de l'économie politique.

Elle

d) de la Politique. Elle differe encore plus et par les mêmes raisons qui la separent essentiellement de l'économie politique, de la Politique, ou pour mieux dire *des autres Sciences politiques*, qui indiquent aux Gouvernans la maniere la plus convenable à regler et à régir les affaires de l'état.

4. Dates etrangeres. Mais les fils des connoissances humaines se perdent les uns dans les autres, il est presque impossible de les distinguer dans tous leurs détours. D'un autre coté la foiblesse de l'esprit humain n'est soulagée que par un ordre systematique, il lui faut toujours des limites fortement exprimées, ou il s'égare. Souvent ces bornes posées avec rigueur par la raison ne se retrouvent pas toujours dans la nature, mais elles sont un besoin subjectif de la nature humaine.

On ne sera donc point etonné que la Statistique ne sauroit se dispenser d'emprunter certains details géographiques et historiques, et qu'elle ne sauroit ignorer ce que l'économie politique et les autres Sciences politiques desirent savoir par elle.

rendus statistiques. Mais ces *dates étrangeres, elle les rend statistiques*, elle les envisage sous tout un autre point de vue, et s'approprie, s'identifie pour ainsi dire ce qui appartenoit aux autres Sciences. Et ce n'est pas seulement des Sciences sus-mentionnées que la Statistique doit emprunter des dates, mais de toutes les Sciences en general qui ont de l'influence sur l'état des Gouvernés et des Gouvernans. Elle leur donne un rapport statistique, c'est à dire, elle les considere pas simplement comme des faits ou comme des connoissances, mais sous le rapport de leur influence plus ou moins marquée sur le bien-être de l'état.

Voilà

Voilà mes idées. Les Connoisseurs verons aisement combien je dois à mes prédecesseurs. Je n'aime pas les disputes literaires, mais j'aime la franchise qui n'est pas étonnée de grands noms et qui sert à étendre les limites des connoissances humaines. Il s'agit de la verité.

SUR LES PROPRIÉTÉS DE L'ACIDE CARBONIQUE RÉPRESENTÉ PAR LE FEU,

par rapport au nouveau systême de Chimie de Mr. Winterl.

PAR

ALEXANDRE NICOLAS SCHERER.

Présentée à la Conférence le 22 Janvier 1806.

„Qui opinionibus regitur, considerari potest, uti spectator, qui per vitra colorata objecta contemplatur, nam singula tincta apparent eodem modo, ac vitrum, quod usurpare placet. Leuissimae et maxime hiulcae similitudines, si cum systemate concordant, sufficiunt, immo magni ponderis argumenta praebent, sed gravissimae discrepantiae instar atomorum evanescunt.“

Bergman.

La soi-disante philosophie naturelle (Naturphilosophie des Allemands) a cree une manière d'expliquer tous les phénoménes naturels par un dualisme arbitraire, qui à ce qu'il paroit, n'enthousiasme pas seulement nos jeunes auteurs mais qui même s'est emparé de nos veterans. Pendant qu'on commençoit à s'appercevoir des égarémens des sectateurs de cette philosophie naturelle et à retourner à l'empirisme presque généralement méprisé, pendant qu'on commençoit à voir, que „*raisonner sur la na-*

nature" ne pouvoit pas signifier: créer la nature telle qu'il nous la faut sur le point de vue que nous avons établi nous mêmes — pendant ce tems Mr. le Professeur *Winterl* a Pesth se fit connoitre par un ouvrage, dont le seul titre: „*Prolusiones ad Chemiam seculi decimi noni* *)" devoit exciter le plus grand interêt. Il lui fit succéder bientot un supplément sous le titre: „*Accessiones* **)", et trouva bien vite des commentateurs très complaisants, tels que Mrs. *Oersted* ***), *Kastner* ****) et particuliérement *Schuster* *****).

La vue de Mr. Winterl n'est autre que de renverser comme absolument insufisant le systême de l'immortel *Lavoisier*, et d'établir à sa place le sien, assez modestement dumoins pour un siécle. Sans cependant soumettre le systême de Lavoisier généralement reçu a une critique plus exacte, sans en prouver l'insuffisance par des expériences et argumentations nonéquivoques, sans par consequant prouver la necessité d'un nouveau systême — il va établir *son Dualisme*. Au lieu donc de prouver par ses élémens, que ceux-ci sont les seuls qu'on puisse

---

*) Budae, 1800. 8.

**) Budae, 1803. 8.

***) Voyez son ouvrage sous le titre: „Materialien zu einer Chemie des neunzehnten Jahrhunderts." Erstes Stück, Regensburg 1803. 8.

****) Voyez ces „Materialien zur Erweiterung der Naturkunde." Band 1. Jena, 1805. 8.

*****) Voyez son ouvrage sous le titre: „*I. I. Winterl's* Darstellung der vier Bestandtheile der anorganischen Natur. Aus dem Latein. v. *I. Schuster*, Jena 1804. 8.

puisse adopter, il commence par les consequences qu'il en deduit; sans partir des expériences mêmes propres à convaincre les savans de l'insuffisance des principes de la chimie jusqu'ici reconnus il nous présente un tissu très confus d'elemens qui porte généralement le caractère d'un systéme arbitraire. L'auteur nous montre beaucoup de compositions de quelques étoffes de sa decouverte, telles que *l' Andronie* et la *Telekie*, sans toutefois nous apprendre la manière de les reproduire; de façon que depuis cinq ans aucun autre chimiste, hormi Mr. Winterl, n'a pu reussir à les connoitre de la même manière.

L'analyse bien pénible de ce systême nous donne à la fin les points principaux suivants:

„Les âtomes des matières en eux-mêmes sont morts, c'est-à-dire, sans qualites relatives."

„Les qualités relatives ou specifiques de la matière dependent d'un *principe animant*."

„L'esprit animant, en vertu duquel un corps est un *acide*, est appellé *le principe de l'acide*; et celui, par lequel un corps est une *base*, c'est-à-dire, un alcali, une terre, est d'après lui le *principe de la base*."

„Les âtomes ont une perceptibilité pour s'appropier les causes immediates de leurs qualités specifiques, qu'il appelle la *liaison*."

„L'état

„ L'état des acides et des bases, dans lequel ils sont tout-à-fait privés de leur principe animant, est suivant lui le *substrat*, dont les elemens sont la matière et la liaison.“

„Il n'y a qu'*une* matière, mais il y a *deux* principes animans, et peut-être autant de liaisons, qu'il y a de différences entre les corps produits par elles.“

„La *base* est d'après lui ce, qui denaturalise les propriétés des acides, et *acide* ce qui produit le même effet sur les bases.“

„Les acides s'emoussent par les bases, et celles reciproquement par ceux-là parceque tous les deux en s'unissant entre eux, perdent mutuellement leur principe de l'acide et celui de la base, que Mr. Winterl appelle: *être despiritualisé.*“

„ Il convient qu'on extrait des sels neutres des acides par des qualités aigres, comme des bases par des *propriétés basiques;* mais cela se fait d'après lui par ce qu'en les séparant, par d'autres acides, d'autres bases, ou par le plus haut dégré de chaleur, ils retrouvent le principe perdu, ils sont par consequent *respiritualisés.*“

„ Les acides despiritualisés, ou privés du principe de l'acide, et les bases depourvues du principe de la base, sont nommés *fades* ou *emoussés.*“

Ces petits echantillons pourront suffir pour faire connoître le caractère de ce système et l'esprit mystique qui domine dans

dans ce mélange d'hypothéses. Le vrai ami de la nature, qui ne cherche que la verité, est moins jaloux d'imaginer des nouvelles explications et des mots, que de trouver des lois, qui puissent simplifier et reduire à des principes communs la diversité des phénoménes. C'est un point essentiel dans toute théorie, qu'elle ne s'éloigne qu'aussi peu que possible de ce que nous pouvons appercevoir par les sens. Mais est ce que nous le savons par l'expérience, ou nos sens pourront-ils nous apprendre: que la matière en elle-même est morte, qu'il lui faut des esprits specifiques, pour paroitre tantôt sous la forme d'un acide, tantôt sous celle d'un Alcali? Et pourquoi n'établir arbitrairement que deux espèces de ces esprits vivificateurs? Ce système ne doit-il pas rappeller cette periode chimiatrique des médecins, ou tout étoit également expliqué par l'acide et l'alcali?

Après avoir montré que ces hypothéses ne sont fondées que dans l'imagination de leur auteur, il me reste encore à dire quelques mots de la manière dont Mr. Winterl s'est servi pour les confirmer par des expériences. On n'y trouve que très peu de celles qu'il ait faites lui-même et encore celles-ci sont rapportées d'une façon très insuffisante. Ce n'est pour la pluspart que des expériences faites par d'autres dont il se sert ou sur les quelles il renvoye ses lecteurs.

Voici un seul exemple pour soutenir cette assertion. Pour prouver l'existance des *acides emoussés* il cite un grand nombre d'exemples qui doivent servir à démontrer, qu'ils sont contenus comme tels dans les mixtions neutres et qu'on les gagne comme tels dans les séparations ou le principe perdu ne leur peut plus être rendu. Il dit par consequant:

„L'acide

„L'acide carbonique separé de la craie ou de la poudre de la pierre calcaire par une température plus haute s'unir plus facilement avec l'eau, mais ne lui donne point de gout, ne rougit pas les pigmens végétaux bleus; il précipite bien l'eau de chaux en guise de craie, mais il ne suffit pas de la resoudre en forme liquide dans quelque proportion que se soit, ce que l'acide carbonique fait pourtant *)."

Cette demonstration dictatoriale doit paroitre d'autant plus extraordinaire qu'il n'y est aucune question d'une seul expérience faite pour cet effet par l'auteur même. Car on doit faire la conclusion, pas seulement que l'acide carbonique developpé de la chaux par la chaleur doit avoir de toutes autres propriétés que celui qu'on engagne par les acides; mais encore: que jusqu'ici on n'avoit absolument point encore fait aucune expérience sur cet objet.

Cependant *Bergman* sans contredit un des chimistes les plus scrupuleux, dit dejà expressement: „l'acide carbonique a toujours les mêmes proprietés, qu'il soit gagné par l'acide ou par

---

*) „Die aus der Kreide oder dem Pulver des Kalksteins durch höhere Temperatur ausgetriebene Luftsäure verbindet sich mit dem Wasser leichter, giebt ihm aber gar keinen Geschmack, röthet die blauen Pflanzenpigmente nicht, schlägt aber doch das Kalkwasser zur Kreide nieder, löst es aber in was immer für einem Verhältnisse nicht wieder flüssig auf, was doch die vollendete thut." Voyez *Schuster* l. c. pag. 73.

par le feu.“ Et même *Jacquin* l'ainé a dit la même chose avant Bergman *).

C'est pourquoi on n'a pas hesité d'introduire dans les traités d'elemens modernes un theorème aussi confirmé par l'expérience. C'est ainsi, pour n'en citer qu'un seul, que Mr. *Hermbstädt* dans les elemens de Chimie après avoir expliqué la formation du gas carbonique de la craie par la chaleur, dit: „Le gas carbonique qu'on gagne ainsi ne differe en rien de celui qu'on reçoit de toute autre manière, pourvu que les matériaux employés dans cette experience, soient purs **).“

Sur quoi l'axiome de Mr. Winterl prononcé avec tant d'assurance, savoir: „que l'acide carbonique formé par la chaleur possède des qualités toutes différentes de celui qu'on developpe par des solutions“ — est-il donc fondé? Ce n'est que sur les assertions d'autrui et nommément des deux auteurs suivants, dont les opinions paroissent mériter ici une analyse un peu plus detaillée.

1. On cite le temoignage du fameux *Priestley*, qui dit: „l'avoir seulement entendu d'un chimiste italien.“ Mais de

*) V. son „Examen chemicum doctrinae Meyerianae etc. Vindobonae, 1769. §. 32.

**) „Das hier erhaltene kohlenſaure Gas iſt, wenn ſonſt die der Operation unterworfenen Materien rein waren, von dem auf jeden andern Wege erhaltenen nicht verſchieden.“ Syſtemat. Grundriß der allgemeinen Experimentalchemie. Band 1. Zweyte Auflage. Berlin, 1806. §. 235. S. 262.

de pareilles traditions denuées de tout detail sur les circonstances motivantes ne peuvent jamais servir d'argument; et même si l'on vouloit passer la dessùs, il n'est pas indifférent de savoir *où* Priestley fait mention de cette nouvelle. Mr. Winterl en citant les Essais de Priestley sur les différentes espèces d'air T. II. sect. 6. *) paroit ne pas avoir fait attention à ce que nous avons deux éditions de cet ouvrage, dans la dernière desquelles, formant trois volumes **) l'auteur a lui même omis de la précédante, composée de 6 Volumes, tout ce qui lui paroissoit insignifiant et superflu. J'ai tout lien de croire que le physicien Italien que Priestley ne nomme point, est Mr. *Fontana,* qui comme on sait étoit de l'opinion que c'étoit l'acide sulfurique employé à la formation de l'acide carbonique qui donnoit les propriétés aigres à celui-ci, qui par consequant ne lui étoient pas particulières ***). Mais Priestley qui en suite lui même a travaillé à combattre cette opinion, bien loin de faire réimprimer dans la nouvelle édition de ses essais cette assertion alléguée par Mr. Winterl ****), y a plustôt cité plusieurs de ses propres expériences sur la formation du gas carbonique par la voie de feu, dont voici le resultat en ses propres paroles:

„Nothing

*) Voyez Schuster's Darstellung etc p. 73. note 21.

**) Sous le titre: „Experiments and observations on different kinds of air and other branches of natural philosophy, connected with the subject. Birmingham, 1790. en 8.

***) Voyez son „Ricerche fisiche sopra l'Aria fissa.“ In Firenze, 1775. de 23 pages en 4.

****) Qu'on trouve dans les „Experiments and observations on different kinds of air. Vol. II. London, 1775. p. 148.

„Nothing in the form of a *stone* yields so much air (by extreme heat) as *lime stone* *).“ Ce qu'il nous explique par le detail suivant:

„From four ounces of white *crystals* of lime stone I got 830 ounce measures of air, the first portion of which had only one fourth of fixed air, but in the course of the experiment it varied, being once three-fourths, then one-half, and at the last one-third.“

„From five ounces and a half of *lime stone* of an excellent kind, I got in all 1160 ounce measures of air. Of this one-tenth only was phlogisticated, and the rest fixed, but the last portion of all was half phlogisticated.“

„From siven ounces of a *transparent substance*, found in a stone in the neighbourhood of Oxford, which is chiefly calcareous, I got 1280 ounce measures of air, of which about one-third of the whole was fixed air.“

„From six ounces of a *blue stone*, found in the neighbourhood of Stratford, I got 1030 ounce measures of air, of which, till near the end of the process, about one half was fixed air, and at the laſt about one fourth.“

„From

---

*) Voyez Experiments etc. Vol. I. Birmingham, 1790 p. 71.

„From three ounces of *chalx* I got 630 ounce measures of air, of which at the first one fourth was fixed air, then almost two-thirds, then something more then one half, and again a litte more than a third.“

„The purest calcareous earth is *chalk*, and the most perfect chalk is that, which is called *whiting*. From seven ounces of this substance I got 630 ounce measures of air, of which two third was fixed air *).“

2. Le second argument de Mr. Winterl pour soutenir son hypothése est pris d'un mémoire de Mr. *Langmaier*, dont il dit: „c'étoit deja en 1778 qu'il fit mention de toutes ces diversités de l'acide carbonique gagné de la craie par une température plus haute observé dans ses propres expériences.“ Voici de quoi il s'agit. Mr. Langmaier dans un memoire relatif aux différends littéraires sur l'*acidum pingue* de Mr. *Meier* **) fait bien mention de ses expériences telles que Mr. Winterl les cite ***). En profitant cependant des resultats d'expériences d'autrui, il faut bien considérer les circonstances qui les accompagnoient, car sans cette précaution la science seroit surchargée d'initules resultats qui en les examinant de plus près doivent

*) Voyez Experiments etc. Vol. I. Birmingham, 1790 p. 72 etc.

**) Voyez son: Supplementnm in J. J. de Well defensionem doctrinae Blackianae. Vindob. 1778 en 8.

***) Voyez p. 235 — 238.

doivent être denués de tout fondement. C'est qu'à l'époque, où Mr. Langmaier composoit son mémoire, on ne pouvoit encore se servir d'un appareil pneumatique aussi perfectionné que nous l'avons maintenant. Comment pourroit-on donc alléguer aujourd'hui des expériences faites avec des instrumens très imparfaits pour soutenir des hypothéses aussi importantes que celle de Mr. Winterl, qui fait l'objet de nos récherches. Mr. Langmaier employoit comme il dit lui même: ,,retortam *terream*, appositoque *excipulo rostrato.*" Il dit, que pour observer l'effet du gas émenant, sur la teinture de tournesol, l'eau calcaire et l'eau pure: ,,Hoc viso adplicueram excipuli rostro vitrum inverse conicum, liquorem continens ita, ut rostrum huic ad pollicem, et ultra fuerit immersum, atque adeo, ut prorumpens fluidum elasticum totum liquorem debuerit permeare ante, quam in superficiem elatum liberum fierit *)." Ce qui prouse evidement combien cette expérience a été incomplette; car:

a. Bergman dit expressement qu'il faut se servir pour cet effet d'une *retorte de verre*, ,,quum argillacea me saepe fefellerint subtilissimis rimis, oculis non semper detegendis, fluido elastico exitum parantibus **)." *Priestley* qui employoit égalément des retortes de terre, en parlant de ses experiences citées plus haute ajoute toujours qu'au commencement de l'opération le gas carbonique sortoit toujours melé de gas azote. Les essais

*) Voyez p. 235.

**) Voyez son Opuscula. Vol. I. p. 5.

sais eudiometriques faits après la séparation de l'acide carbonique avec le residu lui prouvoient encore, qu'il y avoit également passé de l'air atmospherique gaté, qui, comme Bergman observe très bien avoit probablement penetré par la rétorte.

b. Mr. *Langmaier* ou lieu d'un appareil dévéloppant pneumatique ne se servoit que d'un excipulum rostratum, qui sans deute étoit le même dont Mr. *Jacquin* fait mention dans son ouvrage cité (Examen etc.); car il dit: „J'attachois au cou de la retorte un recipient de verre bien large, qui au milie de son corps avoit un bec courbé.“ On en voit de même un pareil dans l'ouvrage de Priestley *). De cette manière le gas carbonique ne faisant que passer ne restoit jamais assez longtems en contact avec les liqueurs, et il étoit de plus melé d'air atmospherique et ne pouvoit non plus en grande quantité être mis en mouvement avec les liqueurs.

Le Professeur Winterl cite bien encore un troisième argument pour son hypothese, en disant· „la fabrication des eaux minerales de Mr. Paul à Paris a egalement mis hors de doute, que cet acide carbonique n'a pas de gout.“ Mais ce resultat ne s'ensuit nullement du rapport que l'Institut national de Paris a fait sur ces eaux artificielles. Il y est seulement dit que l'eau de Selters peut être preparée de deux manières, suivant que pour gagner de la craie l'acide carbonique y necessaire l'on employoit l'acide sulfurique ou la chaleur. En la prépa-

*) Experiments etc. Vol. I. Birmingham, 1790. planche V. fig. 4.

MATHEMATICA

ET

PHYSICO-MATHEMATICA.

RECHERCHES
SUR QUELQUES INTÉGRATIONS REMARQUABLES
DANS L'ANALYSE DES FONCTIONS À DEUX VARIABLES
CONNUES SOUS LE NOM
DE DIFFÉRENCES PARTIELLES;

PAR

Mr. LEONARD EULER.

Préſenté à l'Académie le 8 Décembre 1777.

Prenant z pour marquer une fonction quelconque des deux variables x et y, on ſait que la première différentiation, ſelon qu'on prend ou la ſeule x ou la ſeule y pour variable, fournit ces deux formules différentielles du premier degré: $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$. La ſeconde différentiation donne ces trois formules différentielles du ſecond ordre: $\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}$. La troiſième différentiation conduit à ces quatres formules différentielles du troiſième degré: $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$. La quatrième différentiation produit ces cinq différentielles du quatrième degré: $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial x\partial y^3}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}$; et ainſi de ſuite. Nous omettons ici les guil-

lemets, entre lesquels on a coûtume ordinairement de renfermer ces formules, puisque aucune ambiguité n'est à craindre dans les recherches que nous allons entreprendre.

Cela posé je considérerai ici les expressions suivantes:

I. $P = x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$

II. $Q = x^2 \cdot \frac{\partial \partial z}{\partial x^2} + xy \cdot \frac{\partial \partial z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial \partial z}{\partial y^2}$

III. $R = x^3 \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3xxy \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3xyy \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y^3 \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$

IV. $S = x^4 \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 4x^3 y \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} + 6xxyy \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + 4xy^3 \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3}$
$+ y^4 \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}$

et ainsi de suite. En général nous aurons celle-ci:

$$Z = x^\lambda \cdot \frac{\partial^\lambda z}{\partial x^\lambda} + \frac{\lambda}{1} x^{\lambda-1} y \cdot \frac{\partial^\lambda z}{\partial x^{\lambda-1} \partial y} + \frac{\lambda}{1} \cdot \frac{\lambda-1}{2} \cdot x^{\lambda-2} y^2 \cdot \frac{\partial^\lambda z}{\partial x^{\lambda-2} \partial y^2}$$
$$+ \frac{\lambda}{1} \cdot \frac{\lambda-1}{2} \cdot \frac{\lambda-2}{3} \cdot \frac{\partial^\lambda z}{\partial x^{\lambda-3} \partial y^3} + \text{etc.}$$

Ici j'observe d'abord, que chacune de ces expreſsions peut être formée de celle qui la précède immédiatement, et nous verrons qu'on aura toujours:

$$Q = x \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial P}{\partial y} - 1 P;$$
$$R = x \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial Q}{\partial y} - 2 Q;$$
$$S = x \cdot \frac{\partial R}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial R}{\partial y} - 3 R;$$
$$T = x \cdot \frac{\partial S}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial S}{\partial y} - 4 S;$$

et ainsi de suite. Où il est à remarquer que si nous mettons O pour la formule qui précède la premiere P, nous aurons $O = z$; et partant $P = x \frac{\partial O}{\partial x} + y \frac{\partial O}{\partial y} - 0 \cdot O$

Pour démontrer la vérité de toutes ces équations, commençons par la première, qui exprime la valeur de Q, et puisque

puisque $P = x . \frac{\partial z}{\partial x} + y . \frac{\partial z}{\partial y}$, la différentiation nous donnera

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1 . \frac{\partial z}{\partial x} + x . \frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + y \frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y} \text{ et}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 . \frac{\partial z}{\partial y} + x . \frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial\partial z}{\partial y^2}$$

De là nous tirerons cette équation:

$$x . \frac{\partial P}{\partial x} + y . \frac{\partial P}{\partial y} = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} + xx \frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y} + yy \frac{\partial\partial z}{\partial y^2}$$

qui se reduit ouvertement à cette forme:

$x . \frac{\partial P}{\partial x} + y . \frac{\partial P}{\partial y} = P + Q$, et partant on aura

$$Q = x . \frac{\partial P}{\partial x} + y \frac{\partial P}{\partial y} - P.$$

Pour la seconde de nos équations, puisque nous avons supposé $Q = x^2 \frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial\partial z}{\partial y^2}$, nous en tirons

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + 2y \frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 2xy \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + y^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 2x \frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y} + 2y \frac{\partial\partial z}{\partial y^2} + x^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 2xy \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y^2 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Maintenant la combinaison de ces formules fournira:

$$x . \frac{\partial Q}{\partial x} + y . \frac{\partial Q}{\partial y} = 2xx . \frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + 4xy . \frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y} + 2yy . \frac{\partial\partial z}{\partial y^2}$$
$$+ x^3 . \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3xxy . \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3xyy . \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y^3 . \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

Cette équation se reduit évidemment à la suivante:

$x . \frac{\partial Q}{\partial x} + y . \frac{\partial Q}{\partial y} = 2Q + R$, de sorte qu'il y a

$$R = x \frac{\partial Q}{\partial x} + y \frac{\partial Q}{\partial y} - 2Q$$

Pour démontrer la vérité de la troisième de nos équations, puisque nous avons $R = x^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3xxy \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3xyy \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y^3 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$, nous en tirons:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 3xx \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 6xy \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3yy \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$$
$$+ x^3 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 3xxy \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} + 3xyy \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + y^3 \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3};$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 3xx \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 6xy \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + 3yy \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$
$$+ x^3 \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} + 3xxy \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + 3xyy \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} + y^3 \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}.$$

Ces

Ces deux équations étant combinées, elles donnent:

$$x \frac{\partial R}{\partial x} + y \frac{\partial R}{\partial y} = 3x^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 9xxy \frac{\partial^2 z}{\partial x^2 \partial y} + 9xyy \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + 3y^3 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$
$$+ x^4 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 4x^3 y \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} + 6xxyy \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + 4xy^3 \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} + y^4 \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}$$

équation qui se reduit encore évidemment à celle-ci: $x \frac{\partial R}{\partial x} + y \frac{\partial R}{\partial y} = 3R + S$, d'où l'on tire par conséquent $S = x \frac{\partial R}{\partial x} + y \frac{\partial R}{\partial y} - 3R.$

Il seroit superflu de démontrer par le même calcul la vérité des équations suivantes, puisqu' il est déja assez clair, qu' on parviendra, par des opérations semblables, toujours à des équations telles que nous les avons assignées ci-dessus. Or ces beaux rapports entre les quantités P, Q, R, etc. nous conduiront à l'avantage de trouver les intégrales, et même les intégrales complettes, des équations différentielles suivantes: 1°. $P = 0$; 2° $Q = 0$; 3° $R = 0$; 4° $S = 0$; et ainsi de suite. Pour cet effet nous n'avons qu' à résoudre les trois problèmes préliminaires suivans.

Problème préliminaire I.

Trouver une fonction des deux variables x *et* y, *qui soit* v, *telle qu' il devienne* $x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

Solution.

Puisque v est fonction de x et y, supposons qu' en la différenciant, en prenant tant x que y variable, on trouve $\partial v = p\partial x + q\partial y$, desorte que $p = \frac{\partial v}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial v}{\partial y}$, et partant il faudra satisfaire à cette équation: $x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = xp + yq = 0$, d'où

d'où l'on tire $q = -\frac{xp}{y}$. Cette valeur étant substituée, elle nous donnera $\partial v = p\partial x - \frac{px\partial y}{y} = p\,(\frac{y\partial x - x\partial y}{y})$. Il faut donc que cette formule soit intégrable. Qu'on la reduise donc à cette forme: $\partial v = p\,(\frac{y\partial x - x\partial z}{yy})$, où posant $\frac{x}{y} = p$, pour avoir $py\partial t = \partial v$, il est clair que pour que cette formule admît l'intégration, il faut absolument que py soit fonction de la seule variable t, et alors l'intégrale sera aussi une fonction de la même quantité t.

Employons dans la suite, pour marquer des fonctions quelconques, les caractères $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. de sorte que $\mathfrak{A}:t$, ou $\mathfrak{B}:t$, ou $\mathfrak{C}:t$ nous représente une fonction quelconque de t. Outre cela nous nous servirons de la manière assez généralement reçue, pour marquer les différentielles d'un ordre quelconque, savoir: $\partial\,.\,\mathfrak{A}:t = \partial t\ \mathfrak{A}':t$, $\partial\,.\,\mathfrak{A}':t = \partial t\ \mathfrak{A}'':t$, $\partial\,.\,\mathfrak{A}'':t = \partial t\ \mathfrak{A}''':t$, etc. Cela remarqué notre dernière équation intégrée donnera $v = \mathfrak{A}:t$, ou bien, à cause de $t = \frac{x}{y}$, nous aurons $v = \mathfrak{A}:\frac{x}{y}$; de sorte qu'on pourra prendre pour v une fonction quelconque de $\frac{x}{y}$; où il est bon de remarquer que toutes ces fonctions sont comprises sous le nom de fonctions homogènes de nulle dimension de x et y:

Problème préliminaire II.

Trouver une fonction des deux variables x *et* y, *qui soit* v, *telle qu'il y ait* $nv = x\,\frac{\partial v}{\partial x} + y\,\frac{\partial v}{\partial y}$

Solution.

Posons, comme auparavant, $\partial v = p\partial x + q\partial y$, et puisque $p = \frac{\partial v}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial v}{\partial y}$, nous aurons cette condition à remplir:

$nv =$

$nv = px + qy$. Eliminons de ces deux équations la lettre q, en multipliant la première par y et l'autre par ∂y, et en ôtant la dernière de la première, nous aurons celle-ci: $y\partial v - nv\partial y = p\,(y\partial x - x\partial y)$; où il faut chercher la fonction p, pour que cette équation devienne intégrable.

Pour rendre intégrable la première partie de cette équation, on n'a qu'à la diviser par y^{n+1}, d'où l'on tire $\frac{y\partial v - nv\partial y}{y^{n+1}} = \partial . \frac{v}{y^n} = p\,(\frac{y\partial x - x\partial y}{y^{n+1}})$. Or puisque la formule $\frac{y\partial x - x\partial y}{y^2}$ est la différentielle de $\frac{x}{y}$, représentons nôtre équation sous cette forme: $\partial : \frac{v}{y^n} = \frac{p}{y^{n-1}} \times \frac{y\partial x - x\partial y}{yy} = \frac{p}{y^{n-1}}\, \partial . \frac{x}{y}$; où il est évident que $\frac{p}{y^{n-1}}$ doit être fonction de $\frac{x}{y}$; et puisque l'intégrale sera par conséquent aussi une telle fonction, nous aurons, en intégrant cette équation, $\frac{v}{y^n} = \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$; d'où nous obtiendrons cette valeur pour la fonction cherchée: $v = y^n\, \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$.

Puisque une fonction de $\frac{x}{y}$, étant multipliée par $\frac{x}{y}$, ou en général par $\frac{x^n}{y^n}$, demeure toujours fonction de $\frac{x}{y}$, au lieu de $\mathfrak{A} : \frac{x}{y}$ nous pourrons écrire $\frac{x^n}{y^n}\, \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$, et partant la valeur trouvée pour v pourra aussi être exprimée par $v = x^n\, \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$, ou bien $v = x^{n-1} y\, \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$, ou bien $v = x^{n-2} y^2\, \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$, et ainsi de suite. Or on sait que toutes ces fonctions sont nommées homogènes, dont le nombre des dimensions est partout $= n$.

Problème préliminaire III

Trouver une fonction de deux variables x *et* y, *qui soit* v, *telle qu'il y ait* $nv = x\,\frac{\partial v}{\partial x} + y\,\frac{\partial v}{\partial y} - y^\lambda\, \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$.

Solu-

Solution.

Soit encore $dv = p\,\partial x + q\,\partial y$, pour avoir $p = \frac{\partial v}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial v}{\partial y}$, et on aura cette condition à remplir: $nv = px + qy + y^\lambda \mathfrak{A}:\frac{x}{y}$. Qu'on forme maintenant de ces deux équations celle-ci: $y\,\partial v - nv\,\partial y = p\,(y\,\partial x - x\,\partial y) - y^\lambda\,\partial y\,\mathfrak{A}\frac{x}{y}$, dont le premier membre deviendra intégrable en le divisant par y^{n+1}. Nous aurons donc $\partial\,.\,\frac{v}{y^n} = p\frac{(y\partial x - x\partial y)}{y^{n+1}} - y^{\lambda-n-1}\,\partial y\;\mathfrak{A}:\frac{x}{y}$. Pour résoudre cette équation mettons $\frac{x}{y} = t$, ou bien $x = yt$, et au lieu de $\mathfrak{A}:t$ écrivons T, desorte que T soit une fonction donnée de t, et à cause de $\partial x = t\,\partial y + y\,\partial t$ nôtre équation sera $\partial\,.\,\frac{v}{y^n} = \frac{p\,\partial t}{y^{n-1}} - T\,y^{\lambda-n-1}\,\partial y$.

Intégrons maintenant, entant qu'il est permis, et puisque $\int T\,y^{\lambda-n-1}\,\partial y = \frac{y^{\lambda-n}}{\lambda-n}\,T - \int\frac{y^{\lambda-n}}{\lambda-n}\,T'\,\partial t$, en supposant $\partial T = T'\,\partial t$ nous aurons en intégrant $\frac{v}{y^n} = -\frac{y^{\lambda-n}}{\lambda-n}\,T + \int\partial t\,(\frac{p}{y^{n-1}} + \frac{y^{\lambda-n}}{\lambda-n}\,T)$, d'où l'on voit que la formule $\frac{p}{y^{n-1}} + \frac{y^{\lambda-n}}{\lambda-n}\,T$ doit être une fonction quelconque de t, que nous marquerons $\mathfrak{B}:t$, et partant nous aurons cette équation intégrale: $\frac{v}{y^n} = \mathfrak{B}:t - \frac{y^{\lambda-n}}{\lambda-n}\,T$, et de là $v = y^n\,\mathfrak{B}:t - \frac{y^\lambda}{\lambda-n}\,T$.

Remettons à présent à la place de t sa valeur $\frac{x}{y}$ et $\mathfrak{A}:t$ au lieu de T, où il faut remarquer que le caractère $\mathfrak{A}$ marque une fonction donnée de $\frac{x}{y}$, puisque elle se trouve dejà dans l'équation differentielle donnée. Mais le caractère $\mathfrak{B}$ indiquera ici une fonction quelconque arbitraire de $\frac{x}{y}$, qui est introduit dans les intégrations ordinaires. Par conséquent nous aurons pour la

solution de nôtre problème la valeur suivante de la fonction v, savoir $v = y^n \mathfrak{B} : \frac{x}{y} - \frac{y^\lambda}{\lambda - n} \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$.

Ici on demandera peut-être quelle sera la valeur de v, au cas que l'exposant λ seroit égal à n, puisque alors le dernier membre de nôtre équation deviendroit infini? Pour écarter cette difficulté mettons $\lambda = n + \omega$, en marquant par ω une quantité infiniment-petite, et nous aurons $y^\lambda = y^n \cdot y^\omega = y^n (1 + \omega l y)$, ce qui nous donnera $v = y^n \mathfrak{B} : \frac{x}{y} - \frac{y^n (1 + \omega l y)}{\omega} \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$. Maintenant puisque $\mathfrak{B}$ marque une fonction arbitraire, il sera permis de mettre à la place de $\mathfrak{B} : \frac{x}{y}$ cette formule: $\frac{1}{\omega} \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + \mathfrak{C} : \frac{x}{y}$, où $\mathfrak{C}$ marque une fonction arbitraire quelconque, et en substituant ces valeurs les membres infinis se détruiront et l'intégrale cherchée pour le cas $\lambda = n$ sera $v = y^n \mathfrak{C} : \frac{x}{y} - y^n l y \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$. Nous serons donc en état de résoudre maintenant le problème suivant.

I Problème.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, *ou bien chercher la nature de la fonction* z.

Solution.

Ici nous avons donc $P = 0$, et le premier problème préliminaire nous fournira d'abord l'intégrale cherchée, puisqu'on n'a qu'à écrire z au lieu de v, et partant nôtre intégrale complette sera $z = \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$. Ou bien on pourra prendre pour z une fonction quelconque homogène de nulle dimension de x et y.

Qu'on

Qu'on prenne, par exemple, $z = \frac{xx - yy}{xx + yy}$, et on aura $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4xyy}{(xx+yy)^2}$ et $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4xxy}{(xx+yy)^2}$, d'où il devient évidemment $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Dela même manière, en prennent $z = \frac{x+y}{\sqrt{xx+yy}}$, on aura $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yy - xy}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$ et $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xx - xy}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$, et de là il s'ensuit ouvertement $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

II Problème.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle du second degré : $xx\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y} + yy\frac{\partial\partial z}{\partial y^2} = 0$.

Solution.

On suppose donc ici que $Q = 0$, et partant, puisque nous avons trouvé ci-dessus $Q = x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} - P$, nous aurons à résoudre cette équation differentielle du premier degré $x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} = P$ dont l'intégrale se trouve par le second problème préliminaire, en mettant P au lieu de v et $n = 1$, d'où l'on tire $P = y\mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, où $\mathfrak{A}$ marque une fonction quelconque. Mettons àprésent au lieu de P sa valeur, et nous aurons à résoudre cette équation différentielle du premier degré: $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = y\mathfrak{A} : \frac{x}{y}$. Cette équation étant comparée avec le troisième probleme préliminaire nous donne $n = 0$, $\lambda = 1$ et $v = z$; par conséquent l'intégrale complette cherchée de notre équation sera $z = \mathfrak{B} : \frac{x}{y} - y\mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, ou bien, puisque les deux fonctions sont arbitraires, on pourra mettre $z = \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y\mathfrak{B} : \frac{x}{y}$, qui renferme par conséquent deux fonctions arbitraires, comme la nature des équations différentielles du second ordre l'exige.

III Probleme.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle du troisième degre: $x^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3xxy \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3xyy \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y^3 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0$.

Solution.

Il s'agit donc ici de rendre $R = 0$, et en mettant pour R sa valeur indiquée ci-dessus, nous aurons à résoudre cette équation: $x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y} - 2Q = 0$, qui, étant comparée avec celle du seconde Problème préliminaire, donne $v = Q$ et $n = 2$, donc son intégrale complette est $Q = y^2\, \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$.

Maintenant ayant $Q = x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} - P$, nous aurons à résoudre l'équation $x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} - P = y^2\, \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, qui étant comparée avec celle du troisième problème préliminaire donne $v = P$, $n = 1$, $\lambda = 2$, ce qui étant substitué donne l'intégrale suivante $P = y\, \mathfrak{B} : \frac{x}{y} - y^2\, \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, ou bien, puisque les fonctions sont arbitraires, on aura $P = y^2\, \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y\, \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$.

Enfin donc puisque $P = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$, nous aurons cette équation à résoudre: $x\frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial y} = y^2\, \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y . \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$, qui comparée avec l'équation du troisième problème préliminaire nous fournit $v = z$, $n = 0$, et pour λ nous aurons deux valeurs différentes, ou $\lambda = 2$, ou $\lambda = 1$; car il est évident que l'un et l'autre pourra être traité de la même manière; par conséquent l'intégrale complette de l'équation proposée sera $z = \mathfrak{B} : \frac{x}{y} - y\, \mathfrak{A} : \frac{x}{y} - y^2\, \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, ou bien en changeant les caractères, signes des fonctions arbitraires, il y aura $z = \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y\, \mathfrak{B} : \frac{x}{y} + y^2\, \mathfrak{C} : \frac{x}{y}$.

IV Problème

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle du quatrième degré :

$$0 = x^4 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 4xy^3 \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} + 6xxyy \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + 4xy^3 \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} + y^4 \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}.$$

Solution.

On aura donc ici $S = 0$, ou bien $x\frac{\partial R}{\partial x} + y\frac{\partial R}{\partial y} - 3R = 0$, ce qui comparé avec le second problème préliminaire fournit $v = R$ et $n = 3$ et partant $R = y^3 \mathfrak{A}\frac{x}{y}$. Mettant donc au lieu de R sa valeur, il faudra résoudre cette équation $x\frac{\partial Q}{\partial y} + y\frac{\partial Q}{\partial y} - 2Q = y^3\mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, qui comparée avec le troisième préliminaire, à cause de $v = Q$, $n = 2$ et $\lambda = 3$, donne $Q = y^2\,\mathfrak{B} : \frac{x}{y} + y^3\,\mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, ou bien $x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} - P = y^2\mathfrak{B} : \frac{x}{y} + y^3\,\mathfrak{A} : \frac{x}{y}$; où il y a par conséquent $v = P$, $n = 1$ et $\lambda = 2$ ou 3, d'où l'on tire $P = y\,\mathfrak{B}:\frac{x}{y} + y^2\,\mathfrak{A}:\frac{x}{y} : + y^3\mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, ou bien $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = y\mathfrak{A}:\frac{x}{y} + y^2\,\mathfrak{B}:\frac{x}{y} + y^3\,\mathfrak{C}:\frac{x}{y}$, qui comparaison faite donne $v = z$, $n = 0$ et $\lambda = 1$ ou 2, ou 3, ce qui donne

$$x = \mathfrak{B}:\frac{x}{y} - y\mathfrak{A}:\frac{x}{y} - y^2\,\mathfrak{A}:\frac{x}{y} - y^3\,\mathfrak{A}:\frac{x}{y}, \text{ ou bien}$$

$$z = \mathfrak{A}:\frac{x}{y} + y\mathfrak{B}:\frac{x}{y} + y^2\,\mathfrak{C}:\frac{x}{y} + y^3\,\mathfrak{D}:\frac{x}{y}.$$

V Problème général.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle du degré n^{ieme} :

$$x^n \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + \frac{n}{1}\, x^{n-1} y \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}\, x^{n-2} y^2 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} \partial y^2} + \text{etc.}$$

So-

Solution.

Ici il est facile à voir qu'en faisant les opérations successivement comme dans les problèmes précédens on parviendra enfin à cette intégrale complette:

$z = \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y\,\mathfrak{B} : \frac{x}{y} + y^2\,\mathfrak{C} : \frac{x}{y} \,\ldots\ldots\ldots\, y^{n-1}\,\mathfrak{N} : \frac{x}{y}$,

où le nombre des fonctions arbitraires est $= n$, et partant égal au degré de l'équation proposée; d'ou l'on voit que l'intégrale de chaque degré renferme toutes les intégrales de tous les degrés inférieurs, et outre cela encore un terme qui apartient exclusivement au degré proposé.

Voilà donc les intégrations de toutes ces équations différentielles 1°. P = o. 2°. Q = o. 3°. R = o. 4°. S = o. etc. en assignant à chacune de ces lettres les valeurs qui leur ont été données au commencement, et la méthode dont nous nous sommes servis demande pour chaque cas autant d'intégrations que le degré du différentiel indique. Or un jeune Géomètre, en faisant les calculs précédens, a observé: que toutes ces solutions pourront être exécutées plus facilement moyennant une seule intégration, et cette méthode a encore ce grand avantage sur celle dont nous nous sommes servis jusqu'ici, qu'elle s'étend aussi à l'intégration des équations différentielles composées et comprises dans cette forme générale: $Az + BP + CQ + DR + ES +$ etc. $= o$, où tous les degrés des différentielles se trouvent joints ensemble, et où les coefficiens constans A, B, C, D, etc. peuvent être pris à volonté. Et la résolution de tous ces cas se peut toujours tirer du seul problème préliminaire second, qui donne pour l'équation différentielle $x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} - nv = o$ cette intégrale complette: $= y^n\,\mathfrak{A} : \frac{x}{y}$. Pour éclaircir cette nouvelle méthode, nous ajouterons les Problemes suivans.

Pro-

Problème I.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle du premier degré: $Az + BP = 0$, *ou bien* $Az + B\,(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}) = 0$.

Solution.

Pour cet effet mettons dans le problème préliminaire $v = az$, pour avoir cette équation: $a\,(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}) - naz = 0$, dont l'intégrale est $z = y^n : \mathfrak{A}\frac{x}{y}$. Maintenant au lieu de $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ mettons sa valeur assignée P, et l'équation que nous venons d'intégrer sera $aP - naz = 0$, qui, comparée avec la proposée $Az + BP$, donne $A = -na$ et $B = a$, par conséquent $a = B$ et $A = -nB$, ou bien $A + nB = 0$. En tirant de cette équation la valeur de $n = -\frac{A}{B}$, l'intégrale de l'équation proposée sera $y^n\,\mathfrak{A} : \frac{x}{y}$. Cette solution ne renferme rien qui n'auroit pu être fait par la méthode précédente, mais le problème suivant mettra dans tout son jour le prix de la nouvelle méthode.

Problème II.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle du second degré $Az + BP + CQ = 0$.

Solution.

Pour résoudre cette équation supposons dans le problème préliminaire $v = az + bp$, pour avoir cette intégrale $az + bP = y^n\,\mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, qui convient donc avec cette équation $a\,(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}) - naz + b\,(x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}) - nbP = 0$. Mettons

tons à présent dans cette équation, au lieu de $x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}$, sa valeur absolüe tirée des formules supposées au commencement, laquelle est p, et au lieu de la formule $x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}$ mettons cette valeur absolüe $Q + P$, et nous aurons cette équation:
$aP + bQ + bP - naz - nbP = 0$, ou bien
$-naz + (a + b - nb)P + bQ = 0$, qui étant comparée avec la forme supposée $Az + BP + CQ = 0$, nous donne pour les lettres a et b les valeurs suivantes: $b = C$, $a = B - C + nC$, et $0 = A + n(n-1)C$, d'où il faut tirer la valeur de n.

Or puisque cette dernière équation est du second degré, elle aura deux racines, qui soyent α et β, dont chacune nous donnera des valeurs particulieres pour a et b, qui sont:

$n = \alpha$	$n = \beta$
$a = B + (\alpha - 1)C$	$a = B + (\beta - 1)C$
$b = C$	$b = C$

de là nous aurons deux équations intégrales

$$(B + (\alpha - 1)C)z + CP = y^{\alpha}\mathfrak{A} : \frac{x}{y}$$

$$(B + (\beta - 1)C)z + CP = y^{\beta}\mathfrak{B} : \frac{x}{y}$$

Maintenant de ces deux équations on n'a qu'à chasser la lettre P, ce qui se fait en prenant leur différence, ce qui donne $(\alpha - \beta)Cz = y^{\alpha}\mathfrak{A} : \frac{x}{y} - y^{\beta}\mathfrak{B} : \frac{x}{y}$; et puisque les fonctions sont absolument arbitraires, on pourra représenter l'intégrale sous cette forme: $z = y^{\alpha}\mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y^{\beta}\mathfrak{B} : \frac{x}{y}$.

Corollaire.

Delà se déduit aisément l'intégrale de l'équation $Q = 0$, que nous avons traitée ci-dessus; on n'a qu'à supposer $A = 0$

et

et $B = 0$ et $C = 1$, et alors l'équation pour le nombre n devient $n(n-1) = 0$, dont les racines sont $n = 0$ et $n = 1$, par conséquent $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, et partant l'intégrale de ce cas sera $z = \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y\,\mathfrak{B} : \frac{x}{y}$.

Problème II.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle du troisième degré : $Az + BP + CQ + DR = 0$.

Solution.

Pour parvenir à la solution de ce problème, supposons dans le second problème préliminaire $v = az + bP + cQ$, et l'intégration nous fournit d'abord cette équation: $az + bP + cQ = y^n \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, et cette intégrale convient à l'équation différentielle suivante:

$$\left.\begin{aligned} & a\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) - naz \\ + & b\left(x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}\right) - nbP \\ + & c\left(x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - ncQ \end{aligned}\right\} = 0$$

Maintenant au lieu des formules différentielles mettons leurs valeurs finies, et nous parviendrons à cette équation:

$$aP + b(P + Q) + c(R + 2Q) - naz - nbP - ncQ = 0$$

qui se reduit à cette forme:

$-naz + (a + b(1-n))P + (b + (2-n)c)Q + cR = 0$, qui étant comparée avec la proposée nous fournit les équations de condition suivantes:

$$A = -na;\quad B = a + b(1-n);\quad C = b + (2-n)c;\quad D = c.$$

 Ayant

Ayant donc de la derniere $D = c$, la troisième nous donnera $b = C + (n-2) D$; ensuite la seconde équation nous fournit $a = B + (n-1) C + (n-1)(n-2) D$, et cette valeur substituée dans la premiere donne cette valeur finale: $A + nB + n(n-1) C + n(n-1)(n-2) D = 0$, qui étant du troisième degré renferme trois racines, qui soyent α, β, γ. Chacune de ces racines nous donnera deux valeurs particulières pour les lettres a, b, c, qui étant rapportées à la racine α, supposons que pour la racine β on ait a', b', c', et qu'à la racine γ répondissent celles-ci: a'', b'', c'', chacun de ces cas nous fournira donc une équation intégrale particulière, et ces équations seront

$$a z + b P + c Q = y^{\alpha} \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$$
$$a' z + b' P + c' Q = y^{\beta} \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$$
$$a'' z + b'' P + c'' Q = y^{\gamma} \mathfrak{C} : \frac{x}{y}.$$

Aprésent il sera facile de trouver pour chacune de ces équations certains multiplicateurs tels, qu'en ajoutant les produits ensemble les quantités P et Q soyent détruites; et puisque ces multiplicateurs ne changent pas la nature des fonctions arbitraires, on parviendra par ce moyen à cette équation finale:

$$z = y^{\alpha} \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y^{\beta} \mathfrak{B} : \frac{x}{y} + y^{\gamma} \mathfrak{C} : \frac{x}{y}$$

qui exprime l'intégrale complette de notre équation differentielle proposée.

Corollaire.

Pour tirer de là l'intégrale de l'équation $R = 0$, on n'a qu'à mettre $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1$, et alors l'équation cubique pour le nombre n deviendra $n(n-1)(n-2) = 0$, dont les trois racines sont ouvertement $0, 1, 2$, desorte que

$a = c$,

$\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$; d'où nous tirons l'intégrale cherchée pour ce cas $z = \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y\,\mathfrak{B} : \frac{x}{y} + y^2\,\mathfrak{C} : \frac{x}{y}$, qui convient parfaitement avec celle qui a été trouvée ci-dessus.

Problème III.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle du quatrième degré: $Az + BP + CQ + DR + ES = 0$.

Solution.

Pour résoudre cette question mettons dans le second problème préliminaire $v = az + bP + cQ + dR$, et nous aurons d'abord cette intégrale: $az + bP + cQ + dR = y^n \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, qui conviendra donc a cette équation différentielle:

$$\left.\begin{array}{l} a\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) - naz \\ + b\left(x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}\right) - nbP \\ + c\left(x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - ncQ \\ + d\left(x\frac{\partial R}{\partial x} + y\frac{\partial R}{\partial y}\right) - n\partial R \end{array}\right\} = 0$$

Maintenant qu'on écrive au lieu des formules differentielles leurs valeurs finies, pour arriver à cette équation:

$$\left.\begin{array}{ll} + aP & - naz \\ + b(Q + P) & - nbP \\ + c(R + 2Q) & - ncQ \\ + \partial(S + 3R) & - n\partial R \end{array}\right\} = 0$$

dont les termes étant rangés donneront

$$-naz + (a + b(1 - n))P + (b + c(2 - n))Q + (c + d(3 - n))R + dS = 0.$$

Il ne reste donc qu'à rendre identique cette forme avec la proposée, ce qui produit les cinq égalités suivantes: 1°) $A = -na$; 2°) $B = a + (1-n)b$; 3°) $C = b + (2-n)c$; 4°) $D = c + (3-n)d$; 5°) $E = d$. La dernière nous donne d'abord $d = E$; la quatrième fournit $c = D + (n-3)E$; ensuite de la troisième nous tirons $b = C + (n-2)D + (n-2)(n-3)E$; la seconde fournit $a = B + (n-1)C + (n-1)(n-2)D + (n-1)(n-2)(n-3)E$; enfin la première nous conduit à cette équation pour la détermination du nombre n:

$$A + nB + n(n-1)C + (n-1)(n-2)D + n(n-1)(n-2)(n-3)E = 0.$$

Cette dernière équation étant du quatrième degré soyent α, β, γ, δ les quatre valeurs du nombre n, dont chacune produira pour les lettres a, b, c, d des valeurs particulières. Mettons donc pour le racine α ces mêmes lettres a, b, c, d, pour la racine β: a', b', c', d', pour γ: a'', b'', c'', d'', et pour δ: a''', b''', c''', d'''; et alors nous aurons quatre formes différentes de l'équation intégrale trouvée qui seront:

$$a\,z + b\,P + c\,Q + d\,R = y^{\alpha}\,\mathfrak{A} : \frac{x}{y}.$$
$$a'\,z + b'\,P + c'\,Q + d'\,R = y^{\beta}\,\mathfrak{B} : \frac{x}{y}$$
$$a''\,z + b''\,P + c''\,Q + d''\,R = y^{\gamma}\,\mathfrak{C} : \frac{x}{y}$$
$$a'''\,z + b''\,P + c'''\,Q + d'''\,R = y^{\delta}\,\mathfrak{D} : \frac{x}{y}.$$

Après avoir trouvé ces quatre équations, il est facile d'en éliminer les trois quantités P, Q, R, de sorte qu'il ne restera à la gauche que la seule quantité z, et puisque les fonctions à la droite, étant multipliées par certaines constantes, ne changent point de nature, on en tirera cette équation finale: $z = y^{\alpha}\,\mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y^{\beta}\,\mathfrak{B} : \frac{x}{y} + y^{\gamma}\,\mathfrak{C} : \frac{x}{y} + y^{\delta}\,\mathfrak{D} : \frac{x}{y}$; où il est bon de

de remarquer que pour trouver cette équation nous n' avons pas eu besoin de trouver les valeurs de a, b, c, d, ni même les multiplicateurs, pour l' élimination des quantités: P, Q, R.

Problème IV général.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle d' un degré quelconque: $Az + BP + CQ + DR + etc. = o.$

Solution.

Toute la solution de cette question se reduit à l'équation pour déterminer toutes les valeurs du nombre n; et il est clair par les problémes précédens, que cette équation aura la forme $A + nB + n(n-1)C + n(n-1)(n-2)D + \text{etc.} = 0$, qui montera au même degré auquel se rapporte l'équation différentielle proposée; et partant le nombre n aura autant de valeurs, que nous marquerons par les lettres α, β, γ, δ, etc. et alors l'intégrale complette de l' équation proposée sera

$$z = y^{\alpha}\mathfrak{A}:\frac{x}{y} + y^{\beta}\mathfrak{B}:\frac{x}{y} + y^{\gamma}\mathfrak{C}:\frac{x}{y} + y^{\delta}\mathfrak{D}:\frac{x}{y} + \text{etc.}$$

qui comprend autant de fonctions arbitraires que l'ordre de la différentielle demande.

Ici il est bon de remarquer, que puisque les deux variables x et y entrent également dans le calcul, au lieu des puissances y^{α}, y^{β}, y^{γ} etc. on pourra aussi mettre de semblablès puissances de x, savoir x^{α}, x^{β}, x^{γ} etc. Et en effet, si nous considérons la formule $y^{\alpha}\mathfrak{A}:\frac{x}{y}$, puisque $\frac{x^{\lambda}}{y^{\lambda}}$ est aussi une fonction de $\frac{x}{y}$, au lieu de $\mathfrak{A}:\frac{x}{y}$ on pourra mettre $\frac{x^{\lambda}}{y^{\lambda}}\mathfrak{F}:\frac{x}{y}$; et alors

nous

nous aurons $x^\lambda y^{\alpha-\lambda} \mathfrak{F} : \frac{x}{y}$. Donc prenant $\lambda = \alpha$, au lieu de la formule $y^\alpha \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$ on pourra mettre $x^\alpha \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$; et il est aussi clair qu'on pourroit écrire en général $x^\mu y^\nu \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, pourvu que la somme des exposans μ et ν fut égale à α, c'est-à-dire $\mu + \nu = \alpha$.

Cette solution n'aura donc aucune difficulté, tant que les valeurs de l'exposant n, que nous supposons être α, β, γ, δ, etc. sont toutes réelles et inégales entre elles. Mais dans le cas ou quelques unes de ces valeurs sont ou imaginaires ou égales entre elles, il faut recourir à certaines réductions pour rendre l'intégrale réelle dans le premier cas; or pour l'autre cas il faut que le nombre nécessaire des fonctions arbitraires reste non-diminué, sans quoi l'intégrale ne seroit plus complette.

Pour lever toutes ces difficultés commençons par considérer le cas où deux valeurs de n se trouvent imaginaires, savoir α et β, et on sait que ces deux valeurs se reduiront toujours à ces formes: $\alpha = \mu + \nu\sqrt{-1}$ et $\beta = \mu - \nu\sqrt{-1}$, et partant les termes de l'intégrale, qui dépendent de ces valeurs, seront $y^{\mu+\nu\sqrt{-1}} \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$ et $y^{\mu-\nu\sqrt{-1}} \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$; et pour les reduire à la réalité supposons $\mathfrak{A} : \frac{x}{y} = \mathfrak{F} : \frac{x}{y} + \mathfrak{G} : \frac{x}{y}$ et $\mathfrak{B} : \frac{x}{y} = \mathfrak{F} : \frac{x}{y} - \mathfrak{G} : \frac{x}{y}$, et àprésent ces deux termes en question se reduiront à cette forme: $y^\mu \mathfrak{F} : \frac{x}{y} (y^{\nu\sqrt{-1}} + y^{-\nu\sqrt{-1}}) + y^\mu (y^{\nu\sqrt{-1}} - y^{-\nu\sqrt{-1}}) \mathfrak{G} : \frac{x}{y}$.

Mettons ici dans les puissances imaginaires e^{ly} au lieu de y, en prenant pour e le nombre dont le logarithme hyperbolique est $= 1$, et la première formule $y^{\nu\sqrt{-1}} + y^{-\nu\sqrt{-1}}$ deviendra $= e^{\nu\sqrt{-1}\, ly} + e^{-\nu\sqrt{-1}\, ly}$, et l'autre $y^{\nu\sqrt{-1}} - y^{-\nu\sqrt{-1}}$ deviendra $= e^{\nu\sqrt{-1}\, ly} - e^{-\nu\sqrt{-1}\, ly}$. Or on sait par les réductions connues

nues que $e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}} = 2 \cos v$ et $e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}$ ſin v. Donc puiſque $v = \nu\, ly$, la forme de nos deux termes ſera. $y^\mu . 2 \cos v . \mathfrak{F} : \frac{x}{y} + y^\mu . 2\sqrt{-1} . \text{ſin}\, v . \mathfrak{G} : \frac{x}{y}$; où l'on peut omettre les coëfficiens conſtans tant réels qu'imaginaires. Nous aurons donc, au lieu des deux termes propoſés, ceux-ci: $y^\mu \cos \nu\, ly\, \mathfrak{F} : \frac{x}{y} + y^\mu\, \text{ſin}\, \nu\, ly\, \mathfrak{G} : \frac{x}{y}$, toutes les fois que $\alpha = \mu + \nu\sqrt{-1}$ et $\beta = \mu - \nu\sqrt{-1}$. De là il est clair que lorſque le nombre des valeurs imaginaires de n est $4, 6, 8, 10$, etc. puiſque chaque couple ſe reduit toujours à ces deux formules $\mu + \nu\sqrt{-1}$ et $\mu - \nu\sqrt{-1}$, la reduction ſe pourra toujours faire de la même manière.

Pour en donner un exemple prenons le cas où l'équation, pour déterminer le nombre n, devient $1 + nn = 0$, qui apartient au ſecond degré, où nous avions trouvé $A + nB + n(n-1)C = 0$, il faudra prendre $A = B = C = 1$, de ſorte que l'équation différentielle à intégrer ſera pour ce cas $z + P + Q = 0$, ou bien en la développant:
$z + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + xx\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y} + yy\frac{\partial\partial z}{\partial y^2} = 0$. Et puiſque pour n nous aurons ces valeurs $\alpha = \sqrt{-1}$, $\beta = -\sqrt{-1}$, et partant $\mu = 0$ et $\nu = 1$, nous en déduiſons d'abord $z = \cos. ly\, \mathfrak{F} : \frac{x}{y} + \text{ſin}. ly, \mathfrak{G} : \frac{x}{y}$. Pour mieux éclaircir ce cas-ci prenons $\mathfrak{F} : \frac{x}{y} = 0$ et $\mathfrak{G} : \frac{x}{y} = \frac{x}{y}$, de ſorte qu'une intégrale particulière ſera $z = \frac{x}{y}\, \text{ſin}. ly$, d'ou nous tirons $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}. \text{ſin}. ly$ et $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{yy}. \text{ſin}. ly + \frac{x}{yy}. \cos. ly$, et enſuite $\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} = 0$ et $\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{yy}. \text{ſin}. ly + \frac{1}{yy}. \cos. ly$ et $\frac{\partial\partial z}{\partial y^2} = \frac{x}{y^3}. \text{ſin}. ly - \frac{3x}{y^3}. \cos. ly$.

Ces

Ces valeurs étant substituées dans l'équation $z + P + Q = 0$, donneront $z = \frac{x}{y} \cos. ly$

$$P = \frac{x}{y} \cos. ly$$

$$Q = - \frac{x}{y} \sin. ly - \frac{x}{y} \cos. ly$$

dont la somme donne $z + P + Q = 0$

Passons au cas où deux ou plusieurs valeurs de n deviennent égales entr' elles. Supposons d' abord que $\beta = \alpha$, et dans la forme intégrale trouvée les deux premiers termes $y^\alpha \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y^\beta \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$ se reduiroient à une seule fonction, et partant l'intégrale ne seroit plus complette. Pour remplir ce nombre posons $\beta = \alpha + \omega$, en prenant ω pour un infiniment-petit, et à cause de $y^\beta = y^\alpha . y^\omega$ et de $y^\omega = 1 + \omega\, ly$, on aura $y^\beta = y^\alpha + \omega y^\alpha ly$, d' où les deux premiers termes deviendront $y^\alpha \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y^\alpha \mathfrak{B} : \frac{x}{y} + \omega\, y^\alpha ly\, \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$; où au lieu des deux premiers termes, on peut écrire simplement $y^\alpha \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, et $\mathfrak{B} : \frac{x}{y}$ au lieu de $\omega\, \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$; desorte qu' au lieu des deux premiers termes nous aurons àprésent: $y^\alpha \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y^\alpha ly \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$

Pour donner un exemple de ce cas, supposons que l'équation pour déterminer le nombre n, soit $nn = 0$, et cette équation appartiendra au second degré, pour lequel nous avions en général $A + n\, B + n\, (n - 1)\, C = 0$, où il faudra mettre $A = 0$, $B = 1$ et $C = 1$, de sorte que l' équation differentielle à intégrer sera $P + Q = 0$, ou bien $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} + xx \frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + 2\, xy \frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y} + yy \frac{\partial\partial z}{\partial y^2} = 0$.

Ayant donc pour la résolution de cette équation $nn = 0$, les deux valeurs égales de n seront $\alpha = 0$ et $\beta = 0$; par

par conséquent l'intégrale complette cherchée de cette équation est $z = \mathfrak{A}: \frac{x}{y} + y\,\mathfrak{B}: \frac{x}{y}$; où il vaudra la peine de faire voir comment cette valeur satisfait en général à l'équation proposée. Pour cet effet nous différentierons ces formules selon la régle établie cidessus $\partial . \mathfrak{A}: v = \partial v\, \mathfrak{A}': v$ et $\partial . \mathfrak{A}': v = \partial v\, \mathfrak{A}'': v$, et nous trouverons:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}\mathfrak{A}': \frac{x}{y} + \frac{ly}{y}\mathfrak{B}': \frac{x}{y};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{yy}\mathfrak{A}': \frac{x}{y} + \frac{1}{y}\mathfrak{B}: \frac{x}{y} - \frac{xly}{yy}\mathfrak{B}': \frac{x}{y};$$
$$\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} = \frac{1}{yy}\mathfrak{A}'': \frac{x}{y} + \frac{ly}{yy}\mathfrak{B}'': \frac{x}{y};$$
$$\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{yy}\mathfrak{A}': \frac{x}{y} - \frac{x}{y^3}\mathfrak{A}'': \frac{x}{y} + \frac{1}{yy}\mathfrak{B}': \frac{x}{y} - \frac{ly}{yy}\mathfrak{B}': \frac{x}{y} - \frac{xly}{y^3}\mathfrak{B}'': \frac{x}{y}$$
$$\frac{\partial\partial z}{\partial y^2} = +\frac{2x}{y^3}\mathfrak{A}': \frac{x}{y} + \frac{xx}{y^4}\mathfrak{A}'': \frac{x}{y} - \frac{1}{yy}\mathfrak{B}: \frac{x}{y} - \frac{2x}{y^3}\mathfrak{B}'. \frac{x}{y} + \frac{2xly}{y^3}\mathfrak{B}': \frac{x}{y} + \frac{x^2 ly}{y^4}\mathfrak{B}'': \frac{x}{y},$$

d'où nous tirons la formule suivante:

$$P = \frac{x}{y}\mathfrak{A}': \frac{x}{y} + \frac{xly}{y}\mathfrak{B}': \frac{x}{y} + \mathfrak{B}: \frac{x}{y} - \frac{x}{y}\mathfrak{A}': \frac{x}{y} - \frac{xly}{y}\mathfrak{B}': \frac{x}{y}$$

ou bien: $P = \mathfrak{B}: \frac{x}{y}$. De la même manière on trouvera $Q = -\mathfrak{B}: \frac{x}{y}$, d'où il s'ensuit ouvertement $P + Q = o$. Ce développement paroît d'autant plus nécessaire qu'on ne trouve nulle part des regles particulières pour différentier les fonctions à deux variables.

Considérons aprésent aussi le cas où, outre les deux racines égales $\beta = \alpha$, il se trouve encore une troisième γ qui leur est égale. Or pour les deux premières $\beta = \alpha$ nous venons de reduire leur terme correspondent à cette forme: $y^\alpha: \mathfrak{A}\frac{x}{y} + y^\alpha ly \mathfrak{B}: \frac{x}{y}$, auquel il faut encore ajouter le troisieme terme $y^\gamma \mathfrak{C}: \frac{x}{y}$, qui se réuniroit avec le premier. Mais posons aprésent $\gamma = \alpha + \omega$, et puisque $y^\omega = 1 + \omega ly + \frac{1}{2}\omega^2 (ly^2)$, il faut aller ici jusqu'au troisième terme, puisque le second se réuni-

roit avec le second des termes précédens. De là il est clair que ces trois termes, en changeant les fonctions arbitraires, se reduiront aux trois termes suivans: $y^\alpha \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y^\alpha \, ly \, \mathfrak{B} : \frac{x}{y} + y^\alpha \, (ly)^2 \, \mathfrak{C} : \frac{x}{y}$.

Pour en donner un exemple considérons le cas où l'équation pour le nombre n obtient cette forme: $1 - 3n + 3nn - n^3 = 0$, dont les trois racines sont toutes égales entr' elles, savoir $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Ce cas appartient donc à l'équation différentielle du troisième degré $Az + BP + CQ + DR = 0$, pour laquelle nous avions trouvé:

$$A + n B + n(n-1) C + n(n-1)(n-2) D = 0;$$

ce qui étant développé donne:

$$\begin{aligned} A + n B + nn C + n^3 D &= 0. \\ - n C - 3nn D & \\ + 2n D & \end{aligned}$$

Il faudra donc faire: $A = 1$, $B - C + 2D = -3$, $C - 3D = +3$ et $D = -1$, et partant $C = 0$, $B = -1$ et $A = 1$, de sorte que notre équation différentielle sera: $z - P + 0 . Q - R = 0$, dont l'intégrale complette, à cause de $\alpha = 1$, sera:

$$y \, \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y \, ly \, \mathfrak{B} : \frac{x}{y} + y \, (ly)^2 \, \mathfrak{C} : \frac{x}{y}.$$

Pour éclaircir ceci par un exemple faisons: $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$ et $\mathfrak{C} : \frac{x}{y} = \frac{x}{y}$; de sorte qu' une intégrale particulière sera $x \, (ly)^2$, d'où nous tirons les différentielles suivantes:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (ly)^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x \, ly}{y};$$

$$\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y} = \frac{2 \, ly}{y}; \quad \frac{\partial\partial z}{\partial y^2} = \frac{2x}{yy} - \frac{2x \, ly}{yy};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0; \quad \frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y^2} = \frac{2}{yy} - \frac{2 \, ly}{yy};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial^3 y} = - \frac{4x}{y^3} - \frac{2x}{y^3} + \frac{4x \, ly}{y^3} = - \frac{6x}{y^3} + \frac{4x \, ly}{y^3}.$$

De là nous tirons $z = x \, (ly)^2$; $P = x \, (ly)^2 + 2x \, ly$ et

R =

$R = -2xly$, d' où résulte: $z - P - R = o$; ce qui est parfaitement d' accord.

De là il est déja très évident, que si le nombre n avoit quatre valeurs égales, savoir $\alpha = \beta = \gamma = \delta$, au lieu des quatre termes qui entrent-immédiatement dans l'intégrale, on devra mettre ceux-ci:

$$z = y^\alpha \mathfrak{A}: \frac{x}{y} + y^\alpha ly \mathfrak{B}: \frac{x}{y} + y^\alpha (ly)^2 \mathfrak{C}: \frac{x}{y} + y^\alpha (ly)^3 \mathfrak{D}: \frac{x}{y} + \text{etc.}$$

et partant, quel que puisse être le nombre des racines égales, la reduction de l'intégrale n'aura plus aucune difficulté. Au reste on comprend aisément que dans toutes ces formules les deux lettres x et y pourroient être échangées entr' elles.

Pour prouver cela je ferai voir qu' au lieu des termes: $y^\alpha \mathfrak{A}: \frac{x}{y} + y^\alpha (ly) \mathfrak{B}: \frac{x}{y}$ on pourra écrire: $x^\alpha \mathfrak{A}: \frac{x}{y} + x^\alpha (lx) \mathfrak{B}: \frac{x}{y}$. Pour cet effet j' observe que parceque l'un et l' autre terme renferme une fonction arbitraire de $\frac{x}{y}$, on la pourra multiplier par $\frac{x^\alpha}{y^\alpha}$, ce qui donne $x^\alpha \mathfrak{A}: \frac{x}{y} + x^\alpha (ly) \mathfrak{B}: \frac{x}{y}$; ensuite puisque $l\frac{x}{y} = lx - ly$ est aussi fonction de $\frac{x}{y}$, au lieu de $\mathfrak{A}: \frac{x}{y}$ on pourra écrire: $\mathfrak{A}: \frac{x}{y} + l\frac{x}{y}\ \mathfrak{B}: \frac{x}{y}$, et alors nous aurons $x^\alpha \mathfrak{A}: \frac{x}{y} + x^\alpha (lx) \mathfrak{B}: \frac{x}{y}$; d' où l' on comprend aisément que cette permutation peut toujours avoir lieu.

L' intégration de cette équation différentielle assez générale: $Az + BP + CQ + DR + ES + \text{etc.} = 0$, où P, Q, R, S, etc. marquent les formules différentielles rapportées ci-dessus, pourra être regardée comme un excellent morceau de cette Analyse qui traite des fonctions à deux variables, et qu'il faut bien distinguer de l'analyse ordinaire qui ne roule que sur les fonctions à une seule variable. Car il est aprésent bien clair que ces deux espèces d' analyse

 sont

sont très essentiellement différentes entr' elles, non seulement par rapport aux fonctions qui y sont traitées, mais aussi par rapport aux methodes qu' il y faut employer. C' est pourquoi la dénomination de différences partielles, dont plusieurs Géomètres se servent, pour marquer l' analyse des fonctions à deux variables, ne me paroît pas fort propre pour en exprimer le véritable caractère.

Non obstant cette différence on peut souvent remarquer une belle harmonie entre ces deux espèces d' analyse. Ainsi quand on traite, dans l' analyse ordinaire, cette équation différentielle: $Az + Bx\frac{\partial z}{\partial x} + Cx^2\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + Dx^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \text{etc.} = 0$; et qu' on demande quelle fonction de x on doit donner à la quantité z, pour que cette équation soit remplie: la méthode ordinaire d' intégrer conduit à cette équation algebrique: $A + nB + n:(n-1)C + n(n-1)(n-2)D + n(n-1)(n-2)(n-3)E + \text{etc.} = 0$; d' où il faut tirer toutes les racines α, β, γ, δ, etc. de n, et l' intégrale complette est exprimée de cette manière: $z = \mathfrak{A}x^\alpha + \mathfrak{B}x^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + \text{etc.}$ où les lettres: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. marquent des constantes arbitraires quelconques. Cette forme a donc un très beau rapport avec la forme de l' intégrale que nous avons trouvée ci-dessus pour la fonction z des deux variables de x et y.

ILLU-

ILLUSTRATIO PARADOXI CIRCA PROGRESSIONEM NUMERORUM IDONEORUM SIVE CONGRUORUM

(V. Nov. Act. T. XIV. pag. 51. No. 7.)

Conventui exhibita die 20. Aprilis 1778.

I. Insigne istud paradoxon in hoc consistebat, quod, etiamsi numeri idonei secundum certam legem formentur et progrediantur, multitudo tamen eorum non sit infinita sed tantum vsque ad 65 terminos porrigatur, cujusmodi paradoxon circa nullam adhuc aliam seriem observatum esse memini; neque vero etiam istum finitum terminorum numerum aliter stabilire mihi licuit, nisi quod post terminum 65, qui est 1848, nullus praeterea se obtulerit, etiamsi examen usque ad 10000 et ultra continuaverim.

II. Neque etiam ulla alia via patere videtur ad hoc insigne paradoxon demonstrandum. Quocirca haud parum lucis in hac re maxime abscondita afferetur, quando saltem pro certa specie horum numerorum, veluti quadratorum, demonstrari poterit, eorum multitudinem revera esse terminatam, neque in serie numerorum idoneorum alios numeros quadratos occurrere posse, praeter quinque priores 1, 4, 9, 16 et 25, id quod sequenti modo ex ipsa progressionis lege demonstrabo.

III. Transferamus igitur regulam numeros idoneos inveniendi, loco citato expositam, tantum ad numeros quadratos, quae propterea sequenti modo erit enuncianda:

Ex

Ex serie omnium numerorum quadratorum, pro quolibet numero primo p, excludantur numeri in hac forma contenti $px \quad yy$ et maiores quam $\frac{1}{4}pp$, praeter hos $pp - yy$, quod si pro singulis numeris primis fuerit factum, ex serie numerorum quadratorum relinquentur ii, qui sunt idonei. Inter numeros autem primos loco binarii eius quadratum 4 sumi debere vidimus. Cum autem formula $px - yy$ nullos numeros quadratos involuat, hinc nulla exclusio locum habet.

IV. Idem evenit pro numero primo $p = 3$, si quidem formula $3x - yy$ nullos numeros quadratos involuit, quod idem de omnibus numeris formae $p = 4n - 1$ est tenendum. Si enim formula $(4n - 1)x - yy$ esset quadratum, puta zz, foret summa duorum quadratorum $yy + zz$ divisibilis per $4n - 1$, quod impossibile esse notum est; ex quo intelligitur pro p nobis alios numeros primos non relinqui, nisi in hac forma $4n + 1$ contentos.

V. Sit igitur $p = 5$, ita vt ex serie numerorum quadratorum excludi debeant, qui in forma $5x - yy$ continentur, et qui superant $\frac{1}{4}pp = 6\frac{1}{4}$, exceptis tamen iis, qui in forma $25 - yy$ continentur, qui sunt 9 et 16, vnde omnia quadrata maiora in forma $5x - yy$ contenta excludi debebunt. Cum igitur omnia quadrata per 5 non divisibilia sint vel formae $5x - 1$, vel $5x - 4$, evidens est hinc omnia quadrata per 5 non divisibilia, simulque maiora quam $6\frac{1}{4}$, excludi debere ex serie omnium numerorum quadratorum; hoc ergo facto relinquetur sequens quadratorum series: 1, 4, 9, 16, 25, 10^2, 15^2, 20^2. Hic scilicet post 16 alii quadrati non relinquuntur, nisi quorum radices divisibiles sunt per 5.

VI.

VI. Sequens numerus formae $4x+1$ est $p=13$, vnde numeri excludi debebunt in forma $13x-yy$ contenti, qui quidem sunt maiores quam $42\frac{1}{4}$, exceptis tamen iis, qui in forma $169-yy$ continentur, qui sunt 25 et 144. Praeter hos ergo numeri quadrati excludendi, maiores quam $42\frac{1}{4}$, continentur in forma $13x-yy$, quae forma continet omnes plane quadratos, quorum radices non sunt per 13 divisibiles, sicque his exclusis post 25 alii non relinquentur nisi per 13 divisibiles. Per conditionem autem praecedentem alii non sunt relicti, nisi per 5 divisibiles; ex quibus ergo si auferantur omnes per 13 non diuisibiles, praeter ipsum 25, quia minus quam $42\frac{1}{4}$, alii quadrati non relinquentur, nisi qui simul per 5 et 13 sint divisibiles, qui ergo omnes continentur in forma $(65\alpha)^2$; superstites ergo numeri quadrati erunt: 1, 4, 9, 16, 25, 65^2, 130^2, 195^2, 260^2 etc.

VII. Sequens numerus primus formae $4n+1$ est $p=17$, hincque formula excludendorum erit $17x-yy$, quatenus sunt maiores quam $\frac{1}{4}pp=72\frac{1}{4}$, exceptis tamen iis, qui in formula 17^2-yy continentur, qui sunt 15^2 et 8^2, qui autem per praecedentes conditiones sunt deleti. Ex praecedenti igitur serie omnia quadrata deleri debent per 17 non divisibilia; unde patet post 25 alios non relinqui, nisi qui simul per 5, 13 et 17 sunt divisibiles, qui ergo in hac formula continenter $(5, 13, 17\gamma)^2$, quorum ergo primus est 1105^2.

VIII. Sequens numerus primus formae $4n+1$ est $p=29$, vnde formula numeros excludendos continens est $29x-yy$, quatenus scilicet continet quadratos, ita ut sit $29x=yy+zz$. Haec autem formula omnes plane continet quadra-

quadratos per 29 non divisibiles, quibus ergo a praecedentibus ablatis alii non supererunt, nisi qui in formula $(5, 13, 17, 29\alpha)^2$ continentur, quorum minimus est: 32045.

IX. Quodsi hoc modo sequentes numeros primos formae $4n + 1$ evoluamus, evidens est post quinos quadratos initiales 1, 4, 9, 16 et 25 in infinitum usque nullum alium occurrere idoneum.

X. Si igitur quaestio instituatur de numeris quadratis, qui simul sint idonei, rigide iam est demonstratum tales numeros non dari, praeter hos quinque: 1, 4, 9, 16, 25; vnde iam satis clare intelligere licet, quemadmodum, non obstante lege progressionis, multitudo omnium plane numerorum idoneorum possit esse terminata, ac fortasse hoc simili modo aliquando demonstrari poterit.

XI. In hac demonstratione assumsimus in forma $px - yy$ omnia contineri quadrata, quae non sint per numerum p divisibilia. Est enim $p = 4n + 1$ semper summa duorum quadratorum, quae sit $aa + bb$, ita ut habeamus $(aa + bb)x - yy = zz$, vnde, sumpto $x = ff + gg$, colligitur, in formula $px - yy$ numerum y ad p primum esse debere.

DEMON-

DEMONSTRATIO
INSIGNIS THEOREMATIS NUMERICI CIRCA UNCIAS POTESTATUM BINOMIALIUM.

Auctore *L. EULERO.*

Conventui exhibita die 17. Septembris 1778.

§. 1. Si iste character $(\frac{p}{q})$ designet coëfficientem potestatis x^q, qui ex evolutione Binomii $(1 - x)^p$ oritur, ita ut sit

$$(\frac{p}{q}) = \frac{p}{1} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-2}{3} \cdot \ldots\ldots \frac{p-q+1}{q},$$

non ita pridem ostendi, summam huiusmodi productorum: $(\frac{m}{0})(\frac{n}{c}) + (\frac{m}{1})(\frac{n}{c+1}) + (\frac{m}{2})(\frac{n}{c+2}) +$ etc. semper hac formula exprimi $(\frac{m+n}{m+c}) = (\frac{m+n}{n-c})$, quandoquidem hi duo characteres sunt inter se aequales, quia in genere est $(\frac{p}{q}) = (\frac{p}{p-q})$.

§. 2. Hoc elegans theorema tum temporis deduxi ex casibus specialibus, quibus erat primo $m = 1$, unde fit

$$1(\frac{n}{c}) + 1(\frac{n}{c+1}) = (\frac{1+n}{n-c}) = (\frac{1+n}{1+c}).$$

Deinde sumpto $m = 2$ etiam haud difficulter perspicitur esse

$$1(\frac{n}{c}) + 2(\frac{n}{c+1}) + 1(\frac{n}{c+2}) = (\frac{2+n}{2+c}).$$

Casu autem $m = 3$ habebitur

$$1(\frac{n}{c}) + 3(\frac{n}{c+1}) + 3(\frac{n}{c+2}) + 1(\frac{n}{c+3}) = (\frac{3+n}{3+c})$$

Ex quibus casibus conclusio generalis satis tuto est deducta, ita ut demonstrationi rigidae aequivalens sit censenda.

§. 3. Interim tamen istud ratiocinium non nisi ad casus, quibus m est numerus integer positiuus, extendi potest, etiamsi veritas multo latius patere atque adeo ad omnes plane valores litterae m extendi deprehendatur; unde etiamnunc pro hoc theoremate demonstratio completa desideratur, qua ejus veritas pro omnibus casibus, sive litterae m et n denotent numeros integros, sive positivos, sive negativos, sive integros, sive fractos, ostendatur. Talem igitur demonstrationem hic sum traditurus.

Lemma.

§. 4. Si formula $\frac{x^p}{(1-x)^{q+1}}$ in seriem evoluatur secundum potestates ipsius x procedentem, tum in hac serie potestatis x^n coefficiens erit $(\frac{n-p+q}{q})$. Cum enim sit

$$(1-x)^{-q-1} = 1 + (\frac{q+1}{1})x + (\frac{q+2}{2})xx + (\frac{q+3}{3})x^3 + (\frac{q+4}{4})x^4 \text{ etc.}$$

in genere potestatis x^λ coëfficiens erit $(\frac{q+\lambda}{\lambda})$, qui ergo etiam erit coëfficiens potestatis $x^{p+\lambda}$ ex evolutione formulae $\frac{x^p}{(1-x)^{q+1}}$ resultantis. Fiat nunc $p+\lambda = n$, sive $\lambda = n-p$, atque coefficiens potestatis x^p erit $= (\frac{n-p+q}{n-p}) = (\frac{n-p+q}{q})$.

§. 5. Hoc lemmate praemisso consideremus hanc expressionem: $\frac{z^c}{(1-z)^{c+1}}(1+\frac{z}{1-z})^n = V$, pro qua cum more solito fiat

$$(1+\frac{z}{1-z})^m = 1 + (\frac{m}{1})\frac{z}{1-z} + (\frac{m}{2})\frac{zz}{(1-z)^2} + (\frac{m}{3})\frac{z^3}{(1-z)^3} + \text{etc.}$$

erit per seriem

$$V = \frac{z^c}{(1-z)^{c+1}} + (\frac{m}{1})\frac{z^{c+1}}{(1-z)^{c+2}} + (\frac{m}{2})\frac{z^{c+2}}{(1-z)^{c+3}} + (\frac{m}{3})\frac{z^{c+3}}{(1-z)^{c+4}} \text{ etc.}$$

ubi primo termino praefigi potest character $(\frac{m}{0})$. Concipiantur nunc

nunc singula membra hujus seriei more solito in series evoluta, et ex singulis colligantur termini potestate z^n affecti, atque per lemma praemissum ex primo membro, ob $p = c$ et $q = c$, coefficiens hujus potestatis z^n erit $= (\frac{m}{0})(\frac{n}{c})$. Deinde ex secundo membro, ob $p = c + 1$ et $q = c + 1$, erit ipsius z^n coefficiens $(\frac{m}{1})(\frac{n}{c+1})$. Simili modo ex tertio membro nascitur potestatis z^n coefficiens: $(\frac{m}{2})(\frac{n}{c+2})$; sicque porro. Hinc manifestum est ex tota forma V hujus potestatis z^n coefficientem esse proditurum $= (\frac{m}{0})(\frac{n}{c}) + (\frac{m}{1})(\frac{n}{c+1}) + (\frac{m}{2})(\frac{n}{c+2}) +$ etc. quem brevitatis gratia littera C indicemus, haecque est ea ipsa progressio, cujus summa demonstranda est aequari huic characteri $(\frac{n+m}{m+c})$.

§. 6. Hoc autem facile ostendetur, si modo observemus esse $1 + \frac{z}{1-z} = \frac{1}{1-z}$. Sic igitur forma nostra erit $V = \frac{z^c}{(1-z)^{m+c+1}}$, ex cujus evolutione potestatis z^n coefficiens, ob $p = c$ et $q = m + c$, elicitur $= (\frac{m+n}{m+c}) = (\frac{m+n}{n-c})$. Quare cum hi duo coefficientes ipsius x^n, ex eadem expressione V oriundi, inter se necessario debeant esse aequales, erit utique

$$(\frac{m}{0})(\frac{n}{c}) + (\frac{m}{1})(\frac{n}{c+1}) + (\frac{m}{2})(\frac{n}{c+2}) + \text{etc.} = (\frac{m+n}{n-c})$$

quae est demonstratio maxime rigorosa nostri theorematis, cujus ergo veritas semper subsistit, quicunque numeri litteris m et n tribuantur.

§. 7. Casus hic singularis, quo $m = 0$ et potestas $(1 + \frac{z}{1-z})^m$ abire censenda est in $l(1 + \frac{z}{1-z})$, peculiarem evolutionem postulat. Cum igitur hic sit $V = \frac{z^c}{(1-z)^{c+1}}\, l(1 + \frac{z}{1-z})$, ob

$$l(1 + \frac{z}{1-z}) = \frac{z}{1-z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{zz}{(1-z)^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{z^3}{(1-z)^3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{z^4}{(1-z)^4} \text{ etc.}$$

erit

erit

$$V = \frac{z^{c+1}}{(1-z)^{c+2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z^{c+2}}{(1-z)^{c+3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{z^{c+3}}{(1-z)^{c+4}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{z^{c+4}}{(1-z)^{c+5}} \text{ etc.}$$

§. 8. Hinc jam, ut supra fecimus, investigemus coëfficientem potestatis z^n, atque ex primo membro is prodit $= (\frac{n}{c+1})$; ex secundo membro oritur $- \frac{1}{2} \cdot (\frac{n}{c+2})$; ex tertio membro $\frac{1}{3} \cdot (\frac{n}{c+3})$; ex quarto $- \frac{1}{4} \cdot (\frac{n}{c+4})$, et ita porro; sicque totus coëfficiens potestatis z^n, ex evolutione expressionis V ortus, erit

$$(\frac{n}{c+1}) - \frac{1}{2} \cdot (\frac{n}{c+2}) + \frac{1}{3} \cdot (\frac{n}{c+3}) - \frac{1}{4} \cdot (\frac{n}{c+4}) + \frac{1}{5} \cdot (\frac{n}{c+5}) \text{ etc.} = C.$$

§. 9. Cum vero per transformationem sit
$l(1 + \frac{z}{1-z}) = l\frac{1}{1-z} = -l(1-z)$, erit quoque
$V = - \frac{z^c l \overline{1-z}}{(1-z)^{c+1}}$. Quare cum sit
$-l(1-z) = z + \frac{1}{2} zz + \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{4} z^4 + \frac{1}{5} z^5 + \text{etc.}$
erit $V = \frac{z^{c+1}}{(1-z)^{c+1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^{c+2}}{(1-z)^{c+1}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{z^{c+3}}{(1-z)^{c+1}} + \text{etc.}$
ex cujus evolutione propterea si quaeratur coëfficiens potestatis z^n, is illi, quem modo ante invenimus, aequalis esse debet.

§. 10. Nunc vero per lemma praemissum primum membrum pro hoc coëfficiente praebet $(\frac{n-1}{c})$; secundum membrum autem dat $\frac{1}{2} \cdot (\frac{n-2}{c})$; tertium $= \frac{1}{3} \cdot (\frac{n-3}{c})$, et ita porro; ita ut hinc totus coëfficiens potestatis z^n sit:

$$C = (\frac{n-1}{c}) + \frac{1}{2} \cdot (\frac{n-2}{c}) + \frac{1}{3} \cdot (\frac{n-3}{c}) + \frac{1}{4} \cdot (\frac{n-4}{c}) + \text{etc.}$$

§. 11. Hinc igitur adepti sumus sequentem aequationem inter binas progressiones inventas, quandoquidem semper erit:

$(\frac{n}{c+1})$

$$\left(\frac{n}{c+1}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{c+2}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n}{c+3}\right) - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n}{c+4}\right) \text{ etc.} =$$
$$= \left(\frac{n-1}{c}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n-2}{c}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n-3}{c}\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n-4}{c}\right) + \text{etc.}$$

quae duae progressiones debent esse inter se aequales, quicunque valores litteris n et c tribuantur, cujus veritatis nonnullos casus perpendisse juvabit.

Casus I.

quo $c = 0$

§. 12. Hoc ergo casu casu prior series evadet

$$\left(\frac{n}{1}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n}{3}\right) - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{n}{5}\right) \text{ etc.}$$

cujus progressionis postremus terminus erit $\pm \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)$, quia statim atque in his characteribus numerus inferior superiorem excedit, eorem valores evanescunt, siquidem numeri integri adhibeantur. Posterior vero series evadet:

$$\left(\frac{n-1}{0}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n-2}{0}\right)\ \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n-3}{0}\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n-4}{0}\right) + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{n-5}{0}\right) + \text{etc.}$$

Ubi notandum est, omnium harum formularum $\left(\frac{n-\lambda}{0}\right)$ valorem esse $= 1$, quamdiu λ non excedit n, hancque adeo seriem tantum usque ad terminum $\left(\frac{n-n}{0}\right)$ esse continuandam, hocque modo posterior series ita est repraesentanda: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}$.

§. 13. Hinc ergo nacti sumus sequentem aequationem maxime memorabilem:

$$\left(\frac{n}{1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{n}{3}\right) - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{n}{5}\right) \text{ etc.} \ldots \pm \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right) =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \text{ etc.} \ldots \frac{1}{n}.$$

Cujus veritatem aliquot exemplis ostendamus.

§. 14. Sit 1°. $n = 1$, fiet prior series $\left(\frac{1}{1}\right) = 1$, altera vero pariter dat 1.

2°.

2°. Sit $n = 2$, et ob $(\frac{n}{1}) = 2$ et $(\frac{n}{2}) = 1$, erit prior series $= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; posterior vero series dat $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

3°. Sit $n = 3$, ob $(\frac{n}{1}) = 3$; $(\frac{n}{2}) = 3$ et $(\frac{n}{3}) = 1$, prior series dat $3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$; posterior vero series praebet: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.

4°. Si $n = 4$, ob $(\frac{n}{1}) = 4$; $(\frac{n}{2}) = 6$; $(\frac{n}{3}) = 4$ et $(\frac{n}{4}) = 1$, prior series dabit $4 - \frac{6}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$; altera vero series dat $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, cui ille valor est aequalis, ob $1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

5°. Si $n = 5$, ob $(\frac{n}{1}) = 5$; $(\frac{n}{2}) = 10$; $(\frac{n}{3}) = 10$; $(\frac{n}{4}) = 5$ et $(\frac{n}{5}) = 1$, erit prior series: $5 - \frac{10}{2} + \frac{10}{3} - \frac{5}{4} + \frac{1}{5}$; posterior vero dat $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$, qui valores calculo instituto accurate evadunt aequales.

Simili modo erit quoque:

$$6 - \frac{15}{2} + \frac{20}{3} - \frac{15}{4} + \frac{6}{5} - \frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}.$$

Item erit

$$7 - \frac{21}{2} + \frac{35}{3} - \frac{35}{4} + \frac{21}{5} - \frac{7}{6} + \frac{1}{7} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}.$$

Singulis enim terminis subtractis remanet:

$$6 - 11 + 11\tfrac{1}{3} - 9 + 4 - 1\tfrac{1}{3} = 0.$$

Casus II.

quo $c = 1$

§. 15. Hoc casu erit prior series
$(\frac{n}{2}) - \frac{1}{2}(\frac{n}{3}) + \frac{1}{3}(\frac{n}{4}) - \frac{1}{4}(\frac{n}{5}) + \frac{1}{5}(\frac{n}{6})$ etc. altera vero fit:
$(\frac{n-1}{1}) + \frac{1}{2}(\frac{n-2}{1}) + \frac{1}{3}(\frac{n-3}{1}) + \frac{1}{4}(\frac{n-4}{1})$ etc. quae in has duas resoluitur: $\frac{n}{1} + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{4} + \frac{n}{5} +$ etc.
$- 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 -$ etc. quae eo usque sunt continuandae, quoad superiores termini unitate fiant minores; huic ergo expressioni prior series semper erit aequalis.

§. 16.

§. 16. Sit 1°) $n = 1$, ac prior series tota evanescit, quod etiam in posteriore evenit.

2°) Sit $n = 2$, ac prior series dat 1; posterior vero dat $1 + 0$.

3°) Si $n = 3$, prior series dat $3 - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$; posterior vero series dat $2\frac{1}{2}$.

4°) Si $n = 4$, prior series praebet $6 - \frac{4}{2} + \frac{1}{3}$; posterior vero series dat $4\frac{1}{3}$.

5°) Si $n = 5$, prior series dat $11 - \frac{10}{2} + \frac{5}{3} - \frac{1}{4}$; posterior vero dat $4 + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$.

Casus III.

quo $c = 2$.

§. 17. Hoc ergo casu prior series erit: $\left(\frac{n}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{n}{5}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{n}{6}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{n}{7}\right)$ etc. posterior vero series praebet: $\left(\frac{n-1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{n-3}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{n-4}{2}\right) +$ etc. Hic jam, quamdiu $n < 3$, omnes termini prioris seriei abeunt in nihilum, quod etiam in altera usu venire deprehenditur. Tantum autem hic unicum casum, quo $n = 6$, evoluamus; quo casu prior series evadit: $20 - \frac{15}{2} + \frac{6}{3} - \frac{1}{4}$; altera vero series dat: $10 + \frac{6}{2} + \frac{3}{3} + \frac{1}{4}$.

Nota.

§. 18. In serie posteriore, quae erat: $\left(\frac{n-1}{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n-2}{c}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{n-3}{c}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{n-4}{c}\right) +$ etc. dubium videri potest, quod ea tantum usque ad terminum $\frac{1}{n}\left(\frac{n-n}{c}\right)$ continuari debeat, cum tamen sequentes termini, in quibus superior numerus fit negativus, non evanescant. Verum hic observandum est,

in

in his characteribus numerum inferiorem, immediate ex analysi ortum, conversum esse in suum complementum, siquidem ex forma generali $\frac{z^p}{(1-z)^{q+1}}$ coefficiens ipsius z^n deductus est $\left(\frac{n-p+q}{n-p}\right)$, cujus loco scripsimus $\left(\frac{n-p+q}{q}\right)$, vi aequationis $\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a}{a-b}\right)$. Ubi probe observandum est, talem conversionem non valere, nisi superior numerus fuerit positivus, quemadmodum hactenus assumsimus; unde si etiam ad numeros negativos nostras progressiones extendere velimus, in serie saltem posteriori in singulis characteribus complementa inferiorum numerorum scribi debebunt, hocque modo posterior progressio ita est repraesentanda:

$\left(\frac{n-1}{n-1-c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{n-2}{n-2-c}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{n-3}{n-3-c}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{n-4}{n-4-c}\right)+$ etc.

Hic probe notetur, omnes terminos, ubi inferiores numeri sunt negativi, pro nihilo esse habendos. Ita postremo casu, quo erat $n=6$ et $c=2$, haec progressio erit:

$\left(\frac{5}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{1}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{0}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{-1}\right)$. Hic ergo omnes termini post $\left(\frac{2}{0}\right)$ sequentes evanescunt. Hoc autem observato etiam nostras expressiones ad valores negativos ipsius c extendere licebit.

Casus IV.

quo $c=-1$.

§. 19. Hoc ergo casu prior progressio erit:

$\left(\frac{n}{0}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{n}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{n}{3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{n}{4}\right)$ etc. altera vero progressio nunc ita se habebit:

$\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{n-3}{n-2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{n-4}{n-3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{n-5}{n-4}\right)$ etc. cujus seriei priores termini omnes evanescunt, donec superiores numeri evadant negativi, tum vero sequentium terminorum ii tantum signi-

significatum habent, in quibus numerus inferior adhuc est positivus, vel o; generatim enim omnes isti characteres, simul ac numeri inferiores evadunt negativi, semper evanescunt.

§. 20. Hinc ergo intelligitur, ex progressione posteriore unicum terminum relinqui, qui erit $\frac{1}{n+1}\left(\frac{-1}{0}\right)$, cujus valor est $+\frac{1}{n+1}$, cui ergo progressio prior semper est aequalis. Si enim ponamus $n = 1$, prior progressio dat $1 - \frac{1}{2}$; posterior vero dat etiam $\frac{1}{2}$.

2°. Si $n = 2$, prior series dat $1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$; posterior vero etiam dat $\frac{1}{3}$.

3°. Si $n = 3$, erit $1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.
Similique modo porro habebitur:

$$1 - \frac{4}{2} + \frac{6}{3} - \frac{4}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$
$$1 - \frac{5}{2} + \frac{10}{3} - \frac{10}{4} + \frac{5}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$
etc. etc.

Casus V,

quo $c = -2$.

§. 21. Prior progressio erit:
$\left(\frac{n}{-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{0}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{n}{1}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{n}{3}\right)$ etc. ubi primus terminus evanescit; posterior vero series erit:
$\left(\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n-2}{n}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{n-3}{n-1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{n-4}{n-2}\right)$ etc. cujus terminus generalis est $\frac{1}{\lambda}\left(\frac{n-\lambda}{n-\lambda+2}\right)$. Hic igitur ab initio omnes termini evanescent, donec fiat $\lambda = n + 1$, unde terminus fit $\frac{1}{n+1}\left(\frac{-1}{1}\right) = \frac{-1}{n+1}$, quem sequitur terminus $\frac{1}{n+2}\left(\frac{-2}{0}\right)$, qui adhuc valorem dat $\frac{1}{n+2}$; sequentes autem omnes iterum evanescunt, ita

ut tota posterior series contrahatur in hos duos terminos: $-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{-1}{(n+1)(n+2)}$, qui ergo est valor seriei prioris.

§. 22. Ad hoc ostendendum sit primo $n=1$, et prior series erit $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{0}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

2°. Si $n=2$, habebitur $-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{0}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{1}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{2}\right)$, sive $-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{12}=-\frac{1}{3\cdot 4}$.

Si $n=3$, erit $-\frac{1}{2}+\frac{3}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=-\frac{1}{20}=-\frac{1}{4.5}$.

§. 23. Hic ergo prior progressio erit:

$\left(\frac{n}{-2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{-1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{n}{0}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{n}{1}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{n}{2}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{n}{3}\right)$ etc. ubi duo priores termini in nihilum abeunt. Pro posteriore vero serie, cujus terminus generalis est $\frac{1}{\lambda}\left(\frac{n-\lambda}{n-\lambda+3}\right)$, primus terminus significatum habens est $\frac{1}{n+1}\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{1}{n+1}$; sequens autem terminus erit $\frac{1}{n+2}\left(\frac{-2}{1}\right)=\frac{-2}{n+2}$; denuo sequens erit: $\frac{1}{n+3}\left(\frac{-3}{0}\right)=\frac{1}{n+3}$; reliqui vero omnes evanescunt, ita ut summa prioris semper futura sit $\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+3}=\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

§. 24. Ut rem exemplis illustremus, sit 1°. $n=0$, quo casu summa dabit esse $\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{3}$, ipsa vero progressio dat $\frac{1}{3}\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{1}{3}$.

2°. Casu $n=1$ fit summa $\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{12}$; ipsa vero progressio praebet $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{0}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{1}{12}$.

3°. Casu $n=2$ fit summa $\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{30}$; ipsa autem progressio erit $\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$.

Eo-

Eodem modo habebimus:

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6} = \frac{2}{4 \cdot 5 \cdot 6}$$
$$\frac{1}{3} - \frac{4}{4} + \frac{6}{5} - \frac{4}{6} + \frac{1}{7} = \frac{2}{5 \cdot 6 \cdot 7}$$
$$\frac{1}{3} - \frac{5}{4} + \frac{10}{5} - \frac{10}{6} + \frac{5}{7} - \frac{1}{8} = \frac{2}{6 \cdot 7 \cdot 8}$$

§. 25. Superfluum foret haec ulterius prosequi. Hinc enim satis patet, si fuerit $c = -4$, posteriorem progressionem, atque adeo summam prioris, futuram esse:

$$\frac{-1}{n+1} + \frac{3}{n+2} - \frac{3}{n+3} + \frac{1}{n+4} = \frac{-1 \cdot 2 \cdot 3}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

Prior vero series, omissis terminis nihilo aequalibus, erit:

$$-\tfrac{1}{4}\binom{n}{0} + \tfrac{1}{5}\binom{n}{1} - \tfrac{1}{6}\binom{n}{2} - \tfrac{1}{7}\binom{n}{3} - \tfrac{1}{8}\binom{n}{4}. + \text{etc.}$$

ACCURATIOR EVOLUTIO
PROBLEMATIS DE LINEA BREVISSIMA IN SUPERFICIE QUACUNQUE DUCENDA

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibita die 25. Ianuarii 1779.

§ 1.

Pro superficie, in qua lineam brevissimam duci oportet, data sit inter ternas coordinatas orthogonales x, y, z, haec aequatio differentialis: $\partial z = f\partial x + g\partial y$, ubi f et g sint functiones binarum x et y, ita ut sit $\partial f = \alpha\partial x + \beta\partial y$ et $\partial g = \beta\partial x + \gamma\partial y$. His positis, cum lineae cuiuscunque in hac superficie ductae elementum sit $\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}$, loco ∂z hoc valore posito erit elementum istius curvae $= \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + (f\partial x + g\partial y)^2}$; unde si statuamus $\partial y = p\partial x$, hoc elementum erit $\partial x\sqrt{1 + pp + (f + gp)^2}$.

§ 2. Formula igitur integralis, quam ad minimum revocari oportet, erit $\int\partial x\sqrt{1 + pp + (f + gp)^2}$, quam in Tractatu meo: *Methodus inveniendi lineas curvas Maximi Minimive proprietate gaudentes*, in genere per $\int Z\partial x$ indicavi, ita ut pro hoc casu sit $Z = \sqrt{1 + pp + (f + gp)^2}$. Tum vero, posito $\partial Z = M\partial x + N\partial y + P\partial p$, ostendi naturam Minimi vel Maximi hac aequatione exprimi: $N\partial x = \partial P$, quam ergo patet ad differentialia secundi gradus assurgere.

§ 3.

§. 3. Cum igitur sit $Z^2 = 1 + pp + (f + gp)^2$, differentietur haec formula, ac distinguantur triplicis generis elementa, scilicet ∂x, ∂y, ∂p, hocque modo reperietur:

$$Z \partial Z = \partial x\, (\alpha + \beta p)\, (f + gp) + \partial y\, (\beta + \gamma p)\, (f + gp)$$
$$+ \partial p\, (p + g\,(f + gp)).$$

Cum igitur in genere posuerim $\partial Z = M\partial x + N\partial y + P\partial p$, hoc casu habebimus:

$$M = \frac{(\alpha + \beta p)\,(f + gp)}{Z}$$
$$N = \frac{(\beta + \gamma p)\,(f + gp)}{Z}$$
$$P = \frac{p + g\,(f + gp)}{Z}$$

Hinc ergo (ob $\beta\partial x + \gamma p\partial x = \partial g$) fiet $N\partial x = \frac{\partial g\,(f + gp)}{Z}$, unde aequatio pro curua nostra quaesita erit $\frac{\partial g\,(f + gp)}{Z} = \partial \,.\, \frac{p + g\,(f + gp)}{Z}$. Pro qua aequatione evoluenda ponatur brevitatis gratia $p + g\,(f + gp) = S$, atque habebimus:

$$\frac{\partial g\,(f + gp)}{Z} = \frac{\partial S}{Z} - \frac{S\partial Z}{ZZ}, \text{ siue}$$
$$\partial g\,(f + gp) = \partial S - \frac{S\partial Z}{Z}.$$

Quia igitur est $\partial S = \partial p + \partial g\,(f + gp) + g \,.\, \partial \,.\, (f + gp)$, erit nostra aequatio $o = \partial p + g\partial\,(f + gp) - \frac{S\partial Z}{Z}$. Porro vero est: $\frac{\partial Z}{Z} = \frac{p\partial p + (f + gp)\,\partial\,.\,(f + gp)}{1 + pp + (f + gp)^2}$, quod multiplicari debet per $S = p + g\,(f + gp)$. Hinc multiplicando per denominatorem $1 + pp + (f + gp)^2$, habebimus:

$$o = \partial p + (g - fp)\,\partial\,.\,(f + gp) - gp\partial f\,(f + gp) + \partial p\,(f + gp)^2$$

seu $o = \partial p + (g - fp)\,\partial.(f + gp) + f\partial p\,(f + gp)$, quae aequatio porro transmutatur in hanc formam:

$$o = \partial p\,(1 + ff + gg) + (g - fp)\,(\partial f + p\partial g).$$

§ 4.

§ 4. Quanquam haec aequatio satis est simplex, tamen non patet, quomodo eam ad differentialia primi gradus revocare liceat. Observavi autem sequenti substitutione negotium confici posse, scilicet: $v = \frac{g - fp}{f + gp}$; unde fit $p = \frac{g - fv}{gv + f}$, hinc iam differentiando deducitur $\partial p = - \frac{(ff + gg)\partial v + (1 + vv)(f\partial g - g\partial f)}{(f + gv)^2}$. Porro erit $g - fp = \frac{v(ff + gg)}{f + gv}$, denique $\partial f + p\partial g = \frac{f\partial f + g\partial g + v(g\partial f - f\partial g)}{f + gv}$, quibus substitutis aequatio prodit:

$$o = - \partial v(ff + gg)(1 + ff + gg) + v(ff + gg)(f\partial f + g\partial g)$$
$$+ (1 + vv)(f\partial g - g\partial f) + (ff + gg)(f\partial g - g\partial f).$$

§ 5. Ad hanc aequationem simpliciorem reddendam statuamus $ff + gg = hh$, eritque $f\partial f + g\partial g = h\partial h$, deinde vero sit $\frac{g}{f} = k$, ut fiat $f\partial g - g\partial f = ff\partial k$, sicque aequatio nostra contrahetur in hanc formam:

$$o = - hh\partial v(1 + hh) + h^3 v\partial h + (1 + hh + vv) ff\partial k.$$

Cum autem $g = fk$, erit $ff(1 + kk) = hh$, ideoque $ff = \frac{hh}{1 + kk}$, unde habebimus:

$$o = - \partial v(1 + hh) + vh\partial h + (1 + hh + vv)\frac{\partial k}{1 + kk}$$

quae aequatio porro, ponendo $v = s\sqrt{1 + hh}$, reducitur ad hanc formam:

$$o = - \partial s\sqrt{(1 + hh)} + \frac{\partial k(1 + ss)}{1 + kk}.$$

Nunc igitur quantitatem s a reliquis separatam exhibere licet, cum sit $\frac{\partial s}{1 + ss} = \frac{\partial k}{(1 + kk)\sqrt{1 + hh}}$, quae forma simplicissima esse videtur, ad quam in genere pertingere licet.

§ 4.

§ 6. Quoniam autem hic binas variabiles y et x per eandem z determinare sumus conati, cum tamen omnes tres aequali ratione in calculum ingrediantur, universam hanc quaestionem ita tractare mihi est visum, ut omnes formulae pari ratione tres coordinatas x, y, z involuant, quo pacto speculationi potius consulatur, quam usui, hancque ob rem investigationes sequentes subiungam.

Supplementum.

§ 7. Pro superficie data sit haec aequatio differentialis: $p\partial x + q\partial y + r\partial z = o$, ubi p, q, r sint functiones coordinatarum x, y, z; unde, ut aequatio sit possibilis, haec conditio inesse debet:

$$\frac{p\partial q - q\partial p}{\partial z} + \frac{q\partial r - r\partial q}{\partial x} + \frac{r\partial p - p\partial r}{\partial y} = 0.$$

Hoc posito pro linea brevissima in hac superficie ducenda sequens habebitur aequatio, quam ternae coordinatae x, y, z pari ratione ingrediuntur:

$$\partial\partial x(q\partial z - r\partial y) + \partial\partial y(r\partial x - p\partial z) + \partial\partial z(p\partial y - q\partial x) = o.$$

Vel si brevitatis gratia ponamus:

$$\partial y\partial\partial z - \partial z\partial\partial y = f;$$
$$\partial z\partial\partial x - \partial x\partial\partial z = g;$$
$$\partial x\partial\partial y \; \partial y\partial\partial x = h;$$

erit $fp + gq + hr = o$; tum vero etiam $f\partial x + g\partial y + h\partial z = o$. Deinde si elementum curvae brevissimae ponatur $= \partial s$, erit $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2$; tum vero quoque

$$\frac{\partial\partial s}{\partial s} = \frac{q\partial\partial z - r\partial\partial y}{q\partial z - r\partial y} = \frac{r\partial\partial x - p\partial\partial z}{r\partial x - p\partial z} = \frac{p\partial\partial y - q\partial\partial x}{p\partial y - q\partial x}.$$

Appli-

Applicatio ad superficiem sphaericam.

§ 8. Sit aequatio pro hac superficie $x\partial x + y\partial y + z\partial z = o$, ita ut hic habeamus $p = x$, $q = y$, $r = z$, et prima aequatio pro linea brevissima erit sequens:

$$\partial\partial x(y\partial z - z\partial y) + \partial\partial y(z\partial x - x\partial z) + \partial\partial z(x\partial y - y\partial x) = o,$$

cuius ergo integrale completum est $\alpha x + \beta y + \gamma z = o$, uti ex rei natura patet. Quaestio igitur huc redit, quomodo hoc integrale erui possit.

§. 9. Cum iam altera aequatio sit $fx + gy + hz = o$, si pro hac aequatione ponamus $\Pi = \frac{z\partial x - x\partial z}{y\partial x - x\partial y}$, erit $\partial\Pi = \partial . \frac{z\partial x - x\partial z}{y\partial x - x\partial y}$, ideoque $\partial\Pi = \frac{z\partial\partial x - x\partial\partial z}{y\partial x - x\partial y} - \frac{(z\partial x - x\partial z)(y\partial\partial x - x\partial\partial y)}{(y\partial x - x\partial y)^2}$, sive evoluendo

$$\partial\Pi = \frac{x}{(y\partial x - x\partial y)^2}[(\partial y\partial\partial z - \partial z\partial\partial y)x + (\partial z\partial\partial x - \partial x\partial\partial z)y + (\partial x\partial\partial y - \partial y\partial\partial x)^2]$$

et introductis f, g, h, erit $\partial\Pi = x\frac{(fx + gy + hz)}{(y\partial x - x\partial y)^2}$. Cum autem sit $fx + gy + hz = o$, erit $\partial\Pi = o$, ideoque Π quantitas constans, quam si statuamus $= A$, erit aequatio differentialis primi gradus $\Pi = \frac{z\partial x - x\partial z}{y\partial x - x\partial y}$, ita expressa: $A(y\partial x - x\partial y) = z\partial x - x\partial z$, quae divisa per xx erit integrabilis; fiet enim $\frac{Ay}{x} = \frac{z}{x} + B$, sive $Ay - Bx - z = o$, vel mutatis constantibus $\alpha x + \beta y + \gamma z = o$, quae aequatio cum sit pro plano quocunque per centrum sphaerae ducto, in superficie sphaerica nascentur circuli maximi; unde sequitur omnes circulos maximos esse lineas brevissimas omnium, quae in superficie sphaerae duci possunt.

§ 10.

§ 10. Quoniam in huiusmodi calculis omnia ad unicam variabilem reduci solent, si pro hoc efficiendo ponamus $\partial y = t\partial x$ et $\partial z = u\partial x$, sumto ∂x pro constante, erit prima aequatio vt sequitur:

$$\partial t\,(r - pu) + \partial u\,(pt - q) = 0.$$

At aequatio pro superficie erit $p + qt + ru = 0$; unde cum hinc fiat $p = -qt - ru$, prior aequatio hanc induet formam:

$$\partial t\,(r + qtu + ruu) - \partial u\,(q + rtu + qtt) = 0.$$

Porro erit

$$f = \partial x^2\,(t\partial u - u\partial t);\ g = -\partial x^2\,\partial u;\ h = \partial x^2\,\partial t;$$

tum vero $\partial s^2 = \partial x^2\,(1 + tt + uu)$, et denique

$$\frac{\partial\partial s}{\partial s} = \frac{t\partial t + u\partial u}{1 + tt + uu} = \frac{q\partial u - r\partial t}{qu - rt} = -\frac{-p\partial u}{r - pu} = \frac{p\partial t}{pt - q}.$$

§ 11. At si malimus quartam quandam variabilem, puta angulum Φ introducere, ponendo $\partial x = t\partial\Phi$; $\partial y = u\partial\Phi$; $\partial z = v\partial\Phi$; aequatio pro superficie erit $pt + qu + rv = 0$. Porro pro litteris f, g, h, habebimus

$$f = \partial\Phi^2\,(u\partial v - v\partial u)$$
$$g = \partial\Phi^2\,(v\partial t - t\partial v)$$
$$h = \partial\Phi^2\,(t\partial u - u\partial t)$$

hinc ergo erit $ft + gu + hv = 0$. Aequatio pro linea brevissima erit:

$$fp + gq + hr = p\,(u\partial v - v\partial u) + q\,(v\partial t - t\partial v) + r\,(t\partial u - u\partial t) = 0,$$

denique fiet $\partial s^2 = \partial\Phi^2\,(tt + uu + vv)$, ideoque

$$\frac{\partial\partial s}{\partial s} = \frac{t\partial t + u\partial u + v\partial v}{tt + uu + vv} = \frac{q\partial v - r\partial u}{qv - ru} = \frac{r\partial t - p\partial v}{rt - pv} = \frac{p\partial u - q\partial t}{pu - qt}.$$

§ 12. Cum nobis nulla via pateat, aequationem generalem pro linea breuissima in superficie quacunque ducenda, supra traditam integrandi, etiamsi plures dentur casus, quibus integratio aequationis pro curua succedit, operae pretium erit non nullos eorum hic coronidis loco euoluisse.

§ 13. Exordiamur a casu quo vna quantitatum p, q, r, euanescit. Veluti si fuerit $r = o$, aequatio pro superficie erit $p\partial x + q\partial y = o$, quo ergo casu superficies fit cylindrica, cuius basis per aequationem $p\partial x + q\partial y$ determinatur. At posito in aequatione, pro $\frac{\partial\partial s}{\partial s}$ data, $r = o$, ea fiet $\frac{\partial\partial s}{\partial s} = \frac{\partial\partial z}{\partial z}$, cuius integrale est $l\partial s = l\partial z + l\alpha$, ideoque, sumtis numeris, $\partial s = \alpha\partial z$, sive $\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = \alpha\alpha\partial z^2$, seu $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial z^2 (\alpha\alpha - 1)$. Hinc porro erit

$$z\sqrt{\alpha\alpha - 1} = \int\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2},$$

ubi $\int\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$ exprimit elementum curuae baseos; vnde patet, altitudinem cylindri z semper proportionalem esse arcui baseos.

§ 14. Consideretur casus, quo $p = x$ et $q = y$, ubi ergo aequatio pro superficie erit: $x\partial x + y\partial y + r\partial z = o$, quae continet omnia corpora rotunda seu tornata tornove effecta. Tum autem erit $\frac{\partial\partial s}{\partial s} = \frac{x\partial\partial y - y\partial\partial x}{x\partial y - y\partial x}$, cuius integrale est

$l\partial s = l(x\partial y - y\partial x) + la$, ideoque erit sumtis numeris $\frac{\partial s}{a} = x\partial y - y\partial x$, ideoque $\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{aa} = (x\partial y - y\partial x)$

siue mutata constante

$$(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)\, AA = (x\partial y - y\partial x)^2.$$

Pro

Pro hac aequatione iterum integranda ponatur $x = v$ cos. Φ et $y = v$ sin. Φ, eritque $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial v^2 + vv\partial\Phi^2$; tum vero pro curua erit $v\partial v + r\partial z = o$, vbi r est functio quaedam ipsius v, ita vt $\partial z = -\frac{v\partial v}{r}$. Deinde vero erit $x\partial y - y\partial x = vv\partial\Phi$; hisque omnibus substitutis aequatio nostra erit:

$$AA\left(\partial v^2 + vv\partial\Phi^2 + \frac{vv\partial v^2}{rr}\right) = AA\partial s^2 = v^4\partial\Phi^2,$$

ex qua porro colligitur

$$\partial\Phi^2 = \frac{AA(\partial v^2 + vv\partial v^2)}{v4 - vvAA} = \frac{AA\partial v^2(rr + vv)}{rrvv(vv - AA)}$$

ideoque $\partial\Phi = \frac{A\partial v}{rv}\sqrt{\frac{rr + vv}{vv + AA}}$.

§ 15. Pro aliis casibus aequatio generalis supra tradita magis ad vsum accommodari potest. At primo quidem, quia res tantum pendet a ratione inter quantitates p, q, r, una earum pro lubitu assumi poterit. Sumatur ergo $r = -1$, ut fiat $\partial z = p\partial x + q\partial y$, sintque p et q functiones ipsarum x et y, existente $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$. Ponatur porro $\partial y = \pi\partial x$, eritque $\partial z = (p + \pi q)\partial x$. Deinde, sumto elemento ∂x constante, ita ut sit $\partial\partial x = o$, erit

$$\partial\partial y = \partial\pi\partial x \text{ et } \partial\partial z = (\partial p + \pi\partial q + q\partial\pi)\partial x.$$

Hinc iam ternae illae litterae f, g, h, sequenti modo exprimentur:

$$f = \partial x^2(\pi\partial p - p\partial\pi + \pi\pi\partial q);$$
$$g = -\partial x^2(\partial p + \pi\partial q + q\partial\pi);$$
$$h = \partial\pi\partial x^2;$$

tum vero vidimus aequationem pro linea breuissima fore

$$pf + gq + hr = o,$$

quae ergo hanc induit formam:

$$-\partial\pi(1+pp+qq)+\partial p(\pi p-q)+\pi\partial q(\pi p-q)=0, \text{ seu}$$
$$\partial\pi(1+pp+qq)+(\partial p+\pi\partial q)(q-\pi p))=0.$$

§ 16. Quoniam in hac aequatione potissimum binae formulae $p+\pi q$ et $q-\pi p$ occurrunt, plurimum iuuabit rationem inter eas inducere. Statuatur hunc in finem $\frac{q-\pi p}{p+\pi q}=v$, unde iam fit $\pi=\frac{q-vp}{p+vq}$; tum vero vicissim $q-\pi p=\frac{v(pp+qq)}{p+vq}$, porro autem erit $\partial p+\pi\partial q=\frac{p\partial p+q\partial q+v(q\partial p-p\partial q)}{p+qv}$.
Si nunc ponatur $q=up$, erit $\pi=\frac{u-v}{1+uv}$, hincque $\partial\pi=\frac{\partial u(1+vv)-\partial v(1+uu)}{(1+uv)^2}$. Ponatur porro $pp+qq=tt$, et cum sit $q=up$, erit $pp=\frac{tt}{1+uu}$ et $\partial.\frac{q}{p}=\partial u=\frac{p\partial q-q\partial p}{pp}$, hincque

$$p\partial q-q\partial p=pp\partial u=\frac{tt\partial u}{1+uu},$$

quibus valoribus substitutis, ob $q-\pi p=\frac{vtt}{p(1+vu)}$ et $\partial p+\pi\partial q=\frac{t\partial t-(vtt\partial u):(1+uu)}{p(1+uv)}$, erit

$$0=-\frac{(\partial u(1+vv)-\partial v(1+uu))(1+tt)}{(1+uv)^2}-\frac{vtt(t(1+uu)\partial t-vtt\partial u)}{pp(1+uu)(1+vv)^2}$$

sive

$$(1+tt)(\partial u(1+vv)-\partial v(1+uu))$$
$$+vt((1+uu)\partial t-vt\partial u)=0,$$

quae aequatio porro reducitur ad hanc formam:

$$\partial u((1+vv)(1+tt)-vvtt)-\partial v(1+tt)(1+uu)$$
$$+vt\partial t(1+uu)=0,$$

sive ad hanc concinniorem:

$$\frac{\partial u}{1+uu}(1+vv+tt)-\partial v(1+tt)+vt\partial t=0.$$

Ponatur nunc $v=w\sqrt{1+tt}$, eritque $\partial w=\frac{\partial v(1+tt)-vt\partial t}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}}$

seu

seu erit $\partial v\,(1+tt) - vt\partial t = (1+tt)^{\frac{3}{2}}\,\partial w$;
tum vero erit

$$1+tt+vv = (1+tt)(1+ww),$$

quibus substitutis aequatio nostra ita se habebit

$$\frac{\partial u}{1+uu}(1+tt)(1+ww) - (1+tt)^{\frac{3}{2}}\,\partial w = 0,$$

hinc separando nanciscimur $\frac{\partial u}{1+uu} = \frac{\partial w\sqrt{1+tt}}{1+ww}$, consequenter

$$\frac{\partial w}{1+ww} = \frac{\partial u}{(1+uu)\sqrt{1+tt}},$$

quae ergo aequatio semper integrari potest, quoties t fuerit functio ipsius u, sive quoties $pp+qq$ fuerit functio ipsius $\frac{q}{p}$, sive q functio ipsius p.

§ 17. Evenit autem, ut q sit functio ipsius p, primo si z et y ita determinentur per x et aliam novam variabilem ω, ut sit $y = \mathrm{A}x$ et $z = \mathrm{B}x$, existentibus A et B functionibus quibuscunque ipsius ω. Cum ergo posuerimus $\partial z = p\partial x + q\partial y$, erit

$$\mathrm{B}\partial x + x\partial\mathrm{B} = p\partial x + q\mathrm{A}\partial x + qx\partial\mathrm{A},$$

ubi terminos differentiale ∂x involuentes seorsim inter se comparari oportet, unde fit $p = \mathrm{B} - \mathrm{A}q$; et comparatis seorsim terminis ipsam quantitatem x continentibus, erit $q = \frac{\partial\mathrm{B}}{\partial\mathrm{A}}$, ideoque $p = \frac{\mathrm{B}\partial\mathrm{A} - \mathrm{A}\partial\mathrm{B}}{\partial\mathrm{A}}$. Sicque p et q sunt functiones ipsius ω, ideoque et $tt = pp+qq$ et $u = \frac{q}{p}$ erunt functiones eiusdem quantitatis ω, et $\sqrt{1+tt}$ erit functio ipsius u. Quocirca aequatio supra inventa pro linea brevissima integrationem admittit. Hoc autem casu, quo scilicet $y = \mathrm{A}x$ et $z = \mathrm{B}x$, prodit superficies conica super basi quacunque constructa.

§ 18.

§ 18. Aequatio supra tradita porro fit integrabilis statuendo $y = Ax + C$ et $z = Bx + D$; tum enim erit

$$\partial z = p\partial x + q\partial y = B\partial x + x\partial B + \partial D.$$

et quia $\partial y = A\partial x + x\partial A + \partial C$, erit etiam

$$\partial z = p\partial x + q\partial y = p\partial x + Aq\partial x + xq\partial A + q\partial C$$

ideoque, comparatis inter se membris ipsam quantitatem x continentibus, tum vero iis quae differentiali ∂x affecta sunt, erit

$$B = p + Aq \quad \text{et} \quad \partial B = q\partial A$$

hinc $q = \frac{\partial B}{\partial A}$ et $p = \frac{B\partial A - A\partial B}{\partial A}$. Praeterea vero esse debet $\partial D = q\partial C = \frac{\partial B\partial C}{\partial A}$, sive functiones A, B, C, D, ita debent esse comparatae ut $\partial A\partial D = \partial B\partial C$, quod si contigerit, erunt iterum p et q functiones eiusdem variabilis ω, hincque erit etiam $\sqrt{1 + tt}$ functio ipsius u, quo ergo casu quoque lineam brevissimam definire licebit. Hic vero casus complecti videtur omnes plane superficies, quae in planum explicari possunt.

DE

DE RESOLUTIONE FORMULAE INTEGRALIS

$\int x^{m-1}\,dx\,(\Delta + x^n)^\lambda$.

IN SERIEM SEMPER CONVERGENTEM; UBI SIMUL SERIERUM QUARUNDAM SUMMATIO DIRECTA TRADITUR

AUCTORE

NICOLAO FUSS.

Conventui exhibita die 24. Augusti 1797.

§. 1.

Hujus formulae integratio per seriem infinitam nulla laborat difficultate; vulgaris enim binomii evolutio ejus valorem, quem littera S designemus, statim ita praebet expressum:

$$S = \frac{\Delta^\lambda\, x^m}{m}\left[1 + \frac{\lambda}{m+n}\left(\frac{x^n}{\Delta}\right) + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2\,(m+2n)}\left(\frac{x^n}{\Delta}\right)^2 + \text{etc.}\right]$$

Ista autem series hoc laborat incommodo, quod maxime est divergens, quoties $\frac{x^n}{\Delta}$ unitatem superat, ita ut casu $x^n > \Delta$ ea nullius sit usus. Huic incommodo summus quondam Eulerus remedium attulit in dissertatione eundem, ac praesens, titulum prae se ferente, quam Academia Tomo quarto posthumo Institutionum calculi integralis inseri curavit.

§. 2. Methodus, qua Eulerus loco citato usus est, ut rem brevi complectar, in hoc consistit, ut loco $\Delta + x^n$ scribatur

$(\Delta + a^n)$

$(\Delta + a^n)(1 - (\frac{a^n - x^n}{\Delta + a^n}))$, ita ut, si formula proposita littera S designetur, sit

$$S = (\Delta + a^n)^\lambda \int x^{m-1} \partial x (1 - (\frac{a^n - x^n}{\Delta + a^n}))^\lambda$$

et per seriem infinitam:

$$S = (\Delta + a^n)^\lambda \int x^{m-1} \partial x \left[1 - \left[\tfrac{\lambda}{1}\right] (\frac{a^n - x^n}{\Delta + a^n}) + \left[\tfrac{\lambda}{2}\right] (\frac{a^n - x^n}{\Delta + a^n})^2 - \text{etc.}\right]$$

unde si ponatur

$$\int x^{m-1} \partial x (a^n - x^n)^\theta = A \int x^{m-1} \partial x (a^n - x^n)^{\theta - 1} + B x^m (a^n - x^n)^\theta,$$

differentiando et per $x^{m-1} \partial x (a^n - x^n)^{\theta - 1}$ dividendo fiet

$$a^n - x^n = A + Bm (a^n - x^n) - Bn\theta x^n,$$

unde concluditur fieri debere

$$B = \frac{1}{m + \theta n} \quad \text{et} \quad A = \frac{\theta n a^n}{m + \theta n}$$

Quodsi igitur integrale a termino $x = 0$ usque ad $x = a$ extendatur, membrum algebraicum $B x^m (a^n - x^n)^\theta$ pro utroque termino integrationis evanescit, dummodo exponentes m et θ non fuerint negativi. Sublato igitur e comparatione hoc termino erit

$$\int x^{m-1} \partial x (a^n - x^n)^\theta = \frac{\theta n a^n}{m + \theta n} \int x^{m-1} \partial x (a^n - x^n)^{\theta - 1}$$

Hac reductione in usum vocata pro terminis integrationis stabilitis erit

$$\int x^{m-1} \partial x = \frac{a^m}{m}$$

$$\int x^{m-1} \partial x (a^n - x^n) = \frac{n a^n}{m + n} \cdot \frac{a^m}{m}$$

$$\int x^{m-1} \partial x (a^n - x^n)^2 = \frac{2 n a^n}{m + 2n} \cdot \frac{n a^n}{m + n} \cdot \frac{a^m}{m}$$

$$\int x^{m-1} \partial x (a^n - x^n)^3 = \frac{3 n a^n}{m + 3n} \cdot \frac{2 n a^n}{m + 2n} \cdot \frac{n a^n}{m + n} \cdot \frac{a^m}{m}$$

etc. etc.

quibus substitutis integrale formulae propositae, ab $x = 0$ ad $x = a$ extensum, si loco a quantitas variabilis x iterum restitua-

tuatur, sequenti serie semper convergente erit expressum:

$$S = \frac{x^m (\Delta + x^n)^\lambda}{m} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{\lambda n}{m+n} \left(\frac{x^n}{\Delta + x^n}\right) + \frac{\lambda n}{m+n} \cdot \frac{(\lambda - 1) n}{m + 2n} \left(\frac{x^n}{\Delta + x^n}\right)^2 \\ - \frac{\lambda n}{m+n} \cdot \frac{(\lambda - 1) n}{m + 2n} \cdot \frac{(\lambda - 2) n}{m + 3n} \left(\frac{x^n}{\Delta + x^n}\right)^3 + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

§. 3. Haec ingeniosa resolutio primo intuitu suspecta quodammodo videtur, ideo quod series generalis ex casu particulari, quo $x = a$, est deducta, restituendo post integrationem x loco a; at principiis, quibus resolutio innititur, rite perpensis, omne dubium evanescit. Nihilo minus tamen methodus desiderari potest, istam resolutionem ita instituendi, ut non opus sit terminos integrationis stabilire in natura quaestionis, generaliter conceptae, minime positos. Hujusmodi methodum, etiam simplicitate conspicuam, problemati proposito accommodare hic constitui.

§. 4. Hunc in finem formulam integralem propositam in aequationem differentialem convertamus, ponendo

$$\int x^{n-1} \partial x (\Delta + x^n)^\lambda = v x^m (\Delta + x^n)^\lambda$$

eritque sumtis utrinque differentialibus

$$x^{n-1} \partial x (\Delta + x^n)^\lambda = x^m (\Delta + x^n)^\lambda \partial v + v \cdot \partial \cdot x^m (\Delta + x^n)^\lambda.$$

Hinc dividendo per $x^m (\Delta + x^n)^\lambda$ prodit

$$\frac{\partial x}{x} = \partial v + v \partial . \log . x^m (\Delta + x^n)^\lambda$$

quod ita repraesentare licet:

$$\frac{\partial x}{x} = \partial v + v \partial . (m l x + \lambda l (\Delta + x^n))$$

ubi si postremum membrum actu differentietur, oritur ista aequatio:

$$\frac{\partial x}{x} = \partial v + \frac{m v \partial x}{x} + \frac{\lambda n x^{n-1} v \partial x}{\Delta + x^n}$$

§. 5. Statuatur nunc $\frac{x^n}{\Delta + x^n} = z$, eritque $x^n = \frac{\Delta z}{1 - z}$, tum vero $n x^{n-1} \partial x = \frac{\Delta \partial z}{(1 - z)^2}$ atque $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial z}{n(z - zz)}$, quibus in aequatione illa substitutis nanciscimur istam:

$$\frac{\partial z}{n(z - zz)} = \partial v + \frac{m v \partial z}{n(z - zz)} + \frac{\lambda v \partial z}{1 - z}$$

quam sub hac forma repraesentasse juvabit:

$$1 = n z \frac{\partial v}{\partial z} - n z z \frac{\partial v}{\partial z} + m v + \lambda n v z$$

quo commodius eam in seriem infinitam convertere liceat.

§. 6. Hunc in finem fingatur haec series pro littera v:

$$v = A + B z + C z^2 + D z^3 + E z^4 + \text{etc.}$$

unde oriuntur sequentes series:

$$+ nz \frac{\partial v}{\partial z} = \quad + nBz + 2nCz^2 + 3nDz^3 + \text{etc.}$$
$$- nzz \frac{\partial v}{\partial z} = \quad - \quad - nBz^2 - 2nCz^3 - \text{etc.}$$
$$+ mv = mA + mBz + mCz^2 + mDz^3 + \text{etc.}$$
$$+ \lambda nvz = \quad + \lambda nAz + \lambda nBz^2 + \lambda nCz^3 + \text{etc.}$$

quae sequentes relationes coëfficientium A, B, C, D etc. suppeditant.

$$m A = 1;$$
$$(m + n) B = - \lambda n A;$$
$$(m + 2n) C = - (\lambda - 1) n B;$$
$$(m + 3n) D = - (\lambda - 2) n C;$$
$$(m + 4n) E = - (\lambda - 3) n D;$$
etc. etc.

unde coëfficientes A, B, C, D, etc. sequenti modo determinantur:

$$A = \frac{1}{m};$$

$$A = \frac{1}{m};$$
$$B = -\frac{\lambda n}{m(m+n)};$$
$$C = +\frac{\lambda(\lambda-1)n^2}{m(m+n)(m+2n)};$$
$$D = -\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)n^3}{m(m+n)(m+2n)(m+3n)};$$
$$E = +\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)n^4}{m(m+n)(m+2n)(m+3n)(m+4n)};$$

etc. etc.

qui si substituantur in serie pro v assumta, formula integralis proposita

$$S = \int x^{m-1}\partial x(\Delta + x^n)^\lambda$$

sequenti modo per seriem semper convergentem erit expressa:

$$S = \frac{x^m(\Delta + x^n)^\lambda}{m}\left\{\begin{array}{l} 1 - \frac{\lambda n}{m+n}\left(\frac{x^n}{\Delta + x^n}\right) + \frac{\lambda n}{m+n}\cdot\frac{(\lambda-1)n}{m+2n}\left(\frac{x^n}{\Delta + x^n}\right)^2 \\ - \frac{\lambda n}{m+n}\cdot\frac{(\lambda-1)n}{m+2n}\cdot\frac{(\lambda-2)n}{m+3n}\left(\frac{x^n}{\Delta + x^n}\right)^3 + \text{etc.}\end{array}\right\}$$

quae cum Euleriana supra §. 3. exhibita perfecte congruit, semperque manifesto convergit, quicunque valores variabili x et constanti Δ tribuantur.

§. 7. Sumamus $\lambda = -1$, $m = 1$, $n = 2$ et $\Delta = 1$, eritque formula integralis proposita

$$S = \int\frac{x}{1+xx} = \text{A. tag. } x$$

series vero convergens hoc casu fiet

$$S = \frac{x}{1+xx}\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{2}{3}\left(\frac{xx}{1+xx}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{xx}{1+xx}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{xx}{1+xx}\right)^3 \\ + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\left(\frac{xx}{1+xx}\right)^4 + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}\left(\frac{xx}{1+xx}\right)^5 + \text{etc.}\end{array}\right\}$$

quae est ea ipsa series, qua Eulerus usus est ad eas series maxime convergentes inveniendas, quibus ratio peripheriae circuli ad diametrum vero proxime exhiberi potest. In dissertatione

super hoc argumento, tomo XI. Novorum Actorum inserta, Eulerus duas methodos exhibuit ad istam seriem perveniendi, quarum utraque calculos satis prolixos requirit. Subsidio methodi hic in genere adhibitae res facillime perficitur, quod sequenti modo ostendisse operae pretium erit.

§. 8. Ponatur commodioris calculi gratia

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - xx}} = s \sqrt{1 - xx}$$

(si enim poneremus $\int \frac{\partial x}{1 + xx} = \frac{sx}{1 \; xx}$, aequatio differentialis prodiret aliquanto magis complicata), eritque sumtis differentialibus

$$\frac{\partial x}{\sqrt{1 - xx}} = \partial s \sqrt{1 - xx} - \frac{sx \partial x}{\sqrt{1 - xx}}$$

quam aequationem ita repraesentemus:

$$1 = \frac{\partial s}{\partial x} - xx \frac{\partial s}{\partial x} - sx$$

Jam fingatur haec series.

$$s = x + A x^3 + B x^5 + C x^7 + D x^9 + \text{etc.}$$

ex qua conficitur

$$+ \frac{\partial s}{\partial x} = 1 + 3 A x^2 + 5 B x^4 + 7 C x^6 + 9 D x^8 + \text{etc.}$$

$$- xx \frac{\partial s}{\partial x} = - \quad x^2 - 3 A x^4 - 5 B x^6 + 7 C x^8 - \text{etc.}$$

$$- s x = - \quad x^2 - A x^4 - B x^6 - C x^8 - \text{etc.}$$

hincque deducuntur sequentes valores:

$$A = \tfrac{2}{3}; \quad B = \tfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}; \quad C = \tfrac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}; \quad D = \tfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}; \text{ etc.}$$

consequenter habebimus

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - xx}} = \sqrt{1 - xx} \, [x + \tfrac{2}{3} x^3 + \tfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} x^5 + \tfrac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot x^7 + \text{etc.}]$$

ita ut, ob $\int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - xx}} = \text{A sin.}\, x = \text{A tag.}\, \frac{x}{\sqrt{1 - xx}}$, sit

A tag.

$$A\,\mathrm{tag.}\,\frac{x}{\sqrt{1-xx}} = x\sqrt{1-xx}\left[1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2.4}{3.5}x^4 + \frac{2.4.6}{3.5.7}x^6 + \text{etc.}\right]$$

unde posito $\frac{x}{\sqrt{1-xx}} = t$, ob $x = \frac{t}{\sqrt{1+tt}}$, elicitur

$$A\,\mathrm{tg.}\,t = \frac{t}{1+tt}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{tt}{1+tt}\right) + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)^3 + \text{etc.}\right]$$

quae est ipsa series Euleri, pag. 137. et 139. Nov. Act. Tomo XI. per alias methodos eruta.

§. 9. Alius casus specialis, aeque notatu dignus ac ille quem supra §. 7. tractavimus, oritur ex positione $\Delta = 0$ et $\lambda = -\frac{\mu}{n}$; tum enim formula integralis proposita fit

$$S = \int x^{m-\mu-1}\partial x = \frac{x^{m-\mu}}{m-\mu}$$

series vero hoc casu erit

$$S = \frac{x^{m-\mu}}{m}\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{\mu}{m+n} + \frac{\mu}{m+n}\cdot\frac{\mu+n}{m+2n} + \frac{\mu}{m+n}\cdot\frac{\mu+n}{m+2n}\cdot\frac{\mu+2n}{m+3n} \\ + \frac{\mu}{m+n}\cdot\frac{\mu+n}{m+2n}\cdot\frac{\mu+2n}{m+3n}\cdot\frac{\mu+3n}{m+4n} + \text{etc.}\end{array}\right\}$$

quibus valoribus S inter se comparatis, nanciscimur hanc seriei inventae summam:

$$\frac{m}{m-\mu} = 1 + \frac{\mu}{m+n} + \frac{\mu}{m+n}\cdot\frac{\mu+n}{m+2n} + \frac{\mu}{m+n}\cdot\frac{\mu+n}{m+2n}\cdot\frac{\mu+2n}{m+3n} + \text{etc.}$$

quae summatio, inquit Eulerus (Calc. Integr. T. IV. pag. 69.) eo magis est notatu digna, quod vix ulla via patet, ejus veritatem investigandi.

§. 10. Interim tamen duas Dissertationis auctor loco citato vias ingressus est ad istam veritatem pertingendi. In prima ostendit, si a summa inventa successive omnes seriei termini subtrahantur, remansurum fore productum infinitum, de cujus porro valore probat, eum semper nihilo esse aequalem. In altera parte ex positione

x^{μ}

$$x^{\mu}(1-x^n)^{\frac{m-\mu}{n}} = A\int x^{\mu-1}\,\partial x\,(1-x^n)^{\frac{m-\mu}{n}} + B\int x^{\mu-1}\,\partial x\,(1-x^n)^{\frac{m-\mu-n}{n}}$$

fit $A = \mu$ et $B = -(m-\mu)$, hinc, integralibus ab $x = 0$ ad $x = 1$ sumtis, $\dfrac{\int x^{\mu-1}\,\partial x\,(1-x^n)^{\frac{m-\mu-n}{n}}}{\int x^{\mu-1}\,\partial x\,(1-x^n)^{\frac{m-\mu}{n}}} = \dfrac{\mu}{m-\mu}$; ex integralium autem relatione et evolutione porro nascitur series supra exhibita.

§. 11. Iis quibus observationes Euleri circa hanc summationem singularem gratae fuere, certe non displicebit animadversio, eandem quoque contineri in summatione illa generali Tomo IV. calculi Integralis, pag. 583. exhibita, et quidem in Exemplo primo §. 33.

$$\frac{q}{(q+n)\left(\frac{p+n}{q+n}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)} - \frac{\left(\frac{n}{1}\right)}{\left(\frac{p+1}{q}\right)} + \frac{\left(\frac{n}{2}\right)}{\left(\frac{p+2}{q}\right)} - \frac{\left(\frac{n}{3}\right)}{\left(\frac{p+3}{q}\right)} + \text{etc.}$$

Posito enim $p = q$ erit

$$\left(\frac{p}{q}\right) = 1$$
$$\left(\frac{p+1}{q}\right) = \frac{q+1}{1}$$
$$\left(\frac{p+2}{q}\right) = \frac{q+1}{1}\cdot\frac{q+2}{2}$$
$$\left(\frac{p+3}{q}\right) = \frac{q+1}{1}\cdot\frac{q+2}{2}\cdot\frac{q+3}{3}$$
$$\left(\frac{p+4}{q}\right) = \frac{q+1}{1}\cdot\frac{q+2}{2}\cdot\frac{q+3}{3}\cdot\frac{q+4}{4}$$
etc. etc.

tum vero erit, ut constat

$$\left(\frac{n}{1}\right) = \frac{n}{1}$$
$$\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}$$
$$\left(\frac{n}{3}\right) = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}$$
$$\left(\frac{n}{4}\right) = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}$$
etc. etc.

con-

consequenter habebimus

$$\frac{q}{q+n} = 1 - \frac{n}{q+1} + \frac{n}{q+1} \cdot \frac{n-1}{q+2} - \frac{n}{q+1} \cdot \frac{n-1}{q+2} \cdot \frac{n-2}{q+3} + \text{etc.}$$

Ponatur $q = \frac{m}{n}$ et $n = -\frac{\mu}{n}$, eritque

$$\frac{m}{m-\mu} = 1 + \frac{\mu}{m+n} + \frac{\mu}{m+n} \cdot \frac{\mu+n}{m+2n} + \frac{\mu}{m+n} \cdot \frac{\mu+n}{m+2n} \cdot \frac{\mu+2n}{m+3n} + \text{etc.}$$

quae est ipsa summatio §. 9. inventa.

§. 12. Datur autem methodus facillima ac directa istam seriem summandi, quae ita se habet. Ponatur summa incognita seriei $= s$, eritque

$$s - 1 = \frac{\mu}{m+n} + \frac{\mu}{m+n} \cdot \frac{\mu+n}{m+2n} + \frac{\mu}{m+n} \cdot \frac{\mu+n}{m+2n} \cdot \frac{\mu+2n}{m+3n} + \text{etc.}$$

Nunc singulas has fractiones sequenti modo in duas discerpamus, alteram positivam, alteram negativam:

$$\frac{\mu}{m+n} = \frac{\mu}{m-\mu} - \frac{\mu}{m-\mu} \cdot \frac{\mu+n}{m+n};$$

$$\frac{\mu+n}{m+2n} = \frac{\mu+n}{m-\mu} - \frac{\mu+n}{m-\mu} \cdot \frac{\mu+2n}{m+2n};$$

$$\frac{\mu+2n}{m+3n} = \frac{\mu+2n}{m-\mu} - \frac{\mu+2n}{m-\mu} \cdot \frac{\mu+3n}{m+3n};$$

$$\frac{\mu+3n}{m+4n} = \frac{\mu+3n}{m-\mu} - \frac{\mu+3n}{m-\mu} \cdot \frac{\mu+4n}{m+4n};$$

etc. etc.

quibus substitutis erit

$$s - 1 = \frac{\mu}{m-\mu} - \frac{\mu}{m-\mu} \cdot \frac{\mu+n}{m+n} - \frac{\mu}{m-\mu} \cdot \frac{\mu+n}{m+n} \cdot \frac{\mu+2n}{m+2n} - \text{etc.}$$

$$+ \frac{\mu}{m-\mu} \cdot \frac{\mu+n}{m+n} + \frac{\mu}{m-\mu} \cdot \frac{\mu+n}{m+n} \cdot \frac{\mu+2n}{m+2n} + \text{etc.}$$

hincque deletis terminis se mutuo destruentibus sequitur fore $s - 1 = \frac{\mu}{m-\mu}$. Remanet quidem praeter hunc terminum positivum adhuc negativus $- \frac{\mu}{m-\mu} \cdot \frac{\mu+n}{m+n} \cdot \frac{\mu+2n}{m+2n} \cdot \ldots \cdot \frac{\mu+in}{m+in}$, denotante i numerum infinitum. De hoc producto autem demonstratum

tum est, ejus valorem nihilo esse aequalem (Calc. Int. T. IV. pag. 70.), consequenter summa seriei quaesita erit $s = \frac{m}{m-\mu}$. Ex ista summandi methodo simul perspicua fit ratio, cur summa litteram n non involvat.

§. 13. Simili modo quoque demonstrare licet hujus seriei latius patentis:

$$s = 1 + \frac{\mu}{m+\alpha} + \frac{\mu}{m+\alpha} \cdot \frac{\mu+\alpha}{m+\beta} + \frac{\mu}{m+\alpha} \cdot \frac{\mu+\alpha}{m+\beta} \cdot \frac{\mu+\beta}{m+\gamma} + \text{etc.}$$

summam etiam fore $s = \frac{m}{m-\mu}$. Est enim

$$\frac{\mu}{m+\alpha} = \frac{\mu}{m-\mu} - \frac{\mu}{m-\mu} \cdot \frac{\mu+\alpha}{m+\alpha}$$

$$\frac{\mu+\alpha}{m+\beta} = \frac{\mu+\alpha}{m-\mu} - \frac{\mu+\alpha}{m-\mu} \cdot \frac{\mu+\beta}{m+\beta}$$

$$\frac{\mu+\beta}{m+\gamma} = \frac{\mu+\beta}{m-\mu} - \frac{\mu+\beta}{m-\mu} \cdot \frac{\mu+\gamma}{m+\gamma}$$

etc. etc.

unde substituendo elicitur

$$s - 1 = \frac{\mu}{m-\mu} - \frac{\mu}{m-\mu} \cdot \frac{\mu+\alpha}{m+\alpha} - \frac{\mu}{m-\mu} \cdot \frac{\mu+\alpha}{m+\alpha} \cdot \frac{\mu+\beta}{m+\beta} - \text{etc.}$$
$$+ \frac{\mu}{m-\mu} \cdot \frac{\mu+\alpha}{m+\alpha} + \frac{\mu}{m-\mu} \cdot \frac{\mu+\alpha}{m+\alpha} \cdot \frac{\mu+\beta}{m+\beta} + \text{etc.}$$

ubi omnes termini primum sequentes se mutuo destruunt, ita ut sit $s = \frac{m}{m-\mu}$, quemadmodum etiam Eulerus, loco citato, §. 20, per aliam methodum ostendit.

§. 14. Ex summationibus modo traditis facile intelligere licet, istam summandi methodum in genere adhiberi posse pro summatione seriei

$$s = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta}{b} + \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta}{b} \cdot \frac{\gamma}{c} + \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta}{b} \cdot \frac{\gamma}{c} \cdot \frac{\delta}{d} + \text{etc.}$$

dum

dum ponitur

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\alpha}{a-\beta} - \frac{\alpha}{a-\beta} \cdot \frac{\beta}{a}$$
$$\frac{\beta}{b} = \frac{\beta}{b-\gamma} - \frac{\beta}{b-\gamma} \cdot \frac{\gamma}{b}$$
$$\frac{\gamma}{c} = \frac{\gamma}{c-\delta} - \frac{\gamma}{c-\delta} \cdot \frac{\delta}{c}$$

etc. etc.

summamque fore $s = \frac{\alpha}{a-\beta}$, dummodo a, b, c, etc. α, β, γ, etc. ita capiantur, ut sit

$$a - \beta = b - \gamma = c - \delta = d - \varepsilon = \text{etc.}$$

quemadmodum in binis illis seriebus §§. 12. et 13. evenit. Ita quoque seriei

$$s = \frac{\alpha}{a+\beta} + \frac{\alpha}{a+\beta} \cdot \frac{\beta}{a+\gamma} + \frac{\alpha}{a+\beta} \cdot \frac{\beta}{a+\gamma} \cdot \frac{\gamma}{a+\delta} + \text{etc.}$$

summa erit $s = \frac{\alpha}{a}$.

§. 15. Ex his intelligitur, innumeras exhiberi posse series, quarum summa dato numero sit aequalis. Ita verbi gratia erit

$$1 = \frac{1}{1+\beta} + \frac{}{1+\beta} \cdot \frac{\beta}{1+\gamma} + \frac{1}{1+\beta} \cdot \frac{\beta}{1+\gamma} \cdot \frac{\gamma}{1+\delta} + \text{etc.}$$
$$1 = \frac{2}{2+\beta} + \frac{2}{2+\beta} \cdot \frac{\beta}{2+\gamma} + \frac{2}{2+\beta} \cdot \frac{\beta}{2+\gamma} \cdot \frac{\gamma}{2+\delta} + \text{etc.}$$
$$1 = \frac{3}{3+\beta} + \frac{3}{3+\beta} \cdot \frac{\beta}{3+\gamma} + \frac{3}{3+\beta} \cdot \frac{\beta}{3+\gamma} \cdot \frac{\gamma}{3+\delta} + \text{etc.}$$

etc. etc.

ubi loco β, γ, δ, etc. numeros quoslibet scribere licebit.

§. 16. Transformemus seriem illam generalem §. 14. consideratam in fractionem continuam, ponendo

$$s = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha\beta}{ab} + \frac{\alpha\beta\gamma}{abc} + \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{abcd} + \text{etc.}$$
$$t = \frac{\beta}{b} + \frac{\beta\gamma}{bc} + \frac{\beta\gamma\delta}{bcd} + \frac{\beta\gamma\delta\varepsilon}{bcde} + \text{etc.}$$
$$u = \frac{\gamma}{c} + \frac{\gamma\delta}{cd} + \frac{\gamma\delta\varepsilon}{cde} + \frac{\gamma\delta\varepsilon\zeta}{cdef} + \text{etc.}$$
$$v = \frac{\delta}{d} + \frac{\delta\varepsilon}{de} + \frac{\delta\varepsilon\zeta}{def} + \frac{\delta\varepsilon\zeta\eta}{defg} + \text{etc.}$$
etc. etc.

ita ut sit

$$s = \frac{\alpha + \alpha t}{a}; \quad t = \frac{\beta + \beta u}{b}; \quad u = \frac{\gamma + \gamma v}{c}; \quad \text{etc.}$$

Hinc porro formentur sequentes fractiones:

$$\frac{1}{s} = \frac{a}{\alpha + \alpha t} = \frac{a}{\alpha} - \frac{at:\alpha}{1+t} = \frac{a}{\alpha} - \frac{a:\alpha}{1+\frac{1}{t}}$$
$$\frac{1}{t} = \frac{b}{\beta + \beta u} = \frac{b}{\beta} - \frac{bu:\beta}{1+u} = \frac{b}{\beta} - \frac{b:\beta}{1+\frac{1}{u}}$$
$$\frac{1}{u} = \frac{c}{\gamma + \gamma v} = \frac{c}{\gamma} - \frac{cv:\gamma}{1+v} = \frac{c}{\gamma} - \frac{c:\gamma}{1+\frac{1}{v}}$$
etc. etc.

unde successive substituendo adipiscimur:

$$\frac{1}{s} = \frac{a}{\alpha} - \cfrac{a:\alpha}{+\frac{b}{\beta} - \cfrac{b:\beta}{1+\frac{c}{\gamma} - \cfrac{c:\gamma}{1+\frac{d}{\delta} - \cfrac{d:\delta}{1+\frac{e}{\varepsilon} - \text{etc.}}}}}$$

quam porro fractionem continuam sub hac forma repraesentare licet:

$$\frac{a}{s} = a - \cfrac{\alpha\beta}{b+\beta - \cfrac{b\gamma}{c+\gamma - \cfrac{c\delta}{d+\delta - \cfrac{d\varepsilon}{e+\varepsilon - \text{etc.}}}}}$$

§. 17.

§. 17. Quodsi igitur loco litterarum a, b, c, d, etc. scribatur $a+\beta$, $a+\gamma$, $a+\delta$, $a+\varepsilon$, etc., series prodibit summabilis illa

$$s = \frac{\alpha}{a+\beta} + \frac{\alpha}{a+\beta} \cdot \frac{\beta}{a+\gamma} + \frac{\alpha}{a+\beta} \cdot \frac{\beta}{a+\gamma} \cdot \frac{\gamma}{a+\delta} + \text{etc.}$$

et fractio continua haec:

$$\frac{\alpha}{s} = a+\beta - \cfrac{\beta(a+\beta)}{a+\beta+\gamma - \cfrac{\gamma(a+\gamma)}{a+\gamma+\delta - \cfrac{\delta(a+\delta)}{a+\delta+\varepsilon - \cfrac{\varepsilon(a+\varepsilon)}{a+\varepsilon+\zeta - \text{etc.}}}}}$$

quae ideo est notatu digna, quod ejus valor, ob $s = \frac{\alpha}{a}$ (§. 14.) sit $\frac{\alpha}{s} = a$, quicunque valores litteris β, γ, δ, etc. tribuantur.

§. 18. Quodsi seriem illam ex formula nostra integrali in titulo exposita derivatam etiam in fractionem continuam transformare velimus, in §. praecedente ponamus

$$\begin{array}{ll} \alpha = \mu; & a = m+n \\ \beta = \mu+n; & b = m+2n \\ \gamma = \mu+2n; & c = m+3n \\ \delta = \mu+3n; & d = m+4n \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

fietque series

$$s = \frac{\mu}{m+n} + \frac{\mu}{m+n} \cdot \frac{\mu+n}{m+2n} + \frac{\mu}{m+n} \cdot \frac{\mu+n}{m+2n} \cdot \frac{\mu+2n}{m+3n} + \text{etc.}$$

et fractio continua

$$\frac{\mu}{s} = m+\mu+2n - \cfrac{(\mu+n)(m+\mu+2n)}{m+2\mu+4n - \cfrac{(\mu+2n)(m+\mu+3n)}{m+2\mu+6n - \cfrac{(\mu+3n)(m+\mu+4n)}{m+2\mu+8n - \text{etc.}}}}$$

cujus valor igitur, ob $s = \frac{\mu}{m-\mu}$ (§. 12.), erit
$\frac{\mu}{s} = m - \mu$, ita ut sit

$$z = \cfrac{m+\mu+2n}{m+2\mu+4n-\cfrac{(\mu+2n)(m+\mu+3n)}{m+2\mu+6n-\cfrac{(\mu+3n)(m+\mu+4n)}{m+2\mu+8n-\cfrac{(\mu+4n)(m+\mu+5n)}{m+2\mu+10n-etc.}}}}$$

quicunque numeri pro litteris m, n et μ assumantur, haecque fractio continua, ideo quod ejus valor tam simpliciter per binarium exprimitur, non minus curiosa mihi visa est quam summatio seriei, ex qua eam deduxi.

§. 19. Cum summationem illam generalem (Calc. Integr. Tom. IV. pag. 583) ad seriem nostram (§. 11) accommodarem, in oculos incidit summatio illa prorsus singularis exempli secundi (§. 38):

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{q+1} + \frac{2(q-1)}{(q+1)(q+2)} + \frac{3(q-1)(q-2)}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \frac{4(q-1)(q-2)(q-3)}{(q+1)(q+2)(q+3)(q+4)} \text{ etc.}$$

circa quam observationes nonnullas, quibus ansam dedit, huic argumento affini adnectere eo minus dubito, quod Eulerus, ad veritatem illius summationis probandam, ejus tantum consensum cum summationibus quibusdam jam notis, ex valoribus aliquot numericis litterae q deductis, ostendit, methodus autem summandi supra in usum vocata hic adhiberi etiam potest, etiamsi series in forma illa generali §. 14. non contineatur.

§. 20. Primo observo, ex hac serie, aufferendo utrinque terminum primum $\frac{1}{q+1}$, et dividendo per $\frac{q-1}{q+1}$, prodire sequentem seriem:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{q+2} + \frac{3(q-2)}{(q+2)(q+3)} + \frac{4(q-2)(q-3)}{(q+2)(q+3)(q+4)} + \frac{5(q-2)(q-3)(q-4)}{(q+2)(q+3)(q+4)(q+5)} + \text{etc.}$$

Dein-

Deinde, subtrahendo hic utrinque primum terminum $\frac{2}{q+2}$ et dividendo per $\frac{q-2}{q+2}$, oritur ista:

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{q+3}+\frac{4(q-3)}{(q+3)(q+4)}+\frac{5(q-3)(q-4)}{(q+3)(q+4)(q+5)}+\frac{6(q-3)(q-4)(q-5)}{(q+3)(q+4)(q+5)(q+6)}+\text{etc.}$$

Porro subtrahendo utrinque terminum primum $\frac{3}{q+3}$ et dividendo per $\frac{q-3}{q+3}$, nanciscimur

$$\frac{1}{2}=\frac{4}{q+4}+\frac{5(q-4)}{(q+4)(q+5)}+\frac{6(q-4)(q-5)}{(q+4)(q+5)(q+6)}+\frac{7(q-4)(q-5)(q-6)}{(q+4)(q+5)(q+6)(q+7)}+\text{etc.}$$

unde iam facile intelligitur, has operationes quousque lubuerit continuari posse, atque in genere fore

$$\frac{1}{2}=\frac{n}{q+n}+\frac{(n+1)(q-n)}{(q+n)(q+n+1)}+\frac{(n+2)(q-n)(q-n-1)}{(q+n)(q+n+1)(q+n+2)}+\text{etc.}$$

quicunque numeri pro litteris n et q accipiantur.

§. 21. Iſta consideratio simul viam nobis aperit ad demonstrationem hujus summationis memorabilis perveniendi. Sit enim summa adhuc incognita, ponaturque:

$$S=\frac{n}{q+n}+\frac{(n+1)(q-n)}{(q+n)(q+n+1)}+\frac{(n+2)(q-n)(q-n-1)}{(q+n)(q+n+1)(q+n+2)}+\text{etc.}$$

$$T=\frac{n+1}{q+n+1}+\frac{(n+2)(q-n-1)}{(q+n+1)(q+n+2)}+\frac{(n+3)(q-n-1)(q-n-2)}{(q+n+1)(q+n+2)(q+n+3)}+\text{etc.}$$

unde si has duas series addamus invicem et a se invicem subtrahamus, relicto scilicet primo termino seriei S, et combinando sequentium quemque cum termino seriei T, qui subscriptum praecedit, habebimus:

$$S+T=\frac{n}{q+n}+\frac{2q}{q+n}\left[\frac{n+1}{q+n+1}+\frac{(n+2)(q-n-1)}{(q+n+1)(q+n+2)}+\frac{(n+3)(q-n-1)(q-n-2)}{(q+n+1)(q+n+2)(q+n+3)}+\text{etc.}\right]$$

$$S-T=\frac{n}{q+n}-\frac{2n}{q+n}\left[\frac{n+1}{q+n+1}+\frac{(n+2)(q-n-1)}{(q+n+1)(q+n+2)}+\frac{(n+3)(q-n-1)(q-n-2)}{(q+n+1)(q+n+2)(q+n+3)}+\text{etc.}\right]$$

hoc

hoc est

$$S + T = \frac{n}{q+n} + \frac{2q}{q+n} \cdot T$$

$$S - T = \frac{n}{q+n} - \frac{2n}{q+n} \cdot T$$

utrique autem aequationi manifesto satisfaciunt valores $S = \frac{1}{2}$ et $T = \frac{1}{2}$, quicunque valores litteris q et n tribuantur.

§. 22. Nunc autem quoque methodum summandi supra adhibitam ad nostram seriem S applicemus, discerpendo scilicet singulos términos in duas partes, alteram positivam, alteram negativâm, sequenti modo:

$$\frac{n}{q+n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{(q-n)}{(q+n)}$$

$$\frac{(n+1)(q-n)}{(q+n)(q+n+1)} = \frac{1}{2}\frac{(q-n)}{(q+n)} - \frac{1}{2}\frac{(q-n)(q-n-1)}{(q+n)(q+n+1)}$$

$$\frac{(n+2)(q-n)(q-n-1)}{(q+n)(q+n+1)(q+n+2)} = \frac{1}{2}\frac{(q-n)(q-n-1)}{(q+n)(q+n+1)} - \frac{1}{2}\frac{(q-n)(q-n-1)(q-n-2)}{(q+n)(q+n+1)(q+n+2)}$$

$$\frac{(n+3)(q-n)\ldots(q-n-2)}{(q+n)\ldots\ldots(q+n+3)} = \frac{1}{2}\frac{(q-n)\ldots(q-n-2)}{(q+n)\ldots(q+n+2)} - \frac{1}{2}\frac{(q-n)\ldots\ldots(q-n-3)}{(q+n)\ldots\ldots(q+n+3)}$$

$$\frac{(n+4)(q-n)\ldots(q-n-3)}{(q+n)\ldots\ldots(q+n+4)} = \frac{1}{2}\frac{(q-n)\ldots(q-n-3)}{(q+n)\ldots(q+n+3)} - \frac{1}{2}\frac{(q-n)\ldots\ldots(q-n-4)}{(q+n)\ldots\ldots(q+n+4)}$$

quibus successive substitutis, delendo terminos se mutuo destruentes, prodibit

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{(q-n)(q-n-1)(q-n-2)(q-n-3)\text{ etc.}}{(q+n)(q+n+1)(q+n+2)(q+n+3)\text{ etc.}}$$

Quoniam autem in hoc producto infinito factor primus numeratoris jam major est primo factore denominatoris, sequentes vero factores numeratoris continuo decrescunt, denominatoris vero crescunt, ejus valor manifesto, quicquid sint q et n, in nihilum abit, ita ut sit seriei summa $S = \frac{1}{2}$.

OBSER-

OBSERVATIONES
CIRCA ELLIPSIN QUANDAM PRORSUS SINGULAREM.

AUCTORE
NICOLAO FUSS.

Conventui exhibita die 19. Aprilis 1798.

§ 1.

Incidi non ita pridem, forte fortuna, in aliquam Ellipsin ob plurimas egregias proprietates imprimis memorabilem. Animadversiones, quibus haec curva, cum eam attentius examinarem, ansam praebuit, Academiae tradere eo minus dubito, quod, quae praecipua est, omnes illas egregias proprietates tam facile demonstrare liceat. Ex harum proprietatum numero eas, quae prae ceteris notari merentur, hic statim in limine, summatim, tanquam totidem theoremata peculiaria, ob oculos ponam, earum autem veritatem in sequentibus sermone continuo ostendam, ne demonstratione singulari uniuscujusque, seorsim instituta, argumenti propositi tractatio ultra modum protendatur.

§ 2. Affectiones igitur notabiliores hujus Ellipsis, ordine quo eae se mihi obtulerunt, sequentem in modum enunciari possunt:

I. Si

I. Si in circulo quolibet singulis sinubus addantur respondentes cosinus, vel subtrahantur, quoties cosinus signo contrario afficiuntur, omnia puncta hoc modo determinata erunt in Ellipsi.

II. Ducto in circulo diametro, a quo arcus computantur, diameter huic normalis per bina puncta opposita intersectionis circuli et Ellipseos transit.

III. Distantia centri a punctis intersectionis diametri prioris et Ellipseos aequatur cosinui anguli semirecti.

IV. Semi-axis major Ellipsis aequatur duplo apothemati pentagoni regularis circulo inscripti, et semiaxis minor aequatur lateri decagoni regularis circulo inscripti. Hinc

V. Differentia semi-axium radio circuli, et rectangulum ex iisdem factum quadrato radii aequivalent; unde porro

VI. Area Ellipsis areae circuli est aequalis, et aequales sunt lunulae a circulo et Ellipsi formatae.

VII. Si quatuor puncta intersectionis circuli et Ellipsis chordis jungantur et diametris, nascuntur sectores circulares sectoribus ellipticis aequales, item segmenta circularia segmentis ellipticis aequalia.

VIII. Si e puncto, unde arcus computantur, ad diametrum perpendiculum erigatur axi majori occurrens, hoc perpendiculum semi-axi majori est aequale.

IX.

IX. Eodem perpendiculo producto, usque dum diametro est aequale, si ab ejus extremitate per centrum agatur recta circulum secans in duobus punctis, distantia intersectionis remotioris, ad extremum perpendiculi usque, aequalis est axi majori, propioris vero minori.

X. Si ab eodem perpendiculo abscindatur semissis radii, secans huic tangenti respondens, si producatur, per binas reliquas intersectiones circuli et ellipseos transit.

XI. Distantia focorum a diametro, per initium arcuum ducto, est media proportionalis inter radium circuli et semiaxem majorem, et distantia focorum a diametro illi normali est media proportionalis inter radium et semiaxem minorem.

XII. Differentia inter radium et semiaxem minorem est quarta continue proportionalium inter semiaxem majorem et radium; et summa radii et semiaxis majoris est quarta continue proportionalium inter semiaxem majorem et radium.

XIII. Huc insuper accedit proprietas tantum proxime vera: quod differentia inter perimetrum ellipsis et peripheriam circuli propemodum aequalis sit utrivis arcui circuli intra ellipsin inclusi.

Praeter has proprietates et relationes cum circulo, ex quo nata est, ellipsis nostra adhuc praedita est pluribus aliis, quas, una cum his expositis, in sequentibus pagellis fusius recensere et demonstrare constitui.

Tab. I. Fig. 1. § 3. Sit igitur ADBE circulus, radio CA $= r$, centro C descriptus, in quo singulis applicatis XQ addantur absciscae respondentes a centro sumtae $QY = CX$, eruntque puncta Y omnia in Ellipsi circa idem centrum C descripta. Posita enim abscissa $CX = x$ et applicata $XY = y$, erit $y = \sqrt{rr - xx} + x$, sive

$$yy - 2xy + 2xx - rr = 0$$

aequatio quae manifesto est pro Ellipsi (I).

§ 4. Quod si jam ponamus $x = \pm r$, erit $y = \pm r$, et si statuamus $x > \pm r$, applicata fiet imaginaria. Hinc intelligitur, completis quadratis ACDI et BCEK, Ellipsin transire per puncta I et K, ibique tangi a rectis AI et BK. Ponamus porro $x = 0$, eritque $y = \pm r$; unde perspicitur Ellipsin transire per puncta D et E extrema diametri DE diametro AB normalis (II). Hinc autem sequitur rectas DE et IK fore diametros conjugatos Ellipsis, quorum ille $DE = 2r$, hic vero $IK = 2r\sqrt{2}$, inclinatione eorum mutua existente angulo DCI semirecto.

§ 5. Sumto $y = 0$ fit $x = \pm \frac{r}{\sqrt{2}}$. Puncta igitur M et N, ubi Ellipsis diametrum AB intersecat, utrinque a centro distant intervallo $CM = CN = \frac{r}{\sqrt{2}} = \cos. 45^{\circ}$ (III). Demissis ergo e punctis Z, ubi diameter conjugatus IK circulum secat, perpendiculis in diametrum AB, ea cadent in puncta intersectionis M et N.

§ 6. Quaeramus nunc ambos axes Ellipseos, quos vocemus, majorem $= 2a$, minorem vero $= 2b$; tum vero si semi-

semidiametri conjugati vocentur $CD = r = f$ et $CI = r\sqrt{2} = g$, ex natura Ellipsis constat fore

$$aa + bb = ff + gg$$
$$2ab = 2fg \text{ sin. } DCI;$$

unde addendo et subtrahendo colligitur

$$(a + b)^2 = ff + gg + 2fg \text{ sin. } DCI$$
$$(a - b)^2 = ff + gg - 2fg \text{ sin. } DCI;$$

hincque porro, ob $f = r$, $g = r\sqrt{2}$ et sin. $DCI = \frac{r}{\sqrt{2}}$, fiet

$$a + b = r\sqrt{5} \text{ et } a - b = r.$$

Semiaxes ergo nostrae Ellipsis erunt

$$a = \frac{r(\sqrt{5}+1)}{2}, \quad b = \frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}.$$

§ 7. Ex notissima autem constructione pentagoni regularis liquet esse quadratum lateris $= \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) rr$, hinc quadratum perpendiculi in latus $= \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{16}\right) rr$ et ipsum perpendiculum $= \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) r = \frac{a}{2}$ (IV). Tum vero constat esse quadratum lateris Decagoni aequale differentiae quadratorum laterum Pentagoni et Hexagoni eidem circulo inscriptorum, unde latus Decagoni $= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) r = b$ (IV).

§ 8. Pluribus fortasse haud displicebit observatio, semiaxes nostrae Ellipsis etiam sequenti modo, prorsus singulari, exprimi posse:

$$a = r\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \text{etc.}}}}}}$$

$$b = r\sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \text{etc.}}}}}}$$

Ad hoc demonstrandum ponatur

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\text{etc.}}}}}}=p$$

sumtisque utrinque quadratis habebimus:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\text{etc.}}}}}=pp=1+p,$$

unde sequitur fore $p=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, ideoque $a=r\ (\frac{\sqrt{5}+1}{2})$. Eodem modo ponatur

$$\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\text{etc.}}}}}}=q$$

et sumtis utrinque quadratis fiet

$$1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\text{etc.}}}}}=qq=1-q$$

unde fit $q=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ergo $b=r\ (\frac{\sqrt{5}-1}{2})$.

§ 9. Ex § 6. autem, praeterquam quod $a-b=r$ et $ab=rr$ (V), sequitur quoque fore semiparametrum Ellipsis nostrae $=(\sqrt{5}-2)\,r$ et distantiam focorum a centro $C\Phi=r\sqrt[4]{5}$. Tum vero, ob $ab=rr$, erit area Ellipsis $=\pi rr$, ideoque areae circuli aequalis; unde porro sequitur quatuor lunulas a circulo et ellipsi formatas fore inter se aequales (VI).

§ 10. Quod positionem axium respectu diametri AB attinet, eam sequenti modo determinare licet. Sit F vertex ellipsis, FG axis major, fg minor. Ex vertice F in AB demittatur

mittatur perpendiculum FL circulum secans in puncto P, vocenturque anguli ACF $= \alpha$ et ACP $= \beta$, unde fit

$$CL = r \cos. \beta = a \cos. \alpha$$
$$LF = r \sin. \beta + r \cos. \beta = a \sin. \alpha.$$

Harum aequationum prima dat

$$r \sin. \beta = \sqrt{rr - aa \cos. \alpha^2}$$

quo valore substituto secunda abit in

$$\sqrt{rr - aa \cos. \alpha^2} + a \cos. \alpha = a \sin. \alpha$$

unde sublata irrationalitate nanciscimur

$$rr - aa \cos. \alpha^2 = aa (\sin. \alpha^2 - 2 \sin. \alpha \cos. \alpha + \cos. \alpha^2)$$

sive concinnius

$$rr - aa \cos. \alpha^2 = aa (1 - \sin. 2\alpha)$$

unde porro fit

$$\sin. 2\alpha - \cos. \alpha^2 = 1 - \frac{rr}{aa}.$$

Cum igitur sit $\frac{r}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, erit

$$\frac{rr}{aa} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ et } 1 - \frac{rr}{aa} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ ideoque}$$

$$\sin. 2\alpha - \cos. \alpha^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

quod etiam ita repraesentari potest:

$$\sin. 2\alpha - \tfrac{1}{2} \cos. 2\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

sive etiam ita:

$$\sqrt{1 - \cos. 2\alpha^2} - \tfrac{1}{2} \cos. 2\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

unde oritur ista aequatio:

$$25 \cos. 2\alpha^4 = 10 \cos. 2\alpha^2 - 1$$

ex qua fit $\cos. 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, hincque $\sin. 2\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et tag. $2\alpha = -2$.

§ 11.

§ 11. Hanc jam axium positionem ita geometrice assignare licebit. Ex B erigatur perpendiculum BH $=$ BA. Ducatur recta CH, angulus vero ACH bifariam secetur recta CR, quae indicabit positionem axis majoris quaesitam. Est enim tag. BCH $= \frac{BH}{BC} = 2$, ergo tag. ACH $= -2 =$ tag. 2α, consequenter angulus ACH $= 2\alpha$ et ACF $= \alpha$, uti requiritur.

§ 12. Inventa autem hac positione axis majoris CR, in ea vertex ellipsis F commodissime geometrice assignari poterit sequenti modo: Producatur recta AI usque in O, ubi occurrat rectae CR. Intervallum AO transferatur in rectam CR a C usque in F, eritque CF semiaxis major et F vertex nostrae Ellipsis. Cum enim sit tag. $2\alpha = -2$, erit tag. $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{AO}{AC}$, ideoque AO $= \frac{r(\sqrt{5}+1)}{2} = a$ (§ 6.), hinc CF $=$ AO $= a$ (VIII).

§ 13. Ceterum utriusque axis longitudo etiam sequenti modo simul geometrice determinari poterit. Producatur recta CH in n usque, ita ut circulus a recta Hn secetur in duobus punctis m et n, eritque Hn axi majori et Hm axi minori aequalis. Nam HC $= r\sqrt{5}$, ideoque HN $= r(\sqrt{5}+1)$ et Hm $= r(\sqrt{5}-1)$, hoc est Hn $= 2a$ et Hm $= 2b$ (IX). Tum vero si super recta CH capiatur intervallum Cπ $=$ AB, erit πH semiparameter ellipsis. Nam πH $=$ CH $-$ Cπ $= r(\sqrt{5}-2)$ (§ 9).

§ 14. Pro demonstranda aequalitate arearum sectoris circuli DCo et sectoris elliptici DCω, § 2 art. VII. memorata,

quaeramus

quaeramus primo aream sectoris prioris DCo, et cum sit angulus ACF $= \alpha$, erit DCF $= 90^\circ - \alpha$, hinc DCo $= 180^\circ - 2\alpha$, ergo arcus circularis Do $= r\,(180^\circ - 2\alpha)$ et area sectoris DCoZ $= \frac{1}{2}rr\,(180^\circ - 2\alpha)$.

§ 15. Nunc quaeramus quoque aream sectoris elliptici DCω. Hunc in finem pro puncto ellipsis indefinito Y vocemus ejus distantiam a centro CY $= z$ et angulum fCY $= \Phi$, eritque area sectoris fCY $= \frac{1}{2}\int zz\partial\Phi$. Posita autem abscissa, in axe majore a centro sumta, CV $= t$ et applicata VY $= u$, erit $t = z \sin.\Phi$ et $u = z \cos.\Phi$, unde ob $uu = \frac{bb}{aa}(aa - tt)$ habebimus hanc aequationem:

$$aazz \cos.\Phi^2 = aabb - bbzz \sin.\Phi^2$$

unde elicitur

$$zz = \frac{aabb}{aa \cos.\Phi^2 + bb \sin.\Phi^2}$$

ita ut sit area

$$f\text{CY} = \frac{aabb}{2}\int \frac{\partial\Phi}{aa \cos.\Phi^2 + bb \sin.\Phi^2}.$$

Est vero $\cos.\Phi^2 = \frac{1 + \cos.2\Phi}{2}$ et $\sin.\Phi^2 = \frac{1 - \cos.2\Phi}{2}$, quibus substitutis prodit

$$f\text{CY} = aabb \int \frac{\partial\Phi}{(aa + bb) + (aa - bb)\cos.\Phi}.$$

Ponatur $2\Phi = \psi$ et $\frac{aa - bb}{aa + bb} = n$, fietque area

$$f\text{CY} = \frac{aabb}{2(aa+bb)} \int \frac{\partial\psi}{1 + n \cos.\psi}.$$

Constat autem esse

$$\int \frac{\partial\psi}{1 + n\cos.\psi} = \frac{1}{\sqrt{1 - nn}} \text{Arc.}\cos.\frac{\cos.\psi + n}{1 + n\cos.\psi}$$

unde ob $\frac{1}{\sqrt{1-nn}} = \frac{aa + bb}{2ab}$ nanciscimur aream

$$f\text{CY} = \frac{ab}{4}\text{Arc.}\cos.\frac{\cos.\psi + n}{1 + n\cos.\psi} + \text{C}$$

sive

sive restituto angulo Φ

$$\int CY = \frac{ab}{4} \text{Arc. cos.} \frac{\cos. 2\Phi + n}{1 + n \cos. 2\Phi} + C$$

Quod si igitur ista areae expressio indefinita a valore $\Phi = o$ usque ad $\Phi = \alpha$ extendatur, constans C evanescet, fietque area sectoris

$$\int CD = \frac{ab}{4} \text{Arc. cos.} \frac{\cos 2\alpha + n}{1 + n \cos. 2\alpha}.$$

Est vero $ab = rr$ (§ 9), $n = \frac{aa - bb}{aa + bb} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, (§ 6) et cos. 2α $= - \frac{1}{\sqrt{5}}$ (§ 10), hinc area

$$\int CD = \frac{rr}{4} \text{Arc. cos.} \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{4} rr (180^\circ - 2\alpha)$$

adeoque area sectoris elliptici integri

$$DC\omega f = \frac{1}{2} rr (180^\circ - 2\alpha).$$

§ 16. Hinc igitur sequitur, quod supra jam (VII) innuimus, sectorem ellipticum $DC\omega f$ aequalem esse sectori circulari $DCoZ$; tum vero quoque aequalia fore segmenta $De\omega f$ et $DboZ$, ut et segmenta $De\omega h$ et $DboF$. Cum enim demonstratum sit esse

Sectorem $DC\omega f = DCoZ$ (§§ 14 et 15)
Auffer $\triangle DC\omega = \triangle DCo$

remanet Segm. $De\omega f = DboZ$
Adde Lunul. $Dh\omega f = DFoZ$ (§ 9)

prodit Segm. $De\omega h = DboF$.

§ 17. Supra § 4 jam observavimus ellipsin transire per circulum in punctis D et E; quod bina reliqua puncta intersectionis o et ω attinet, ea etiam aliquid singularis habent. Cum enim sit angulus $oCF = DCF = 90^\circ - \alpha$, erit

ACo

$ACo = 2\alpha - 90°$. Est vero tag. $2\alpha = -2$ (§ 10), ergo tag. $(90° - 2\alpha) = -\frac{1}{2}$ et tag. $ACo = +\frac{1}{2}$. Ducta igitur e centro C recta Ca perpendiculum AI bifariam secante in a, ejus intersectio dabit in peripheria circuli punctum o (X). Nam erit $\frac{Aa}{AC} = \frac{1}{2} =$ tag. ACo, uti requirebatur.

§ 18. Si ex puncto A erigatur perpendiculum $AT = AB$, agaturque recta CT, producta recta MZ (§ 5) usque ad CT, punctum intersectionis S erit in Ellipsi. Cum enim sit

$$CM : MS = CA : AT = 1 : 2$$

erit $MS = 2\,CM = MZ + CM$, quemadmodum ipsa genesis nostrae ellipsis, § 3 explicata, requirit.

§ 19. Quoniam tangens anguli, quem recta ellipsin in puncto Y contingens cum linea abscissarum AB constituit, est $\frac{\partial y}{\partial x} = 1 - \frac{x}{\sqrt{(rr - xx)}}$, definiamus hunc angulum pro praecipuis ellipseos punctis D, E, I, K. Pro binis prioribus est $x = o$, ideoque $\frac{\partial y}{\partial x} = 1$; unde intelligimus tangentes curvae in his punctis D et E ad rectam AB sub angulo semirecto inclinari, sive diametro IK parallelas esse futuras. Pro punctis I et K fit $x = \pm r$, ergo $\frac{\partial y}{\partial x} = 1 \pm \infty$; unde sequitur, quod jam supra (§ 4) observavimus, tangentes ellipsis in punctis I et K rectae AB in punctis A et B normaliter insistere.

§. 20. Quod puncta intersectionis o et ω attinet, quoniam $Cp = r$ cos. $ACo = r$ cos. $(2\alpha - 90°)$ (§ 17), erit $x = \pm r$ sin. $2\alpha = \pm \frac{2n}{\sqrt{5}}$ (§ 10). At vero pro puncto o est $y = x - \sqrt{rr - xx}$, ideoque $\frac{\partial y}{\partial x} = 1 + \frac{x}{\sqrt{rr - xx}} = 3$, ita ut

 recta

recta ellipsin in o contingens cum diametro AB angulum faciat cujus tangens $= 3$. Eidem autem abscissae $Cp = x = \frac{2r}{\sqrt{5}}$ respondet quoque applicata $pq = y = x + \sqrt{rr - xx}$, unde fit $\frac{\partial y}{\partial x} = 1 - \frac{x}{\sqrt{rr - xx}} = -1$. Tangens igitur in puncto q rectae AB insistit sub angulo semirecto.

§ 21. Pro punctis M et N est $x = \pm \frac{r}{\sqrt{2}}$, unde fit $\frac{\partial y}{\partial x} = 1 + \frac{x}{\sqrt{rr - xx}} = 2$, vel etiam $\frac{\partial y}{\partial x} = 1 - \frac{x}{\sqrt{rr - xx}} = 0$. Prior scilicet valor est pro punctis M et N, ubi igitur tangentes rectae CT erunt parallelae; alter valor est pro puncto eidem abscissae respondente S ejusque opposito, in quibus tangens diametro AB fit parallela.

§ 22. Si focos ellipsis ad diametrum AB referre velimus, demisso perpendiculo $\Phi\zeta$ facile ostendi potest fore $\Phi\zeta = \sqrt{ar}$ et $C\zeta = \sqrt{br}$ (XI). Cum enim sit $\Phi\zeta^2 = C\Phi^2$ sin. α^2 et $C\zeta^2 = C\Phi^2$ cos. α^2, ob cos. $2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (§ 10) hincque sin. $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, cos. $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $C\Phi^2 = rr\sqrt{5}$ (§ 9), habebimus

$$\Phi\zeta^2 = \frac{rr(\sqrt{5}+1)}{2} = ar$$
$$C\zeta^2 = \frac{rr(\sqrt{5}-1)}{2} = br$$

§ 23. Positionem et longitudinem axium quoque immediate, et simul ex ipsa aequatione generali § 3 data $yy - 2xy + 2xx = rr$, deducere licuisset sequenti modo: posito

sito $CV = t$ et $VY = u$, erit $VU = u$ tag. α et $YU = \frac{u}{\cos.\alpha}$, ideoque $CU = CV - VU = t - u$ tag. α, unde fit

$$CX = x = t\cos.\alpha - u\sin.\alpha$$

tum vero erit $XU = CU \sin.\alpha = t\sin.\alpha - \frac{u\sin.\alpha^2}{\cos.\alpha}$, unde fit

$$XY = XU + YU = t\sin.\alpha - \frac{u\sin.\alpha^2}{\cos.\alpha} + \frac{u}{\cos.\alpha}$$

quod ita reducitur

$$XY = y = t\sin.\alpha + u\cos.\alpha.$$

Hinc autem adipiscimur

$$yy = tt\sin.\alpha^2 + tu\sin.2\alpha + uu\cos.\alpha^2$$
$$-2xy = -tt\sin.2\alpha - 2tu\cos.2\alpha + uu\sin.2\alpha$$
$$+2xx = 2tt\cos.\alpha^2 - 2tu\sin.2\alpha + 2uu\sin.\alpha^2$$

unde ob $yy - 2xy + 2xx = rr$ fiet

$$\left\{\begin{array}{l} tt\,(1 + \cos.\alpha^2 - \sin.2\alpha) \\ - tu\,(\sin.2\alpha + 2\cos.2\alpha) \\ + uu\,(1 + \sin.\alpha^2 + \sin.2\alpha) \end{array}\right\} = rr$$

Cum autem fieri debeat $\frac{tt}{aa} + \frac{uu}{bb} = 1$, necesse est ut sit

1°) $\sin.2\alpha + 2\cos.2\alpha = 0$;

2°) $1 + \cos.\alpha^2 - \sin.2\alpha = \frac{rr}{aa}$;

3°) $1 + \sin.\alpha^2 + \sin.2\alpha = \frac{rr}{bb}$.

Ex prima conditione oritur tag. $2\alpha = -2$, unde fit sin. $2\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et cos. $2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, hincque $\sin.\alpha^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ et $\cos.\alpha^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$, quibus valoribus substitutis conditio secunda et tertia praebet $\frac{rr}{aa} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{rr}{bb} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, unde fit

 $\frac{aa}{rr} =$

$\frac{aa}{rr} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{bb}{rr} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}$, unde extracta radice prodit $\frac{a}{r} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ et $\frac{b}{r} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, hincque semiaxes ut supra.

§ 24. Ex valoribus modo inventis sequitur
$$\frac{r^3}{aa} = (\frac{3 - \sqrt{5}}{2})\, r = r - b \text{ et } \frac{r^3}{bb} = (\frac{3 + \sqrt{5}}{2})\, r = r + a$$
ideoque a, r, $\frac{rr}{a}$, $r - b$ quatuor lineae continue proportionales, aeque ac b, r, $\frac{rr}{b}$, $r + a$, quemadmodum art. XII diximus.

§ 25. Etiamsi inter perimetrum ellipsis et circumferentiam circuli ratio simplex vix expectanda videtur, tamen etiam ejus rectificationem suscipiamus, quam pro arcu indefinito FY sequenti modo commodissime instituere licet. Super axe FG describamus semicirculum, productaque applicata VY usque in Σ vocemus angulum FC$\Sigma = \frac{\omega}{2}$, eritque CV $= t = a \cos. \frac{\omega}{2}$, V$\Sigma = a \sin. \frac{\omega}{2}$, hincque VY $= u = b \sin. \frac{\omega}{2}$, unde ob $\partial t = \frac{a \partial \omega}{2} \times \sin. \frac{\omega}{2}$ et $\partial u = b \frac{\partial \omega}{2} \cos. \frac{\omega}{2}$, fit elementum arcus
$$\sqrt{\partial t^2 + \partial u^2} = \tfrac{1}{2} \partial \omega \sqrt{aa \sin. \tfrac{\omega}{2}^2 + bb \cos. \tfrac{\omega}{2}^2};$$
et quoniam $\sin. \frac{\omega}{2}^2 = \frac{1 - \cos. \omega}{2}$ et $\cos. \frac{\omega}{2}^2 = \frac{1 + \cos. \omega}{2}$, erit arcus indefinitus
$$\text{FY} = \tfrac{1}{2} \int \partial \omega \sqrt{\frac{aa + bb}{2} - (\frac{aa - bb}{2}) \cos. \omega}$$
sive posito brevitatis gratia $\frac{aa - bb}{aa + bb} = \lambda$, erit
$$\text{FY} = \sqrt{\frac{aa + bb}{8}} \int \partial \omega \sqrt{1 - \lambda \cos. \omega}$$

et

et facta evolutione radicis ex binomio $1 - \lambda \cos. \omega$ iste arcus ita prodit expressus:

$$FY = \frac{\sqrt{aa+bb}}{8} \left\{ \begin{array}{l} \int \partial\omega - \frac{1}{2}\lambda \int \partial\omega \cos. \omega - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \lambda^2 \int \partial\omega \cos. \omega^2 \\ - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \lambda^3 \int \partial\omega \cos. \omega^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8} \lambda^4 \int \partial\omega \cos. \omega^4 - \text{etc.} \end{array} \right\}$$

§ 26. Nunc pro invenienda longitudine quadrantis Ff statuatur primo

$$\int \partial\omega \cos. \omega^{n+2} = A \int \partial\omega \cos. \omega^n + B \sin. \omega \cos. \omega^{n+1}$$

eritque differentiando

$$\cos. \omega^2 = A + B \cos. \omega^2 - (n+1) B + (+1) B \cos. \omega^2$$

quocirca fieri debet $B(n+2) = 1$ et $A = (n+1) B$, hoc est $B = \frac{1}{n+2}$ et $A = \frac{n+1}{n+2}$, ita ut sit

$$\int \partial\omega \cos. \omega^{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \int \partial\omega \cos. \omega^n + \frac{1}{n+1} \sin. \omega \cos. \omega^{n+1}$$

Quoniam autem pro quadrante Ff integralia ab $\frac{\omega}{2} = o$ ad $\frac{\omega}{2} = 90^\circ$ sunt capienda, postremum vero membrum pro utroque termino evanescit, habebimus

$$\int \partial\omega \cos. \omega^{n+2} \left[\begin{smallmatrix} ab\ \omega = 0 \\ ad\ \omega = \pi \end{smallmatrix}\right] = \frac{n+1}{n+2} \int \partial\omega \cos. \omega^n$$

ita ut sit

$$\int \partial\omega = \pi; \qquad \int \partial\omega \cos. \omega = 0$$

$$\int \partial\omega \cos. \omega^2 = \tfrac{1}{2}\pi; \qquad \int \partial\omega \cos. \omega^3 = 0$$

$$\int \partial\omega \cos. \omega^4 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4}\pi; \qquad \int \partial\omega \cos. \omega^5 = 0$$

$$\int \partial\omega \cos. \omega^6 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6}\pi; \qquad \int \partial\omega \cos. \omega^7 = 0$$

etc. etc.

unde longitudo quadrantis quaesita fit

$$Ff = \pi \sqrt{\frac{aa+bb}{8}} \left[1 - A\lambda^2 - B\lambda^4 - C\lambda^6 - D\lambda^8 - \text{etc.}\right]$$

ubi

ubi coëfficientes A, B, C, etc. ita a se invicem pendent, ut sit

$$A = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} = 0{,}06250000$$
$$B = \tfrac{3}{8} \cdot \tfrac{5}{8} A = 0{,}01464844$$
$$C = \tfrac{7}{12} \cdot \tfrac{9}{12} B = 0{,}00640869$$
$$D = \tfrac{11}{16} \cdot \tfrac{13}{16} C = 0{,}00357985$$
$$E = \tfrac{15}{20} \cdot \tfrac{17}{20} D = 0{,}00228216$$
$$F = \tfrac{19}{24} \cdot \tfrac{21}{24} E = 0{,}00158087$$
$$G = \tfrac{23}{28} \cdot \tfrac{25}{28} F = 0{,}00115944$$
$$H = \tfrac{27}{32} \cdot \tfrac{29}{32} G = 0{,}00088656$$

Tum vero est $aa - bb = rr\sqrt{5}$ et $aa + bb = 3rr$, ideoque $\lambda = \frac{\sqrt{5}}{3}$ et $\lambda^2 = \frac{5}{9}$, unde octo priores termini negativi nostrae seriei erunt

$$A\lambda^2 = 0{,}034722$$
$$B\lambda^4 = 0{,}004521$$
$$C\lambda^6 = 0{,}001099$$
$$D\lambda^8 = 0{,}000341$$
$$E\lambda^{10} = 0{,}000121$$
$$F\lambda^{12} = 0{,}000046$$
$$G\lambda^{14} = 0{,}000019$$
$$H\lambda^{16} = 0{,}000008$$

quorum summa $= 0{,}040877$

unde longitudo quadrantis

$$Ff = (1 - 0{,}040877)\frac{\pi r}{2}\sqrt{\tfrac{3}{2}} = 1{,}17468 \cdot \frac{\pi r}{2}$$

sive

sive circiter $Ff = 1{,}175 \cdot \frac{\pi r}{2}$. Perimeter ellipsis totius ergo erit $= 1{,}175 \cdot 2\pi r$, qui igitur se habet ad peripheriam circuli proxime ut 47 ad 40. Differentia autem inter perimetrum ellipsis et circumferentiam circuli tantum non arcui circuli intra ellipsin contenti EZω vel oZD aequalis est, quippe cujus longitudo $= 0{,}176 \cdot 2\pi r$ (XIII).

SOLU-

SOLUTION
D'UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE
RELATIF AU VOL DES OISEAUX.

PAR

NICOLAS FUSS.

Préſenté et lû le 20 Mai 1799.

§ 1.

Il y a dejà plusieurs années qu'un de ces hazards, qui font quelques fois d'un phénomène commun et journalier un sujet des plus sérieuses méditations du Géomètre, me fit venir l'idée de soumettre le vol des oiseaux et particulierement leur force ascensionelle, à l'examen de la Théorie du mouvement. Quoique je pressentisse une partie des difficultés, que l'ignorance presque absolüe, où nous sommes sur la force et l'action des muscles, qui jouent un si grand role dans le mécanisme du vol, de même que sur la figure, la variété, la flexibilité et les changemens incalculables de forme et de position des ailes devoient opposer à l'approfondissement de cette matière: j'étois cependant curieux de voir jusqu'à quel point des hypothèses et des suppositions qui ne s'écartassent pas trop loin de la nature, et auxquelles je prévis que je serois forcé d'avoir recours, pourroient me conduire. J'eus la satisfaction de résoudre, d'une manière assez conforme à l'expérience, le Problème que je m'étois proposé et dont j'ai l'honneur de présenter ici la solution à l'Academie.

§. 2.

§. 2. Après que j'eusse eu achevé ma solution, les recherches que je fis pour me procurer la connoissance de ce qui pourroit deja avoir été écrit sur la même matière, me firent tomber entre les mains un Mémoire de feu Mr. Jean Esaie Silberschlag, publié en 1781. par la Société des Scrutateurs de la nature à Berlin ([a]). Ce Mémoire contient des observations intéressantes, et des réflexions judicieuses et instructives sur la nature et les organes du vol des oiseaux. Mais la partie théorétique, ou de calcul, en est foible. Aussi l'auteur s'y borne-t'il à la détermination de la seule vitesse de l'aile, et l'expression qu'il en donne est évidemment erronée, c'est-à-dire l'espace parcouru par l'extrémité de l'aile dans une seconde, qui est par conséquent une quantité linéaire, ou d'une dimension, y est exprimée par la racine cubique d'une quantité de deux dimensions, savoir du rectangle fait de la hauteur due à la vitesse et de huit fois la hauteur de laquelle un corps tombe librement dans la premiere seconde de sa chûte. Une expression aussi évidemment vicieuse suffiroit seule, pour rendre suspect le principe établi par Mr. Silberschlag: que la résistance de l'air soit en raison du cube de la vitesse du corps qui s'y meut, quand même on n'auroit point d'autres raisons pour le rejetter. Même en lui passant ce principe il y auroit encore beaucoup à reprendre à l'usage qu'il en fait pour arriver à l'expression mentionnée de la vitesse des ailes. Mais mon intention n'étant pas de faire ici la critique d'un Mémoire d'ailleurs estimable, je passe à la solution de mon Problème, dont voici l'énoncé.

Pro-

(a) Schriſten der Berliniſchen Geſellſchaft naturforſchender Freunde. Zweiter Band. Berlin 1781.

Problème

§. 3. *La figure et la grandeur des ailes étant données, avec la force musculaire que l'oiseau emploïe pour les mettre en mouvement, trouver pour tel angle qu'ils ont décrit en battant l'air, leur vitesse, le tems écoulé et l'action des ailes, ou la force avec laquelle l'oiseau en est mû.*

Solution.

Tab. I. Fig. 2. I. Supposons que la figure O X A Y représente le plan d'une aile plane mobile autour du point O. A la distance de ce point $OZ = x$ soit la largeur de l'aile $XY = y$, de sorte que la surface de l'aile plane entière est $\int y \partial x$, en prenant l'intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = OA$; la forme et la grandeur de l'aile étant données par une équation entre y et x. Soit M le moment d'inertie de l'aile par rapport à l'axe de gyration $\Gamma\Delta$, passant par le point O perpendiculairement à OA et dans le plan prolongé de l'aile; et il est clair que si les forces seront exprimées par le poids d'un volume d'eau, cette lettre M exprimera une quantité de cinq dimensions.

Tab. I. Fig. 3. II. Soit OA la position initiale de l'aile élevée, dont le plan est supposé à présent insister perpendiculairement au plan du papier et nous présenter son tranchant. Soit l'angle $MOA = \zeta$, et supposons qu'après un tems de t secondes écoulé depuis le commencement, l'aile soit parvenue dans la position OU, ayant décrit l'angle $AOU = \Phi$. Soit la vitesse angulaire ou gyratoire que l'aile a dans cette position $= u$, cette lettre u marquant la vitesse du point D de l'axe OU distant

stant de l'axe de gyration de l'intervalle OD $= 1$; et parceque de cette façon u est l'arc ou l'angle que ce point D décriroit dans une seconde avec la vitesse acquise, il est clair que u, aussi bien que Φ et t, seront des nombres absolus.

III. Quant à la force que l'oiseau exerce sur l'aile pour la mettre en mouvement, que nous sommes obligés de regarder comme une quantité donnée, quoiqu'il soit difficile de ramener l'action des muscles à une mesure déterminée, il y a pourtant un moyen de la faire entrer dans le calcul, et un moyen qui a été fréquemment employé pour tenir compte de la force des animaux, savoir d'établir une formule empirique qui satisfasse à quelques cas dont le résultat est connu. Soit pour cet effet Π le moment de la plus grande force que l'oiseau peut exercer sur l'aile en repos, et soit α la plus grande vitesse qu'il peut imprimer au point D de l'aile, lorsque celle-ci n'a point de résistance à vaincre; et comme dans le mouvement gyratoire les forces sont toujours affectées par le quarré de la vitesse gyratoire, on satisfera complettement aux deux cas extrèmes, et probablement assez bien à tous les cas intermédiaires, en adoptant la formule $\Pi\,(1 - \frac{uu}{\alpha\alpha})$, pour exprimer le moment de la force que l'oiseau exerce sur l'aile dans la position OU. Car si $u = 0$, le moment de cette force est $= \Pi$; et si $u = \alpha$, il sera nul, comme cela doit être. Au reste il est clair que Π exprimera une quantité de quatre dimensions.

IV. Parcequ'à la distance OD $= 1$, la vitesse angulaire est $= u$, à la distance OZ $= x$ la vitesse de l'élément de l'aile $y\,\partial x$ sera $= u\,x$, et la hauteur due à cette vitesse $= \frac{uuxx}{4g}$, où g indique la hauteur de laquelle un corps tombe dans la premiere seconde.

V. Si l'aile étoit agitée dans l'eau, la résistance qu'éprouveroit l'élément $y \partial x$ seroit égale à une colonne d'eau qui a la base $y \partial x$ et la hauteur due à la vitesse de cet élément pour hauteur. Ainsi la résistance seroit $= \frac{uuxx}{4g} \cdot y \partial x$, et son moment par rapport à l'axe MN $= \frac{uuxx}{4g} \cdot xy \partial x$. Soit la densité de l'air à celle de l'eau $= n : 1$; et en prenant u constante pour la position actuelle OU de l'aile, et mettant

$$\int xxy \partial x \left[\begin{array}{l} \text{depuis } x = 0 \\ \text{jusqu'à } x = OA \end{array} \right] = A$$

$$\int x^3 y d x \left[\begin{array}{l} \text{depuis } x = 0 \\ \text{jusqu'à } x = OA \end{array} \right] = B$$

toute la résistance de l'air que l'aile éprouve, ou la force qu'elle obtient pour mettre l'oiseau en mouvement, que nous indiquerons par la lettre V, sera $V = \frac{nAuu}{4g}$, et le moment de cette force $= \frac{nBuu}{4g}$, desorte que si la force V agit perpendiculairement au plan de l'aile sur le centre d'action en C, la distance OC se trouvera par l'équation

$$V. OC = \frac{nBuu}{4g}$$

qui donne

$$OC = \frac{nBuu}{4g \cdot V} = \frac{B}{A}$$

Quant au moment d'inertie M de l'aile, en supposant son épaisseur uniforme $= d$, son élément sera $d y \partial x$, et partant

$$M = d \int xxy \partial x \left[\begin{array}{l} \text{depuis } x = 0 \\ \text{jusqu'à } x = OA \end{array} \right]$$

VI. Tout étant ainsi préparé le principe de l'accéleration nous fournit l'équation differentio-differentielle suivante:

$\frac{M \partial \partial \Phi}{2g \partial t^2}$

$$\frac{M\partial\partial\Phi}{2g\,\partial t^2} = \Pi\left(1 - \frac{uu}{\alpha\alpha}\right) - \frac{nBuu}{4g}$$

qui renferme toute la solution de notre problème, laquelle s'expédiera la plus facilement de cette manière :

VII. Comme la vitesse gyratoire ou angulaire est $u = \frac{\partial\Phi}{\partial t}$, on aura $\partial\Phi^2 = uu\,\partial t^2$, et en prenant les différentielles, $\partial\Phi\,\partial\partial\Phi = u\,\partial u\,\partial t^2$, l'élément du tems ∂t étant regardé comme constant. De là on tire $\frac{\partial\partial\Phi}{\partial t^2} = \frac{u\,\partial u}{\partial\Phi}$, ce qui étant substitué dans l'équation fondamentale de l'Art. V, celle-ci deviendra

$$\frac{M}{2g} \cdot \frac{u\,\partial u}{\partial\Phi} = \Pi - uu\left(\frac{\Pi}{\alpha\alpha} + \frac{nB}{4g}\right)$$

ou bien, en mettant pour abrêger

$$\frac{2g}{M}\left(\frac{\Pi}{\alpha\alpha} + \frac{nB}{4g}\right) = \lambda \text{ et } \frac{2g\Pi}{M} = \mu$$

l'équation prendra cette forme plus simple :

$$u\,\partial u + \lambda uu\,\partial\Phi = \mu\,\partial\Phi.$$

VIII. Afin de rendre cette équation intégrable, nous la multiplierons par $2e^{2\lambda\Phi}$, où e signifie le nombre dont le logarithme naturel on hyperbolique est égal à l'unité, et nous aurons celle-ci :

$$2e^{2\lambda\Phi}u\,\partial u + 2\lambda uu\,e^{2\lambda\Phi}\partial\Phi = 2\mu\,e^{2\lambda\Phi}\partial\Phi$$

dont l'intégrale est

$$e^{2\lambda\Phi}uu = \frac{\mu}{\lambda}\left(C + e^{2\lambda\Phi}\right)$$

où la constante C, introduite par l'intégration, doit être déterminée de manière qu'en prenant $\Phi = 0$ il y ait aussi $u = 0$, d'où l'on obtient $C = -1$, de sorte que notre équation intégrée devient

$$e^{2\lambda\Phi}uu = \frac{\mu}{\lambda}\left(e^{2\lambda\Phi} - 1\right).$$

IX.

IX. De cette équation on peut d'abord tirer la vitesse angulaire pour une position quelconque donnée $AOU = \Phi$ de l'aile; car elle donne

$$u = \sqrt{\tfrac{\mu}{\lambda}}\,(1 - e^{-2\lambda\Phi})$$

moyennant quoi on trouve aussi, pour la même position de l'aile, la force que l'air lui oppose

$$V = \frac{nAuu}{4g} = \frac{n\mu A}{4\lambda g}\,(1 - e^{-2\lambda\Phi})$$

Enfin on aura aussi l'élément du tems

$$\partial t = \frac{\partial\Phi}{u} = \sqrt{\tfrac{\lambda}{\mu}}\cdot\frac{\partial\Phi\, e^{\lambda\Phi}}{\sqrt{(e^{2\lambda\Phi} - 1)}}$$

dont l'intégrale donnera le tems que l'aile a mis pour arriver de la position OA dans la position OU, ou à décrire l'angle AOU.

X. Pour trouver cette intégrale, je mets $\sqrt{e^{\lambda\Phi} - 1} = z - e^{\lambda\Phi}$, et j'aurai $e^{\lambda\Phi} = \frac{zz+1}{2z}$, par conséquent

$$\partial\Phi\, e^{\lambda}{}_{\Phi} = \frac{(zz - 1)\,\partial z}{2\lambda zz}$$

$$\sqrt{e^{2\lambda\Phi} - 1} = \frac{zz - 1}{2z}$$

ce qui étant substitué on aura le tems

$$t = \sqrt{\tfrac{\lambda}{\mu}} \int \frac{\partial\Phi\, e^{\lambda\Phi}}{\sqrt{(e^{2\lambda\Phi} - 1)}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda\mu}} \int \frac{\partial z}{z} = \frac{1}{\sqrt{\lambda\mu}}\,\log. z$$

En restituant donc l'angle Φ, on aura

$$t = \frac{1}{\sqrt{\lambda\mu}}\,\log.\,(e^{\lambda\Phi} + \sqrt{e^{2\lambda\Phi} - 1})$$

où il n'est pas nécessaire d'ajouter une constante, parceque t devient o en mettant $\Phi = 0$, comme la nature du problème l'exige.

Co-

Corollaire I.

§. 4. Dans le commencement du mouvement, tant que l'angle Φ est encore fort petit, on aura $e^{-2\lambda\Phi} = 1 - 2\lambda\Phi$, et partant $1 - e^{-2\lambda\Phi} = 2\lambda\Phi$, donc $u = \sqrt{2\mu\Phi}$. De là, à cause de $uu = 2\mu\Phi = \frac{4g\Pi\Phi}{M}$, on obtient la force motrice $V = \frac{nA\Pi\Phi}{M}$, et le tems écoulé $t = \int\frac{\partial\Phi}{u} = \sqrt{\frac{M}{g\Pi}}\int\frac{\partial\Phi}{2\sqrt{\Phi}} = \sqrt{\frac{M\Phi}{g\Pi}}$.

Corollaire 2.

§. 5. Pour des angles Φ plus grands, c'est-à-dire, dès que $\lambda\Phi$ surpasse l'unité, $e^{-2\lambda\Phi}$ deviendra une fraction assez petite pour qu'on puisse, sans erreur sensible, mettre simplement $u = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$, et $uu = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\Pi}{\frac{\Pi}{\alpha\alpha} + \frac{nB}{4g}}$, et alors la force sera $V = \frac{n\alpha\alpha A\Pi}{4g\Pi + n\alpha\alpha B}$ et le tems $t = \int\frac{\partial\Phi}{u} = \Phi\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} = \Phi\sqrt{\frac{4g\Pi + n\alpha\alpha B}{4g\alpha\alpha\Pi}}$.

Corollaire 3.

§. 6. Quand on circonscrit un triangle à une aile d'oiseau déployée, en prenant la racine de l'aile, ou l'emboitement de l'*os humeri*, pour un angle, la jointure du *cubitus* pour le second, et l'extrémité de l'aile, ou sa pointe, pour le troisième angle, deux triangles pareils, dans la position que la ligne tirée par les deux racines divise chaque triangle en deux triangles égaux, représenteront assez approchamment les ailes déployées pour le vol. Cette supposition, la plus simple de toutes, me semble aussi être la plus approchante de toutes celles qu'on pourroit imaginer ou choisir, même parmi les surfaces curvilignes connues et calculables. Voyons donc quelles seront, pour cette hypothèse, les valeurs de A, B et M. Soit pour cet effet Tab. I. Fig. 5.

OA

$OA = a$, $BE = b$, $OZ = x$, $XY = y$ et l'angle $DAO = \zeta$, et comme $x : y = a : b$, on aura $y = \frac{bx}{a}$. Or l'element de la surface de l'aile sera aprésent $y\,\partial x \sin.\zeta$, et par conséquent nous aurons :

$$A = \int x^2 y\,\partial x \sin.\zeta \left[\begin{array}{l}\text{depuis } x = 0 \\ \text{jusqu'à } x = a\end{array}\right] = \tfrac{1}{4} a^3 b \sin.\zeta$$

$$B = \int x^3 y\,\partial x \sin.\zeta \left[\begin{array}{l}\text{depuis } x = 0 \\ \text{jusqu'a } x = a\end{array}\right] = \tfrac{1}{5} a^4 b \sin.\zeta$$

$$M = d\int x^2 y\,\partial x \sin.\zeta \left[\begin{array}{l}\text{depuis } x = 0 \\ \text{jusqu'à } x = a\end{array}\right] = \tfrac{1}{4} a^3 b\, d \sin.\zeta$$

De là résulte la distance du centre d'action C à l'axe de gyration, $OC = \frac{B}{A} = \frac{4}{5} a$ (§. 3. Art. V).

Corollaire 4.

§. 7. De là résulteroit encore pour le cas où $\lambda\Phi$ fut plus grand que l'unité, selon le Corollaire 2. §. 5. la force

$$V = \frac{5 n \alpha\alpha a^3 b\, \Pi \sin.\zeta}{80 g\, \Pi + 4 n \alpha\alpha a^4 b \sin.\zeta}$$

ou bien, en mettant $b = \beta a$, elle seroit

$$V = \frac{5 n \alpha\alpha\beta a^4\, \Pi \sin.\zeta}{80 g\, \Pi + 4 n \alpha\alpha\beta a^5 \sin.\zeta}.$$

Expression qui nous fait voir que la force V devient nulle tant pour $a = 0$ que pour $a = \infty$, et qu'il y a, par conséquent, une valeur de a qui la rend un *Maximum*.

Corollaire 5.

§. 8. Que si nous voulons connoître les dimensions des ailes qui rendent la force V la plus grande possible, en mettant

tant $\frac{\partial V}{\partial a} = 0$, nous trouverons :

$$a = \sqrt{\frac{80\, g\, \Pi}{n\, \alpha\, \alpha\, \beta\, \sin.\, \zeta}} \text{ et } b = \sqrt[5]{\frac{80\, g\, \beta^4\, \Pi}{n\, \alpha\, \alpha\, \sin.\, \zeta}}$$

et alors la force même sera $V = \frac{\Pi}{a}$, et son moment sera $V.\ OC = 4\,\Pi$.

Corollaire 6.

§. 9. Retournons à notre expression générale $V = \frac{n \mu A}{4 \lambda g}(1 - e^{-2\lambda\Phi})$. En décomposant cette force, qui agit dans la direction C V, perpendiculaire à l'aile O U, en deux autres C P et C Q, l'une verticale l'autre horizontale, on aura $CP = V \sin.\, CVP$ et $CQ = V \cos.\, CVP$; et comme nous avons nommé l'angle que la position initiale O A de l'aile fait avec la ligne verticale M N, c'est-à-dire l'angle $AOM = \delta$, nous aurons l'angle $MOU = \delta + \Phi$, et il est clair que $\angle CVP = \angle NOU = 180° - (\delta + \Phi)$, partant $CP = V \sin.\, (\delta + \Phi)$ et $CQ = -V \cos.\, (\delta + \Phi)$. Le moment de la premiere de ces deux forces doit surpasser le moment de la moitié du poids de l'oiseau, sans quoi celui-ci ne sauroit s'élever verticalement en l'air. Tab I Fig. 4

Corollaire 7.

§. 10. Dans la solution du Problème (§. 3. Art. IX. et X.) nous avons exprimé la vitesse u, la force V et le tems t par l'angle Φ. Si au contraire on jugeroit plus convenable d'exprimer u, V et Φ par t, comme nous avons trouvé ci-dessus (Art. X.)

$$t\sqrt{\lambda\mu} = \log.\, (e^{\lambda\Phi} + \sqrt{e^{2\lambda\Phi} - 1})$$

en remontant aux nombres, on aura

$$e^{t\sqrt{\lambda\mu}} = e^{\lambda\Phi} + \sqrt{e^{2\lambda\Phi} - 1}$$

 d'où

d'où l'on tire

$$e^{\lambda\Phi} = \frac{e^{2t\sqrt{\lambda\mu}}+1}{2e^{t\sqrt{\lambda\mu}}} = \frac{e^{t\sqrt{\lambda\mu}}+e^{-t\sqrt{\lambda\mu}}}{2}$$

ce qui peut aussi être exprimé ainsi :

$$e^{\lambda\Phi} = \text{cos. hyp. } t\sqrt{\lambda\mu}$$

de sorte que l'angle même sera

$$\Phi = \frac{1}{\lambda}\, l\, \frac{e^{t\sqrt{\lambda\mu}}+e^{-t\sqrt{\lambda\mu}}}{2} = \frac{1}{\lambda} \text{ log. cos. hyp. } t\sqrt{\lambda\mu}.$$

Quant à la vitesse $u = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\,(1 - e^{-2\lambda\Phi})$, sa valeur exprimée par le tems t sera

$$u = \sqrt{\tfrac{\mu}{\lambda}} \cdot \frac{e^{2t\sqrt{\lambda\mu}}-1}{e^{2t\sqrt{\lambda\mu}}+1} = \sqrt{\tfrac{\mu}{\lambda}} \text{ . tag. hyp. } t\sqrt{\lambda\mu}.$$

d'où l'on tire enfin la force

$$V = \frac{n A u u}{4g} = \frac{n A \mu}{4\lambda g}\,(\text{tag. hyp. } t\sqrt{\lambda\mu})^2.$$

Scholie I.

§. 11. De cette manière le Problème proposé seroit donc résolu complettement et généralement. Mais je ne me cache pas que lorsqu'il s'agiroit d'en faire l'application à un cas déterminé, à un oiseau donné de grandeur et d'espèce, on pourroit se trouver dans quelque embarras, parceque parmi les données qui entrent dans les formules finales de notre solution, il y en a quelques unes qu'il n'est pas si aisé de se procurer. Car A, B et M dépendent de la grandeur et de la forme des ailes, Π et α de la force des muscles pectoraux. Cependant quant aux premières quantités, la supposition du Corollaire 3, (§. 6.) paroît lever les difficultés, et quant aux autres, comme c'est principalement la plus grande vitesse α, qui peut causer de l'embarras, nous abandonnerons cette considération, en mettant simplement le moment de la force musculaire qui met l'aile en action = Π; pour lors nous n'avons qu'à mettre dans notre

notre équation (§. 3. Art. VI.) Π à la place de $\Pi\ (1 - \frac{uu}{\alpha\alpha})$, et le seul changement qui en résulte regarde la valeur de la quantité constante λ, qui sera maintenant $\lambda = \frac{nB}{2M}$. Quant à μ, si nous mettons $\Pi = fP$, desorte que P désigne la force musculaire même, et f son bras de levier, nous aurons $\mu = \frac{2gfP}{M}$. Les autres formules de notre solution et de ses corollaires ne subissent aucun changement. Ainsi la force musculaire P et son bras de levier f étant connus, il n'y a plus rien de précaire ni d'hypothétique dans nos formules, à moins que pour déterminer A, B et M, l'on n'aye recours dans les applications qu'on voudroit faire, à la substitution des ailes planes triangulaires uniformement épaisses du troisieme corollaire, suppositions au reste, dont la seconde est assez indifférente, et dont les Géomètres se permettent la premiere dans plusieurs problèmes analogues au notre, entre autres dans la solution du problème nautique de déterminer l'action du vent sur les voiles enflées, en leur substituant une *seule* voile *plane* de même surface.

Scholie.

§ 12. Afin de pouvoir juger en gros jusqu'à quel point la supposition des ailes triangulaires planes, faite au corollaire troisième (§ 6) est admissible, et jusqu' à quel point les résultats que présente notre solution sont, dans cette hypothèse, conformes à la nature et à l'expérience, nous allons les soumettre à une épreuve décisive, en faisant l'application de nos formules générales à un cas particulier, non controuvé, mais réel et propre à être comparé dans ses résultats calculés avec les phénomènes observés. Le Mémoire de Silberschlag, dont

N 2 nous

nous avons fait mention ci-dessus (§ 3) nous fournit un tel cas avec presque tous les details que nous pouvons désirer. L'auteur du Mémoire raconte d'avoir nourri quelque tems un aigle brun qui avoit 6 pieds d'envergure sur une largeur des ailes de $1\frac{1}{3}$ pieds [b]. Reduction faite de la largeur du dos entre les articulations des ailes, on trouvera que des ailes de ces dimensions équivalent à très peu près à des ailes triangulaires du § 6, en mettant $a = 20$ pouces, $b = 40$ pouces de notre pied et l'angle $\zeta = 40$ degrés. Car alors on aura $DI = 14\frac{1}{2}$ pouces du Rhin et $GH = 36$ pouces ($GO = k$ étant supposé de 2 pouces) et $OB = 36\frac{1}{2}$ pouces. Ce même aigle pesoit 8 livres et portoit attaché au pied un boulet de fer de 4 livres. Avec ce poids total de 12 livres (de Berlin?) ou $13\frac{3}{4}$ livres de Russie, l'oiseau étoit encore en état de s'élever en l'air, quoiqu'à une hauteur peu considérable [c]. Quant aux valeurs de f et P, l'auteur les estime, pour son aigle, le premier de $\frac{3}{4}$ pouces et l'autre de 152 livres de Berlin [d] ou 174 livres de Russie. Enfin il a trouvé que cet oiseau, en s'elevant, décrivait avec l'extrémité de son aile un arc de près de 5 pieds [e], ce qui sur un rayon de près de 3 pieds fait un

(b) Mémoire cité, page 225. L'auteur ne dit pas de quel pied il s'est servi; mais comme dans ses propres calculs il évalue la hauteur g en pieds du Rhin, il faut présumer qu'il a reduit les dimensions des ailes à ce pied-là.

(c) Mémoire cité, page 235.

(d) Ibid. . . . 250.

(e) Ibid. . . . 226.

un angle de 95°, de sorte que la plus grande valeur de l'angle Φ sera $= \frac{19\pi}{36}$. Voici les données que nous fournit le Mémoire en question. J'eusse désiré d'y trouver aussi la distance GO $= k$ (Fig. 4), c'est-à-dire la distance de l'articulation de l'aile au plan vertical passant par le centre de gravité de l'oiseau selon EF, de même que l'angle AOM $= \delta$ (Fig. 3), qu'il eut été facile d'estimer, de mesurer même, l'une et l'autre, avec précision. Au defaut de ces mesures nous serons forcés de nous en tenir à une simple estime, et guidés par l'observation de ce que ces quantités sont chez d'autres oiseaux de la même espèce et grandeur, nous ne nous écarterons guères sensiblement de la vérité, en prenant GO $= k = 2$ pouces, et l'angle AOM $= \delta = 15$ degrés (*f*). Avec toutes ces données nous calculerons, d'après nos formules du § 3 et 6, l'exémple suivant.

Exemple.

§ 13. Soit donc, en poids et mesures de Russie: le poids d'un pied cubique d'eau $= 70$ livres; $g = 16 = 192''$; $a = 20''$; $b = 40''$; $d = \frac{1}{4}''$; $f = \frac{3}{4}''$; $k = 2''$; $P = 174$ livres $= 4295,3$ pouces cubes d'eau; $\zeta = 40°$; $\delta = 15°$; $\Phi = \frac{19\pi}{36}$; $n = \frac{1}{850}$. De là nous tirons les valeurs $A = 51423$, $B = 822768$; et $M = 12856$; et de là $\lambda = \frac{nB}{2M} = \frac{2a}{5d} = 0,037647$; $\mu = \frac{2gfP}{M} = 96,2233$.

Cherchons

(*f*) L'aigle de Silberschlag, en s'élevant en l'air, leva les ailes fort haut. V. Mem. cité, page 226.

Cherchons maintenant le tems qu'il faut à l'aile, pour arriver de la position OA à sa plus basse position, c'est-à-dire, pour parcourir un arc de 95 degrés. Or nous avions trouvé au § 3, art. X.

$$t = \frac{1}{\sqrt{\lambda\mu}} \log (e^{\lambda\Phi} + \sqrt{e^{2\lambda\Phi} - 1})$$

ce qui, à cause de $\Phi = \frac{19\pi}{36}$ devient

$$t = \frac{1}{\sqrt{\lambda\mu}} \log (e^{\frac{19\lambda\pi}{36}} + \sqrt{e^{\frac{19\lambda\pi}{18}} - 1}).$$

Or $\frac{19\lambda\pi}{18} = 0,1248422$, par conséquent

$$le^{\frac{19\lambda\pi}{18}} = 0,1243422 \times 0,4342945,$$

ou bien $\log. e^{\frac{19\lambda\pi}{18}} = 0,0542183$, donc $e^{\frac{19\lambda\pi}{18}} = 1,132970$,

et partant $e^{\frac{19\lambda\pi}{18}} - 1 = 0,132970$, ce qui donne $\sqrt{e^{\frac{19\lambda\pi}{18}} - 1} = 0,36465$,

d'où l'on a

$$t = \frac{1}{\sqrt{\lambda\mu}} \log (e^{\frac{19\lambda\pi}{36}} + 0,36465)$$

Mais $\log. e^{\frac{19\lambda\pi}{36}} = 0,0624211 \times 0,4342945$, ou bien

$\log. e^{\frac{19\lambda\pi}{36}} = 0,0271091$, donc $e^{\frac{19\lambda\pi}{36}} = 1,06441$ et

$$t = \frac{1}{\sqrt{\lambda\mu}} \log.\ \mathrm{hyp.}\ 1,42906$$

Or $\log.\ \mathrm{hyp.}\ 1,42906 = \frac{\log.\ \mathrm{tab.}\ 1,42906}{0,4342945} = \frac{0,1550505}{0,4342945}$, ce qui donne enfin le tems cherché

$$t = \frac{0,357017}{\sqrt{\lambda\mu}} = 0,1876 \text{ secondes.}$$

Le tems d'une vibration entiere sera donc $2t = 0,3752$ secondes, ce qui fait $2\frac{7}{10}$ battemens d'aile par seconde; résultât qui convient

convient très bien avec la vitesse observée par Silberschlag, qui dit que son aigle, en commençant à s'élever, faisoit presque trois battemens d'ailes par seconde [g].

Assurés par cet accord, non seulement que la supposition des ailes triangulaires planes est admissible; mais que les valeurs de d et δ, (lesquelles, ne se trouvant pas parmi les données observées par Silberschlag, ont été prises par estime) ne sauroient s'écarter sensiblement de la stricte vérité, nous allons aussi déterminer, pour la plus basse position des ailes, la vitesse de l'aile

$$u = \sqrt{\tfrac{\mu}{\lambda}}\left(1 - e^{-\frac{19\lambda\pi}{18}}\right) \text{ (§ 3. Art. IX)}$$

et la résistance de l'air, ou la force

$$V = \frac{nAuu}{4g} \text{ (§ 3. Art. V.)}$$

La premiere de ces formules donne la vitesse $u = 17{,}3198$; elle nous fait voir que l'aile, dans l'instant de sa plus basse position, a obtenu une vitesse telle que le point A décriroit, avec cette vitesse, un arc. $au = 28{,}866$ pieds par seconde. La seconde formule donne la force $V = 23{,}630$ pouces cubes d'eau, ou bien $V = 0{,}957$ livres.

En décomposant cette force, on obtient une force verticale $CP = V$ sin. $(\delta + \Phi)$ (§ 9) ou $CP = 0{,}900$, dont le moment est

$$\tfrac{4}{5}a \,.\, CP = 14{,}400$$

tandis

(g) Mémoire cité, page 226.

tandis que le moment du demi poids, que l'aile doit élever, est

$$\frac{K \cdot 13,75}{2} = 13,750.$$

Le peu de différence entre ces deux momens confirme encore la validité de nos suppositions; parcequ' elle fait voir que l' aigle en question, avec son boulet au pied, n' a dû pouvoir s' elever dans une direction verticale, ou presque verticale, qu'à une hauteur peu considérable, ce qui s' accorde très bien avec l' observation de Silberschlag (page 235).

Scholie 3.

§ 14. L' accord qu' on a vu subsister partout entre les résultâts de cette application de notre solution générale et les observations faites par Mr. Silberschlag sur le vol ascensionnel de son aigle, m' a paru assez remarquable, pour m' engager à mettre ici tous les détails du calcul numérique, fait d' après les données rapportées, de pareils exemples étant la pierre de touche des solutions des problèmes de cette nature. La nôtre fondée sur des principes assez sûrs, n' en avoit pas besoin à la vérité, prise dans toute sa généralité; mais la supposition que les ailes triangulaires planes du corollaire 3 (§ 6) pourroient équivaloir, dans le calcul, aux ailes concaves à contour curviligne de la nature, avoit besoin d' être examinée. Aprésent nous pouvons juger du degré de confiance que cette supposition mérite. Au reste il est clair que cette hypothèse auroit pu tomber, sans porter atteinte à la solution générale même, laquelle, donnant A, B, M, pour une figure quelconque des ailes, se prête facilement au développement de telle autre hypothèse qu' on jugera plus conforme à la nature.

Addi-

Addition.

§ 15. Le hazard me fit tomber dernièrement entre les mains un petit mémoire de feu Mr. R Forster à Halle, sur le vol des oiseaux [(h)], dans lequel ce célèbre naturaliste prétend que l'oiseau est une Montgolfière naturelle, et attribue principalement à la diminution de l'air contenu dans les réservoirs de ce fluide dont la nature a doué cet l'animal, et qui a été phlogistiqué par la réspiration, le pouvoir de l'oiseau de s'élever en l'air et d'y planer à ailes déployées. Il est clair que c'est la prétendue impossibilité d'expliquer les phénomènes du vol par la seule action des ailes, qui a suggéré au savant Forster cette idée absolument insoutenable. Sans nier que les cavités nombreuses et les réservoirs d'air découverts par Hunter, lesquels, en diminuant si considérablement la pésanteur spécifique des habitans de l'air, contribuent dejà par là même à leur faciliter l'action de voler, ne fussent déstinées à ce but par la nature: tout physicien un peu mieux au fait des loix de l'Hydrostatique, sentira d'abord que cette phlogistisation, vis-à-vis de laquelle Mr. Forster ne compte presque pour rien l'action des ailes et tous les avantages que l'oiseau tient de sa structure et de son organisation externe, est d'un effet beaucoup trop petit, pour contribuer d'une manière sensible au vol.

§ 16. Soit p le poids d'un volume d'eau égal au volume de l'oiseau, et comme, selon Mr. Forster, un cinquième

(h) Neue Theorie über den Flug der Vögel, nach den Grundſätzen der Hydroſtatik. Berl. Monatſchr. October 1784.

cinquième de ce volume consiste en cavités ou réservoirs d'air, si ces réservoirs sont remplis d'air atmosphérique, le poids de l'oiseau sera $\frac{4}{5}p + \frac{\frac{1}{5}p}{800}$, et son poids, après avoir phlogistisé cet air, sera $\frac{4}{5}p + \frac{\frac{1}{5}p}{10 \cdot 800}$. Ainsi la différence entre le plus petit poids possible de l'oiseau et le plus grand poids possible de l'air qui l'environne, sera

$$\frac{4}{5}p + \frac{\frac{1}{5}p}{10 \cdot 800} - \frac{1}{800}p = \frac{31951}{40000}p$$

C'est d'autant que l'oiseau, lorsqu'il a sa plus grande légereté est encore plus pesant que l'air inférieur. Comment donc pourroit il s'elever, par la seule phlogistisation de l'air qu'il renferme, comment planer dans les couches d'air plus elevees et plus subtiles?

§ 17. Même en supposant que l'oiseau soit aussi leger que l'air proche de la surface de la terre, la seule phlogistisation de son air ne le feroit monter qu'à une hauteur de $7\frac{1}{2}$ pieds, tout au plus, au dessus de la surface de la terre. Car en comptant 80 pieds d'elevation sur chaque ligne de descente du mercure dans le barometre, la diminution du poids de l'air à une hauteur $x = n \cdot 80$ pieds sera telle, que tel volume qui pèse P à la surface de la terre, ne pesera que $P - \frac{nP}{336}$ à une hauteur de x pieds. Or la diminution que l'oiseau a pu produire dans son propre poids etant

$$\frac{4}{5}p + \frac{\frac{1}{5}p}{800} - \frac{4}{5}p - \frac{\frac{1}{5}p}{10 \cdot 800} = \frac{9p}{40000}$$

la hauteur à laquelle il pourra s'élever par ce moyen, se trouvera par l'équation $\frac{nP}{336} = \frac{9p}{40000}$. Car $n = \frac{x}{80}$ et $P = \frac{4}{5}p + \frac{\frac{1}{5}p}{800}$, partant

$\frac{x}{80 \cdot 336}$

$$\frac{x}{80 \cdot 336}\left(\frac{4}{5}p + \frac{\frac{1}{5}p}{800}\right) = \frac{9p}{40000}$$

d'où l'on tire $x = 7{,}55$ pieds.

§ 18. Ce calcul est fondé, à la vérité, sur la supposition que la diminution de la pésanteur de l'air soit uniforme; mais comme les écarts de cette uniformité ne deviennent sensibles qu'à des hauteurs très considérables, on voit bien que pour le cas présent un calcul selon la formule rigoureuse exponentielle seroit fait en pure perte et ne donnéroit pas des résultats plus favorables à l'hypothèse de Mr. Forster. D'ailleurs ce n'est pas la réfutation sérieuse d'une théorie du vol absolument insoutenable que j'ai eu en vue dans cette addition; mon princibal but est d'ajouter à mes récherches précédentes quelques autres sur l'effet que la force des ailes produit dans l'oiseau qui prend l'essor. J'ose espérer que les recherches suivantes, que les doutes d'un ami séduit par les raisonnemens de Forster m'avoient engagé à faire, afin de lui prouver que la seule force des ailes suffisoit pour expliquer l'élévation de l'oiseau, ne déplairont pas aux lecteurs du mémoire précédent.

§ 10. Soit p le poids de l'oiseau et γ la vitesse qu'il devroit avoir pour que la résistance de l'air, que je nommerai R, fut égale au poids p; et parceque les résistances sont comme les quarrés des vitesses, en nommant v la vitesse d'ascension, qui après un tems de τ secondes écoulé depuis le commencement du mouvement, répond à la résistance R, nous aurons $p : \mathrm{R} = \gamma\gamma : vv$, et partant $\mathrm{R} = \frac{pvv}{\gamma\gamma}$. La plus grande force, avec laquelle les deux ailes peuvent agir, est $2\mathrm{V} = \frac{2\Pi}{a}$ (§ 8).

(§ 8). Mais $\Pi = fP$ (§ 11), donc $2V = \frac{2fP}{a}$. A cette force s' oppose 1°) le propre poids de l' oiseau p et 2°) la résistance de l' air $R = \frac{pvv}{\gamma\gamma}$. Le principe de l' accélération nous présente donc cette équation différentielle à résoudre:

$$\partial v = \frac{2g\partial\tau}{p}(2V - p - R)$$

ou bien celle-ci:

$$\partial v = 2g\partial\tau\left(\frac{2fP}{ap} - 1 - \frac{vv}{\gamma\gamma}\right)$$

de laquelle, en mettant pour abrêger $\frac{2fP}{ap} = \varepsilon$, on déduit l'élément du tems

$$\partial\tau = -\frac{\gamma\gamma\partial v}{2g\,[(1-\varepsilon)\gamma\gamma + vv]}$$

qu' on pourra aussi représenter sous cette forme positive:

$$\partial\tau = +\frac{\gamma\gamma\partial v}{2g\,[(\varepsilon - 1)\gamma\gamma - vv]}$$

§ 20. Ces deux formules différentielles, qui ne diffèrent que par les signes, donnent des intégrales très différentes. Selon que la valeur de ε, qui peut varier tant à l' égard de la différence générique des oiseaux, selon la variété dans la forme et la grandeur des ailes et dans la force musculaire, qu' à l' égard du même oiseau sous les mêmes rapports et sous celui d' une charge plus ou moins grande qu' il doit élever outre son propre poids, selon que cette valeur ε, dis-je, devient plus petite ou plus grande que l' unité, il faudra se servir ou de la première ou de la seconde valeur trouvée pour $\partial\tau$. Soit 1°) $\varepsilon < 1$, et l' intégrale de la première formule sera

$$\tau = C - \frac{\gamma}{2g\sqrt{1-\varepsilon}}\ \text{Arc. tag.}\ \frac{v}{\gamma\sqrt{1-\varepsilon}}$$

où

où la constante C doit être déterminée de manière que pour le commencement du mouvement, où $v = c$, le tems τ s'évanouisse, en indiquant par c la vitesse initiale. D'après cette condition nous aurons la constante

$$C = \frac{\gamma}{2g\sqrt{1-\varepsilon}} \text{ Arc. tag. } \frac{c}{\gamma\sqrt{1-\varepsilon}}$$

ce qui étant substitué, le tems cherché sera

$$\tau = \frac{\gamma}{2g\sqrt{1-\varepsilon}} \left[\text{Arc. tag. } \frac{c}{\gamma\sqrt{1-\varepsilon}} - \text{Arc. tag. } \frac{v}{\gamma\sqrt{1-\varepsilon}}\right]$$

ou bien, en faisant usage des réductions connues des formules trigonométriques

$$\tau = \frac{\gamma}{2g\sqrt{1-\varepsilon}} \text{ Arc. tag. } \frac{(c-v)\gamma\sqrt{1-\varepsilon}}{\gamma\gamma(1-\varepsilon)+cv}.$$

§. 21. Réciproquement on trouvera au moyen de cette expression, pour un tems donné τ, la vitesse que l'oiseau a obtenue

$$v = \frac{c\gamma\sqrt{1-\varepsilon} - \gamma\gamma(1-\varepsilon) \text{ tag. } \frac{2g\tau\sqrt{1-\varepsilon}}{\gamma}}{\gamma\sqrt{1-\varepsilon} + c \text{ tag. } \frac{2g\tau\sqrt{1-\varepsilon}}{\gamma}}$$

laquelle ne sauroit devenir nulle qu'après un certain tems τ, qui sera

$$\tau = \frac{\gamma}{2g\sqrt{1-\varepsilon}} \text{ Arc. tag } \frac{c}{\gamma\sqrt{1-\varepsilon}}$$

Or comme un second battement d'aile succède au premier, avant que la vitesse puisse s'évanouir, un troisième au second, et ainsi de suite, il est évident que l'oiseau, même chargé de sa proye, ou d'un autre poids proportionné à ces forces, pourra s'élever à une certaine hauteur par la seule action de ses ailes.

§ 22.

§. 22. Quant à l'espace parcouru dans le tems τ, il pourra être déterminé de la manière suivante: Reprenons l'équation du §. 19.

$$\partial v = 2 g \partial \tau \left(\frac{2fP}{ap} - 1 - \frac{vv}{\gamma\gamma}\right)$$

multiplions la par $\gamma\gamma v$, et mettons à la place de $\frac{2fP}{ap}$ sa valeur ε, nous aurons

$$\gamma\gamma v \partial v = 2 g v \partial \tau \; [(\varepsilon - 1) \gamma\gamma - vv]$$

ou bien, parceque en nommant l'espace parcouru $= s$, il y a $v \partial \tau = \partial s$, nous aurons

$$\gamma\gamma v \partial v = 2 g \partial s \; [(\varepsilon - 1) \gamma\gamma - vv]$$

équation qui nous donne

$$\partial s = - \frac{\gamma\gamma v \partial v}{2g\,[(1-\varepsilon)\gamma\gamma + vv]}$$

d'où résulte, en prenant l'intégrale,

$$s = C - \frac{\gamma\gamma}{4g} \log. \; [(1 - \varepsilon) \gamma\gamma + vv]$$

où la constante C doit être déterminée de manière que cet espace s évanouisse lorsqu'on met $v = c$, ce qui fouruit

$$C = \frac{\gamma\gamma}{4g} \log. \; [(1 - \varepsilon) \gamma\gamma + cc]$$

de sorte que l'espace cherché sera

$$s = \frac{\gamma\gamma}{4g} \log. \frac{(1-\varepsilon)\gamma\gamma + cc}{(1-\varepsilon)\gamma\gamma + vv}$$

§. 23. Quant à la vitesse γ, qui rend la résistance R de l'air égale au poids p de l'oiseau, on peut la ramener de la manière suivante à des mesures connues. Comme il est démontré que la résistance qu'un plan éprouve quand il est mû dans un fluide quelconque, est égale au poids d'une colonne du même fluide, qui a pour base la surface du plan et pour hau-

hauteur la hauteur düe à la vitesse, c'est-à dire $\frac{vv}{4g}$, en nommant la surface de la base de cette colonne $= \varkappa\varkappa$, nous aurons la résistance $R = \frac{\varkappa\varkappa\gamma\gamma}{4g}$, d'où l'on déduit $\gamma = \frac{\sqrt{4gP}}{\varkappa}$.

§. 24. Tout étant ainsi préparé pour le calcul, faisons l'application de nos formules à notre aigle du §. 12., et parceque l'oiseau, en battant l'air de ses ailes avec une vitesse de 28,866 pieds par seconde (§. 13.), fait naître un vuide instantané au dessus des ailes, la résistance qui s'oppose à son ascension n'agira presque que sur son dos arrondi, et même obliquement, et partant la surface $\varkappa\varkappa$ (§. 23.) sera tout au plus les trois quarts de celle de la section horizontale du corps de l'oiseau, qu'on peut évaluer a un demi pied quarré, de sorte que $\varkappa\varkappa = \frac{3}{8}$, et partant $\gamma\gamma = \frac{64.\ 13\frac{3}{4}}{\frac{3}{8}} = 2346,67$ et $\gamma = 48,44$. Ensuite, à cause de $\varepsilon = \frac{2fP}{aP} = \frac{\frac{3}{2}.\ 174}{20.\ 13\frac{3}{4}} = \frac{261}{275}$, on aura $1 - \varepsilon = \frac{14}{275} = 0,050909$, desorte que $\sqrt{1-\varepsilon} = 0,2256$. D'après ces valeurs le tems, auquel la vitesse que le premier battement d'ailes a imprimée à l'oiseau, et que nous supposerons avoir été de 10 pieds par seconde au commencement, s'évanouit, sera d'après la formule du §. 21.

$$\tau = \frac{48,44}{32.\ 0,2256} \text{ Arc. } tg \frac{10}{48,44 \times 0,2256} = 4,973''$$

Or un battement d'aile de notre aigle se faisoit en 0,1876 secondes (§. 13.), desorte qu'au moment où le premier battement cesse, il reste à l'oiseau une vitesse qui, à cause de

$$\frac{2g\tau\sqrt{1-\varepsilon}}{\gamma} = \frac{32.\ 0,1876.\ 0,2256}{48,44} = 0,027958 = 1°,\ 36',\ \text{sera}$$

V =

$$V = \frac{109,281 - 3,336}{10,928 - 0,279} = \frac{105,945}{11,207} = 9,432.$$

Enfin l'espace parcouru au bout du premier battement, c'est-à-dire après le tems de 0,1876 secondes, sera $s = \frac{\gamma\gamma}{4g}$ log. hyp. $\frac{219,42}{208,38} = \frac{\gamma\gamma}{4g}$ log. hyp. 1,05298. Or log. hyp. 1,05288 = 0,051624, donc l'espace cherché

$$s = \frac{2346,67}{64} \cdot 0,051624 = 1,89 \text{ pieds.}$$

§. 25. Examinons aprésent aussi l'autre cas, où $\varepsilon > 1$, ce qui aura lieu pour le même aigle, lorsqu'on détachera de son pied le boulet de fer du poids de 4 ℔ de Berlin qu'il a porté jusqu'aprésent. En reprenant donc la formule

$$\partial\tau = + \frac{\gamma\gamma\partial v}{2g[(\varepsilon-1)\gamma\gamma - vv]} \text{ (§. 19.)}$$

son intégrale nous donnera le tems écoulé

$$\tau = C + \frac{\gamma}{4g\sqrt{\varepsilon-1}} \log. \frac{\gamma\sqrt{\varepsilon-1}+v}{\gamma\sqrt{\varepsilon-1}-v}$$

où la constante düement déterminée sera

$$C = -\frac{\gamma}{4g\sqrt{\varepsilon-1}} \log. \frac{\gamma\sqrt{\varepsilon-1}+c}{\gamma\sqrt{\varepsilon-1}-c}$$

ce qui donne le tems

$$\tau = \frac{\gamma}{4g\sqrt{\varepsilon-1}} \log. \frac{\gamma\sqrt{\varepsilon-1}-c)(\gamma\sqrt{\varepsilon-1}+v)}{\gamma\sqrt{\varepsilon-1}+c)(\gamma\sqrt{\varepsilon-1}-v)}.$$

Mettons, pour simplifier, $\frac{\gamma\sqrt{\varepsilon-1}-c}{\gamma\sqrt{\varepsilon-1}+c} = \mathfrak{A}$, et remontons aux nombres, pour avoir

$$e^{\frac{4g\tau\sqrt{\varepsilon-1}}{\gamma}} = \mathfrak{A}\frac{\gamma\sqrt{\varepsilon-1}+v}{\gamma\sqrt{\varepsilon-1}-v}$$

d'où

d'où nous tirons la vitesse

$$v = \gamma \sqrt{\varepsilon - 1} \cdot \frac{e^{\frac{4 g \tau \sqrt{\varepsilon - 1}}{\gamma}} - \mathfrak{A}}{e^{\frac{4 g \tau \sqrt{\varepsilon - 1}}{\gamma}} + \mathfrak{A}}$$

Observons ici que $\mathfrak{A} < 1$ et $e^{\frac{4 g \tau \sqrt{\varepsilon - 1}}{\gamma}} > 1$, quelque soyent les valeurs de c, γ et ε, pourvû que $\varepsilon > 1$, d'où il suit que cette vitesse ne peut jamais devenir nulle, qu'au contraire elle va toujours en croissant avec le tems τ, sans outrepasser cependant le terme $\gamma \sqrt{\varepsilon - 1}$, qu'elle atteint lorsque $\tau = \infty$. Cette conséquence peut paroître paradoxe, parceque d'une vitesse qui croît à chaque battement d'aile il devroit s'ensuivre que l'oiseau peut monter sans fin, ce qui n'est pas concevable. Mais il faut considérer que dans les grandes élévations, où l'air est plus rare, la valeur de n (§. 3. art. III.), partant aussi celle de V (art. V.), diminue considérablement, ce qui arrive donc aussi à Π (§. 8.), à P (§. 11.) et enfin à ε (§. 19.). Or ε étant devenu plus petit que l'unité, la vitesse v redevient ce qu'elle a été au §. 21, c'est-à-dire décroissante. Quant à l'espace parcouru, à cause de $\varepsilon > 1$, il sera

$$s = \frac{\gamma\gamma}{4g} \text{ log. hyp. } \frac{cc - \gamma\gamma(\varepsilon - 1)}{vv - \gamma\gamma(\varepsilon - 1)}$$

ou plutôt, parceque la vitesse v, et à plus forte raison aussi la vitesse initiale c, est plus petite que $\gamma \sqrt{\varepsilon - 1}$, il sera

$$s = \frac{\gamma\gamma}{4g} \text{ log. hyp. } \frac{\gamma\gamma(\varepsilon - 1) - cc}{\gamma\gamma(\varepsilon - 1) - vv}$$

§. 26. Pour notre aigle, dégagé de son boulet de fer, il y aura $p = 8$ ℔ de Berlin, ou bien $p = 9{,}16$ ℔ de Russie, ce qui donne $\gamma\gamma = 1563{,}31$ et $\gamma = 39{,}54$. Ensuite nous aurons $\varepsilon = \frac{3}{2} \cdot \frac{152}{20 \cdot 8} = \frac{228}{160} = \frac{57}{40}$, partant $\varepsilon - 1 = \frac{17}{40} = 0{,}4250$ et

et $\sqrt{\varepsilon - 1} = 0{,}65192$. De là résulte $\gamma \sqrt{\varepsilon - 1} = 25{,}777$, $\mathfrak{A} = \frac{15{,}777}{35{,}777} = 0{,}4410$ et $\frac{4 g \tau \sqrt{\varepsilon - 1}}{\gamma} = 0{,}1979$. Nous aurons donc $l\, e^{\frac{4 g \tau \sqrt{\varepsilon - 1}}{\gamma}} = \frac{4 g \tau \sqrt{\varepsilon - 1}}{\gamma}\, l\, e = 0{,}1979 \times 0{,}4342945$ $= 0{,}0859715$, et la puissance même $e^{\frac{4 g \tau \sqrt{\varepsilon - 1}}{\gamma}} = 1{,}2189$, ce qui étant trouvé, on aura la vitesse à la fin du premier battement d'aile, c'est-à-dire après le tems $\tau = 0{,}1876$ secondes, qui sera

$$v = 25{,}777 \cdot \frac{0{,}7779}{1{,}6599} = 12{,}080 \text{ pieds.}$$

Enfin l'espace parcouru dans le même tems $\tau = 0{,}1876$ secondes sera

$$s = \frac{\gamma\gamma}{4g} \text{ log. hyp. } \frac{564{,}45}{518{,}52} = 2{,}073 \text{ pieds.}$$

§. 27. Le développement de ce cas particulier nous fait donc voir qu'un aigle vigoureux, qui n'a que son propre poids à porter, peut s'élever, par la seule force de ses ailes, avec une vitesse toujours croissante, à une grande hauteur, jusqu'à ce que la diminution de la pésanteur de l'air dans les hautes régions de l'atmosphère altère les valeurs de n, P et ε au point de produire la vitesse décroissante du §. 21. Mais avant ce terme, ne pouvant pas perdre tout de suite la grande vitesse qu'il a acquise après un battement d'ailes violent et longtems continué, l'oiseau en cessant même de battre l'air, peut employer ce reste de vitesse ascensionnelle, et même la résistance de l'air et ses courans, pour planer quelque tems, sans mouvement apparent des ailes, ce que Mr. Silberschlag a très bien expliqué dans le memoire que j'ai cité plus haut (§. 2.). Au reste il n'est pas douteux que le changement de position des

des ailes, leur expansion, leur retrécissement, l'érection et l'inclinaison de la tête et du corps de l'oiseau, l'agitation plus forte d'une aile que de l'autre, le remuement de la queue etc. sont autant de moyens que l'instinct naturel lui enseigne, et que l'oiseau sait employer avec adresse pour s'élever, pour descendre, pour planer horizontalement, pour serpenter, pour aller en spirale etc.; mais qui est ce qui entreprendroit de soumettre au calcul tous ces phénomènes du vol? Je ne me cache pas que je n'ai fait ici qu'effleurer un sujet qui est vaste et profond et que je laisserai à d'autres plus habiles que moi à approfondir. Je croirai cependant n'avoir pas perdu le tems que j'ai donné à ces recherches, si, en entamant une matière remplie de difficultés et digne d'occuper le génie d'un Géomètre plus expert que moi, j'aurai fait venir à un de nos grands Mathématiciens françois l'envie d'établir une théorie plus parfaite et plus complette du vol des oiseaux.

SOLUTION

DE QUELQUES PROBLÈMES DE L'ANALYSE INDÉTERMINÉE

CONTINUATION.

PAR

C. T. KAUSLER.

Présenté à l'Académie le 13. Aout 1800.

Dans le mémoire de ce titre que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie, j'ai tenté la solution d'un problème proposé par l'immortel L. Euler, et remarquable non seulement par l'application qu'on en peut faire dans l'Analyse de Diophante, mais encore par les difficultés particulières qu'il offre. Je m'y suis servi d'une méthode que j'ai employée depuis avec succès à la solution d'un autre problème semblable de cet illustre auteur, et qui se trouve dans un excellent mémoire intitulé: „De novo genere quaestionum arithmeticarum, pro quibus sol„vendis certa methodus adhuc desideratur“ Voyez le Tome XI. des nouveaux actes, page 78 — 93. Le problème en question termine ce traité intéressant. Le voici tel que Mr. Euler l'a proposé: „Si x et y denotent numeros integros rationales „tam fractos quam integros, investigare omnes numeros inte„gros qui in hac formula: $N = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$ contineantur?“ En même tems il ajoute: „Hic autem ex valoribus „integris ipsarum x et y numeri resultantes facile assignantur, „ac describi possunt, at vero ex fractionibus $x = \frac{p}{q}$ et $y = \frac{r}{s}$ „in-

„ innumerabiles alii resultare possunt, quorum indolem et nexum „ cum prioribus perscrutari — hoc opus, hic labor est. " Les paragraphes suivans contiennent cette solution fondée sur les raisonnemens et les calculs les plus simples.

Problème.

Trouver toutes les valeurs rationelles de x *et* y, *qui rendent l'expression* $N = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$ *égale à un nombre entier?*

Solution.

Il est clair qu'on ne sauroit faire, par rapport à x et y, que les trois suppositions suivantes:

1°) x et y sont l'un et l'autre des nombres entiers.

2°) x est un nombre entier, et y une fraction, vel vice versa, et

3°) x et y sont l'un et l'autre des fractions.

I. La premiere de ces suppositions n'a aucune difficulté, car il suffit de mettre successivement pour x et y tous les nombres entiers, combinés de toutes les manières possibles. La petite table ci-jointe présente toutes les valeurs de N au dessous de 100.

x	y	$N = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$
2	2	9
2	3	24
2	4	45
2	5	72
3	3	64

II.

II. Passons à la seconde supposition, et faisons $y = \frac{p}{q}$, p et q étant des nombres premiers entr'eux, et x un nombre entier. En ce cas nous aurons: $N = (\frac{x^2 - 1}{q^2})(p^2 - q^2)$, et cette expression devra donc être un nombre entier: ce qui ne peut arriver, à moins que $x^2 - 1$ ne soit divisible par q^2. Or $x^2 - 1$ est $= (x + 1)(x - 1)$. Par conséquent l'un de ces facteurs sera divisible par q^2, ou chacun d'eux le sera par q, ou enfin $x + 1$ sera $= \alpha af$; $x - 1 = \beta ce$, et $g = ae = cf$. Dans le premier cas, c'est-à-dire, si $x + 1$ est divisible par q^2, en mettant $\frac{x+1}{q^2} = m$, nous aurons $N = m(mq^2 - 2)(p^2 - q^2)$. Dans le troisième cas nous aurons $\frac{x+1}{q} = m$, et $\frac{x-1}{q} = n$; par conséquent 2 sera $= (m - n)q$. Or m, n, q étant ici des nombres entiers, et q plus grand que l'unité, cette dernière équation ne peut subsister que dans l'hypothèse $m - n = 1$, et $q = 2$. Par conséquent x sera $= 2n + 1$ et $N = n(n + 1)(p^2 - 4)$, où p est un nombre impair et n un nombre entier quelconque. Le quatrieme cas enfin demande un examen plus détaillé. Voici donc les expressions que les trois premiers cas nous fournissent:

$$x = mq^2 - 1; \quad y = \frac{p}{q}; \quad N = m(mq^2 - 2)(p^2 - q^2)$$
$$x = mq^2 + 1; \quad y = \frac{p}{q}; \quad N = m(mq^2 + 2)(p^2 - q^2)$$
$$x = 2n + 1; \quad y = \frac{p}{2}; \quad N = n\ (n + 1)(p^2 - 4)$$

où il est à remarquer, que celles de la troisième supposition, se trouvent déjà comprises dans la première, de laquelle elles peuvent être déduites, en y mettant $q = 2$ et $m = \frac{n+1}{2}$. Il ne nous reste donc que les valeurs suivantes:

$$x = mq^2 \pm 1; \quad y = \frac{p}{q}; \quad N = m(mq^2 \pm 2)(p^2 - q^2)$$

où m, p et q sont des nombres quelconques, mais dont les

deux

deux derniers doivent être premiers entr'eux. C'est d'après ces formules que se trouve calculée la table ajoutée ici, qui présente tous les nombres positifs N au dessous de 100 renfermés dans l'expression générale de cette quantité.

m	p	q	$y = \frac{p}{q}$	$x = mq^2 \pm 1$	$N = m(mq^2 \pm 2)(p^2 - q^2)$
1	3	2	$\frac{3}{2}$	5 ; 3	30 ; 10
2	3	2	$\frac{3}{2}$	9 ; 7	100 ; 60
1	4	3	$\frac{4}{3}$	10 ; 8	77 ; 49
1	5	2	$\frac{5}{2}$	5 ; 3	126 ; 42
1	7	2	$\frac{7}{2}$	5 ; 3	270 ; 90.

Tous les autres nombres entiers qu'on mettroit pour m, p, q donnent des N plus grands que 100. Voici donc les nombres que cette supposition produit : 10 ; 30 ; 42 ; 49, 60 ; 77 ; 90. Ils sont, comme on voit, tous différens de ceux de la supposition Nr. I., et par conséquent nouveaux.

Supposons maintenant que q soit $= 2v$. Alors N devient $= 2m(2mv^2 \pm 1)(p^2 - 4v^2)$, et cette expression sera encore un nombre entier, si on fait $m = \frac{n}{2}$; car elle se change en $n(nv^2 \pm 1)(p^2 - 4v^2)$. Les y et x qui lui répondent sont $\frac{p}{2v}$ et $2nv^2 \pm 1$. Aux valeurs de N de la table précédente on ajoutera donc encore celles qui proviennent de ces dernières formules, en observant seulement que p doit être un nombre impair et premier à v. La table suivante présente ces valeurs :

n	p	v	$y = \frac{p}{2v}$	$x = 2nv^2 \pm 1$	$N = n(nv^2 \pm 1)(p^2 - 4v^2)$
1	3	1	$\frac{3}{2}$	3 ; 1	10 ; 0.
2	3	1	$\frac{3}{2}$	5 ; 3	30 ; 10.
3	3	1	$\frac{3}{2}$	7 ; 5	60 ; 30.
4	3	1	$\frac{3}{2}$	9 ; 7	100 ; 60.
1	5	1	$\frac{5}{2}$	3 ; 1	42 ; 0.
2	5	1	$\frac{5}{2}$	5 ; 3	126 ; 42.
1	5	2	$\frac{5}{4}$	9 ; 7	45 ; 27.
1	7	1	$\frac{7}{2}$	3 ; 1	90 ; 0.
1	7	2	$\frac{7}{4}$	9 ; 7	165 ; 99.
1	7	3	$\frac{7}{6}$	19 ; 17	130 ; 104.
1	9	1	$\frac{9}{2}$	3 ; 1	231 ; 0.
1	9	2	$\frac{9}{4}$	9 ; 7	325 ; 195.
1	9	4	$\frac{9}{8}$	33 ; 31	289 ; 225.

Toutes les autres suppositions, comme il est aisé de s'en convaincre, produisent des N au dessus de 100. Parmi ces valeurs de N il n'y en a que deux de nouvelles, savoir 27 et 99. La première provient de $y = \frac{5}{4}$ et $x = 7$, et la seconde de $y = \frac{7}{4}$ et $x = 7$.

Pour ce qui regarde les valeurs négatives de N, on les trouvera par les mêmes formules, en y prenant $q > p$. C'est pourquoi nous ne nous y arrêterons point.

Il

Il nous reste encore un cas à examiner. C'est lorsque dans l'équation $N = \frac{(x+1)(x-1)}{q^2}(p^2 - q^2)$ les nombres $x+1$ et $x-1$, sans avoir q pour facteur, peuvent se décomposer en des facteurs qui sont multiples des facteurs de q; c'est-à-dire lorsqu'il y a en général: $x+1 = \alpha a f$; $x-1 = \beta c e$; $q = a e = c f$, les quantités α, β, a, f, c, e étant telles que ces trois équations puissent subsister en nombres entiers. Pour en découvrir les rapports, ajoutons et soustrayons les deux premières équations, après y avoir substitué pour a la valeur $\frac{cf}{e}$, tirée de la troisième, et nous obtiendrons les deux équations: $x = \frac{c}{2e}(\alpha f^2 + \beta e^2)$ et $2 = \frac{c}{e}(\alpha f^2 - \beta e^2)$, auxquelles il faudra satisfaire. Or il est clair que x ne deviendra un nombre entier que dans les seuls cas suivans:

1°) Si $c = 2e$; car alors on aura $x = \alpha f^2 + \beta e^2$. Cette même valeur de c substituée dans la seconde équation, la change en: $1 = \alpha f^2 - \beta e^2$. En prenant donc f et e à volonté, on déterminera α et β par les regles connues de l'Analyse indéterminée, et ces nombres étant trouvés, on aura: $x = \alpha f^2 + \beta e^2$, $y = \frac{p}{q} = \frac{p}{ae} = \frac{p}{2ef}$, et $N = \alpha\beta(p^2 - 4e^2f^2)$, où p est un nombre premier à $2ef$ quelconque.

2°) Si $c = e$. En ce cas x est $= \frac{\alpha f^2 + \beta e^2}{2}$, et $2 = \alpha f^2 - \beta e^2$. En prenant donc encore f et e à volonté, on trouvera une infinité de valeurs de α et β qui satisfont non seulement à cette dernière équation, mais qui sont nécessairement telles qu'étant substituées dans la premiere, x devienne un nombre entier $= 1 + \beta e^2$. Les valeurs de y et N, qui lui répondent, sont $\frac{p}{ef}$, et $\alpha\beta(p^2 - e^2f^2)$.

3°)

3°) Si α est $= e\alpha'$; car alors nos deux équations deviennent $x = c\left(\frac{{}^1f^2+\beta e}{2}\right)$, et $z = c\,(\alpha^1 f^2 - \beta e)$. De cette dernière il s'ensuit que c ne sauroit être que 2 ou 1. Dans le premier cas x est $= \alpha^1 f^2 + \beta e$, et $\alpha^1 f^2 - \beta e = 1$, lesquelles formules se traitent absolument comme celles des numéros précédens, auxquelles elles se réduisent. Dans l'autre cas, c'est-à-dire, si $c = 1$, les deux équations deviennent $z = \alpha^1 f^2 - \beta e$, et $x = \frac{\alpha^1 f^2 + \beta e}{2} = 1 + \beta e$, et se réduisent de même aux formules que nous venons de citer.

4°) Si f est multiple de e, c'est-à-dire si $f = ef'$. Dans cette supposition x devient $= \frac{ce\,(\alpha^1 f'^2 + \beta)}{2}$ et $z = ce(\alpha^1 f'^2 - \beta)$, lesquelles formules peuvent être résolues par les mêmes principes que celles que venons d'examiner.

Voilà donc encore un nombre infini de cas, qui donnent des x et N en nombres entiers. Cependant comme la remarque suivante contient encore une solution de cette partie de notre problème, je n'ajouterai point de tables, calculées d'après les formules précédentes, me contentant de quelques exemples.

I. Exemple. Les équations de N I. sont: $1 = \alpha f^2 - \beta e^2$, et $x = \alpha f^2 + \beta e^2$. Pour satisfaire à la première supposons $f = 3$, et $e = 2$. Donc on aura en général $\alpha = 5 + 4m$, et $\beta = 11 + 9m$, m étant un nombre entier quelconque. Les plus petites valeurs proviennent de la supposition $m = 0$, et sont $\alpha = 5$, $\beta = 11$, $x = 89$; Donc $y =$ [illegible] et $N = 55\,(p^2 - 144)$, où p pourra être tout nombre entier premier à 12. C'est ainsi qu'en mettant $p = 13$, on obtient $y = \frac{13}{12}$ et $N = 55 \cdot 25$.

II.

II. Exemple. Les équations de Nr. 2. sont: $2 = \alpha f^2 - \beta e^2$, et $x = \frac{\alpha f^2 - \beta e^2}{2}$. Prenons ici $f = 3$, et $e = 4$, et les plus petites valeurs de α et β se trouveront être 2 et 1. Par conséquent x sera $= 17$, $y = \frac{p}{12}$, et $N = 2\,(p^2 - 144)$. En faisant donc $p = 13$, on obtient $N = 50$, valeur entièrement nouvelle, et provenant de la supposition $x = 17$, et $y = \frac{13}{12}$.

Remarque.

Il y a encore un autre moyen très-simple de résoudre cette partie de notre problème, c'est à-dire, de trouver tous les nombres entiers x qui changent la formule $(x^2-1)(y^2-1)$ en un nombre entier, y étant supposé être une fraction $\frac{p}{q}$. Car en appellant, comme jusqu'ici, ce nombre N, on aura $\frac{(x^2-1)(p^2-q^2)}{q^2} = N$, et il faudra nécessairement que $x^2 - 1$ soit divisible par q^2. Soit le quotient de cette division m, et il y aura: $x^2 = 1 + m q^2$, où l'on voit que puisque x et q sont des nombres entiers, m ne sauroit être un carré. En prenant donc successivement pour cette quantité tous les nombres non-carrés, par le problème de Pell, résolu généralement par Mr. la Grange dans ses additions à l'Algebre de Mr. Euler, (voyez le Paragraphe VII. §. 64 – 76.) on trouvera non seulement les plus petites valeurs de x et q qui satisfont à l'équation $1 + mq^2 = \square = x^2$: mais encore de celles-là toutes les autres plus grandes possibles. Par exemple, en mettant $m = 2$, on trouve que les plus petites valeurs répondant à l'équation $1 + 2\,q^2 = \square = x^2$, sont $q = 2$ et $x = 3$. Celles-ci étant connues, on en déduit d'autres plus grandes, savoir premièrement $q = 12$, $x = 17$; ensuite $q = 70$, $x = 99$, et ainsi de suite. Nous aurons donc pour le cas $m = 2$, les équations:

$$N = 2\,(p^2 - 4);\ N = 2\,(p^2 - 144);\ N = 2\,(p^2 - 4900), \text{ etc.}$$

La premiere, en y mettant successivement pour p les valeurs 3, 5, 7 (qui doivent être des nombres premiers à q) donne les nombres 10, 42, 90, auxquels répondent $x = 3$, et $y = \frac{p}{q}$, ou $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$. La seconde équation donne le nombre 50, résultant de la supposition $p = 13$, $x = 17$ et $y = \frac{13}{12}$, et la troisième donne des N au dessus de 100.

C'est d'après ces principes que nous avons calculé la table ci-jointe, nous servant des formules données par Mr. la Grange à l'endroit mentionné.

m	q	x	p	y	N.
2	2	3	3; 5; 7	$\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{2}$	10; 42; 90
2	12	17	13	$\frac{13}{12}$	50.
3	4	7	5; 7	$\frac{5}{4}$; $\frac{7}{4}$	27; 99.
5	4	9	5; 7	$\frac{5}{4}$; $\frac{7}{4}$	45; 165.
6	2	5	3	$\frac{3}{2}$	30.
7	3	8	4	$\frac{4}{3}$	49.
8	6	17	19	$\frac{19}{6}$	2600.
10	6	19	7	$\frac{7}{6}$	130.
11	3	10	4	$\frac{4}{3}$	77.
12	2	7	3	$\frac{3}{2}$	60.
14	4	15	5	$\frac{5}{4}$	126.
15	8	31	9	$\frac{9}{8}$	255.
18	4	17	5	$\frac{5}{4}$	162.
20	2	9	3	$\frac{3}{2}$	100.

Il

Il est aisé de se convaincre que toutes les autres suppositions donnent des N au dessus de 100. Voici donc toutes les valeurs de N qui résultent de l'hypothèse que x soit un nombre entier, et y une fraction : 10; 27; 30; 42; 49; 50; 60; 77; 90; 99; et dans ce nombre 50 et 77, sont des valeurs entièrement nouvelles.

Quant aux valeurs négatives de N, elles se trouvent par les mêmes formules, en y prenant $p < q$.

III. La troisième supposition est que x et y sont l'un et l'autre des fractions. Pour résoudre ce cas, donnons à notre équation la forme $x^2 = \frac{(N-1)q^2 + p^2}{p^2 - q^2}$. Cette équation ne peut s'expliquer que par les deux hypothèses suivantes :

$$(N-1)\,q^2 + p^2 = \square = P^2, \text{ et } p^2 - q^2 = \square = Q^2;$$
$$(N-1)\,q^2 + p^2 = m\,P^2, \text{ et } p^2 - q^2 = m\,Q^2.$$

Dans chacune de ces hypothèses p et q doivent être regardés comme des nombres premiers entr'eux. Commençons par considérer les équations $(N-1)\,q^2 + p^2 = P^2$, et $p^2 - q = Q^2$. Or nous avons démontré ailleurs (voyez le Tome XIII. des Nova Acta) qu'une différence de deux carrés p^2 et q^2 premiers entr'eux ne devient que dans deux cas égale à un carré:

α) Si $p = A^2 + B^2$, et $q = A^2 - B^2$, A et B étant des nombres premiers entr'eux, dont l'un est pair, l'autre impair.

β) Si $p = \frac{A^2 + B^2}{2}$, et $q = \frac{A^2 - B^2}{2}$, A et B étant l'un et l'autre des nombres impairs, et premiers entr'eux.

Cela

Cela posé, substituons les premières valeurs $p = A^2 + B^2$, et $q = A^2 - B^2$ dans l'équation : $(N - 1) q^2 + p^2 = P^2$, pour la transformer en : $N (A^2 - B^2)^2 + 4 A^2 B^2 = P^2$. Par conséquent N sera $= \frac{(P + 2 AB)(P - 2 AB)}{(A^2 - B^2)^2}$, où P, A, B sont supposés être des nombres entiers. La question est donc réduite à déterminer ces valeurs ensorte, que le quotient N devienne un nombre entier : ce qui pourra se faire par les trois hypothèses suivantes :

a) Si $P + 2 AB$ est divisible par $(A^2 - B^2)^2$; c'est-à-dire, si $P + 2 AB$ est $= (A^2 - B^2)^2 R$, R étant un nombre entier quelconque. En ce cas N deviendra
$= R ((A^2 - B^2)^2 R - 4 AB)$.

b) Si $P - 2 AB$ est divisible par $(A^2 - B^2)^2$, c'est-à-dire, si $P - 2 AB = (A^2 - B^2) R$, ce qui donne
$N = R ((A^2 - B^2)^2 R + 4 AB)$.

c) Si chacun des facteurs $P + 2 AB$ et $P - 2 AB$ est divisible par $A^2 - B^2$. Mettons pour cet effet
$P + 2 AB = (A^2 - B^2) R$, et $P - 2 AB = (A^2 - B^2) S$; par conséquent N sera $= RS$. Or la première équation donne $P = (A^2 - B^2) R - 2 AB$, et la seconde : $P = (A^2 - B^2) S + 2 aB$; donc $R = \frac{(A^2 - B^2) S + 4 AB}{A^2 - B^2}$, et $N = RS = S (\frac{(A^2 - B^2) S + AB}{A^2 - B^2})$. Cette valeur, ainsi que celle de R, doit être un nombre entier. Il faut donc que $4 AB$ soit divisible par $A^2 - B^2$. Supposons que $\frac{4 AB}{A^2 - B^2}$ soit $= T$, et A sera $= \frac{2B \pm \sqrt{(T^2 + 4)}}{1}$. Mais comme il n'y a point de T en nombres entiers qui rendit l'expression $\sqrt{(T^2 + 4)}$ rationnelle, A seroit un nombre irrationnel, si T, comme nous le supposons ici, étoit

étoit un nombre entier, ce qui est contraire à notre supposition.

Par conséquent ce troisième cas ne peut avoir lieu, puisqu'il est impossible que A, B, R et S fussent en même tems des nombres rationnels et entiers.

Nous n'avons donc que les deux valeurs $N = SR((A^2-B^2)^2R \pm 4AB)$, où A et B, comme nous l'avons dit, sont des nombres premiers entr'eux, dont l'un est pair, l'autre impair, et R un nombre entier quelconque. Les valeurs de y et x, répondant à cette expression de N, sont $y = \frac{p}{q} = \frac{A^2+B^2}{A^2-B^2}$, $x = \sqrt{\left(\frac{(N-1)q^2+p^2}{p^2-q^2}\right)} = \frac{(A^2-B^2)R \pm 2AB}{2AB}$. C'est d'après ces formules que nous avons calculée la table suivante :

A	B	R	$y = \frac{A^2+B^2}{A^2-B^2}$	$x = \frac{(A^2-B^2)R \pm 2AB}{2AB}$	$N = R((A^2-B^2)^2R \pm 4AB)$
2	1	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{13}{4}$; $\frac{5}{4}$	17; 1.
2	1	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{11}{2}$; $\frac{7}{2}$	52; 20.
2	1	3	$\frac{5}{3}$	$\frac{31}{4}$; $\frac{23}{4}$	105; 57.
3	2	1	$\frac{13}{5}$	$\frac{37}{12}$; $\frac{13}{12}$	49; 1.
3	2	2	$\frac{13}{5}$	$\frac{31}{6}$; $\frac{19}{6}$	148; 52.
4	3	1	$\frac{25}{7}$	$\frac{73}{24}$; $\frac{25}{24}$	97; 1.
4	3	2	$\frac{25}{7}$	$\frac{61}{6}$; $\frac{37}{6}$	292; 100.
5	4	1	$\frac{41}{9}$	$\frac{121}{40}$; $\frac{41}{40}$	161; 1.
6	5	1	$\frac{61}{11}$	$\frac{181}{60}$; $\frac{61}{60}$	141; 1.
7	6	1	$\frac{85}{13}$	$\frac{253}{84}$; $\frac{85}{84}$	337; 1.

Ici

Ici les valeurs 1, 17, 20, 52, 57 et 97 sont nouvelles. Toutes les autres suppositions donnent ou 1, ou des nombres au dessus de 100, ce que nous allons démontrer: Prenons d'abord $A - B = 1$, et $R = 1$, et prouvons qu'en ce cas la valeur inférieure de N est toujous $= 1$. Car si $A - B = 1$, A sera $= B + 1$, et $A^2 = B^2 + 2B + 1$, donc $A^2 - B^2 = 2B + 1$; et $(A^2 - B^2)^2 = 4B^2 + B + 1$. Or $4AB = 4B^2 + 4B$, donc $N = (A^2 - B^2)^2 - 4AB = 1$. Supposons maintenant que $A - B$ soit $= m$, m étant plus grand que l'unité, et $(A^2 - B^2)^2 - 4AB$ sera $= 4B(m^2 B - m - B)$. Cette expression pour $m = 2$, et $B = 6$, devient $= 384$, et par conséquent plus grande que 100. Donc $(A^2 - B^2)^2 - 4AB$ sera un nombre plus grand que 100, si la différence de A et B surpasse l'unité, et si $A > 7$. A plus forte raison les valeurs $N = R((A^2 - B^2)^2 R - 4AB)$ et $N = R((A^2 - B^2)^2 R + 4AB)$ surpasseront-elles ce terme, si $A > 7$, $A - B > 1$, et $R > 1$. Il s'en suit de là que les nombres: 1, 17, 20, 52, 57, 97 sont les seuls nombres positifs au dessous de 100, résultans de la formule précédente.

Enfin nous remarquerons encore ici, qu'on peut toujours trouver une infinité de x et y en fractions qui rendent l'expression $(x^2 - 1)(y^2 - 1)$ égale à l'unité. Il suffit pour cet effet de prendre dans les formules précédentes $R = 1$; $A - B = 1$, et $x = \frac{(A^2 - B^2)^2 - 2AB}{2AB}$.

Examinons maintenant le cas β, où $p = \frac{A^2 + B^2}{2}$, et $q = \frac{A^2 - B^2}{2}$, A et B étant ici des nombres impairs et premiers entr'eux. Comme cette hypothèse ne diffère que très-peu de la précédente, on peut se servir du même raisonnement, qui conduira enfin aux équations: $N = R((A^2 - B^2)^2 R \pm 4AB$;

$y =$

$y = \frac{A^2 + B^2}{A^2 - B^2}$ et $x = \frac{(A^2 - B^2)^2 R \pm 2 A B}{2 A B}$, qui sont les mêmes que celles que nous venons d'avoir, avec cette seule différence qu'ici A et B sont des nombres impairs, au lieu qu'auparavant ces nombres étoient l'un pair, l'autre impair.

Les seules valeurs de N, au dessous de 100, qu'on obtient de ces formules, sont 76 et 52, provenant de la supposition $A = 3$; $B = 1$; $R = 1$; et parmi lesquelles 76 est nouvelle. Les x et y qui lui répondent sont $\frac{35}{3}$ et $\frac{5}{4}$. Tous les autres A et B, impairs et premiers entr'eux, donnent des N plus grands que 100.

IV. Il nous reste encore à traiter d'une manière semblable les deux équations: $(N-1) q^2 + p^2 = m P^2$, et $p^2 - q^2 = m Q^2$. (v. Nr. III.) Or cette dernière, qui se réduit à $(p+q)(p-q) = m Q^2$, ne sauroit être expliquée que par les trois suppositions suivantes:

1) $p + q = m Q$; et $p - q = Q$.

2) $p + q = m$; et $p - q = Q^2$.

3) $p + q = Q^2$; et $p - q = m$.

La premiere de ces suppositions donne $p = (m+1)\frac{Q}{2}$ et $q = (m-1)\frac{Q}{2}$. Mais comme p et q sont regardés comme des nombres premiers entr'eux, nous rejetterons le facteur commun $\frac{Q}{2}$, en sorte que p soit $= m + 1$ et $q = m - 1$, m étant un nombre pair quelconque. Par conséquent N deviendra $= m \frac{(P-2)(P-2)}{(m-1)^2}$. Cette équation, traitée de la même manière que les précédentes, conduit aux valeurs $N = m R ((m-1)^2 R \pm 4)$;

 $y =$

$y = \frac{m+1}{m-1}$; $x = \frac{(m-1)^2 R \pm 2}{2}$, où R peut être un nombre impair, et u un nombre pair quelconque. Ces formules ne donnent aucune valeur pour N; c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas d'avantage.

La seconde hypothèse du cas que nous traitons ici, conduit aux équations: $p = \frac{m+Q^2}{2}$ et $q = \frac{m-Q^2}{2}$, où l'on voit que m et Q doivent être à la fois pairs ou impairs. Ces valeurs substituées dans l'équation $(N-1)q + p = mP^2$ la changent en celle-ci:

$$(N-1)\left(\frac{m^2-2mQ^2+Q^4}{4}\right) + \frac{m^2+2mQ^2+Q^4}{4} = mP^2, \text{ donc } N = \frac{4m(P+Q)(P-Q)}{(m-Q^2)^2}$$

et cette formule traitée comme les précédentes donne:

$$N = 4mR((m-Q^2)^2 R \pm 2Q), \text{ ou en mettant } R = \frac{T}{4},$$

$$N = m T\left(\left(\frac{m-Q^2}{2}\right)^2 T \pm 2Q\right),$$

où m et Q, comme nous avons dit plus haut, sont à la fois pairs ou impairs, et T un nombre entier quelconque. Les valeurs de x et y, qui répondent à cette expression de N, sont $\frac{m+Q^2}{m-Q^2}$ et $\frac{\left(\frac{m-Q^2}{2}\right)^2 T \pm Q}{Q}$.

Ces formules ne produisent pour N que des valeurs déjà connues par les solutions precédentes, du moins à l'égard des nombres au dessous de 100. C'est ce qui me dispensera d'ajouter ici la table que j'avois calculée pour m'en assurer. Il en est de même de la troisième hypothèse de ce cas, laquelle se réduit entièrement à celle que nous venons d'examiner.

V. Les formules données jusqu' ici n' épuisent pas encore tous les cas possibles, puisqu' il n' est point essentiel

que

que toutes les quantités qui entrent dans les différentes expressions de N soient des nombres entiers. Parcourons donc toutes ces formules de Nr. III et Nr. IV, dans la supposition que les élémens, dont elles sont composées, soient en tout ou en partie des fractions, et tâchons de les déterminer en sorte, que les valeurs de N qui en résultent, soient des nombres entiers.

Commençons par l'équation $N = R((A^2 - B^2)^2 R + 4AB)$, dans laquelle il est essentiel de distinguer les trois cas suivans:

a) A et B peuvent être des nombres entiers et R une fraction.

b) R est un nombre entier, et A et B des fractions.

c) R, A, et B sont des fractions.

1°) Si A et B sont des nombres entiers, et R une fraction $= \frac{V}{W}$, où V et W doivent être regardés comme des nombres entiers et premiers entr' eux, N deviendra $= V \left(\left(\frac{A^2 - B^2}{W}\right)^2 V \pm \frac{4AB}{W}\right)$. Or A et B sont ou l'un pair, l'autre impair, ou l'un et l'autre impairs. Dans le premier cas, A^2 B^2 étant un nombre impair, il faut que W, pour être un facteur de cette différence, soit impair aussi. Or cette même quantité W (à cause de $\frac{4AB}{W} =$ à un nombre entier) doit être en même tems facteur de A ou B, (puisqu' elle ne sauroit être ni 2 ni 4). Mais il est impossible que W soit

à la fois facteur de AB, c'est-à-dire de A ou B, et de $A^2 - B^2$, A et B étant supposés être premiers entr' eux. Par conséquent cette première hypothèse ne nous mène à rien. Voyons maintenant ce que devient N, si A et B sont l'un et l'autre impairs et $R = \frac{V}{W}$. En ce cas nous aurons $N = V \times ((A^2 - B^2)^2 \frac{V}{W^2} \pm \frac{4AB}{W})$. Soit $A = 2a + 1$ et $B = 2b + 1$, et N se changera en $V((a(a+1) - b(b+1))^2 \frac{16V}{W^2} \pm \frac{4(2a+1)(2b+1)}{W})$, laquelle expression, comme on voit, n'admet que les seules suppositions suivantes: $W = 2$; $W = 4$; et $W =$ à un facteur de $2a + 1$ (ou de $2b + 1$) qui le soit en même tems de $a(a+1) - b(b+1)$. La première conduit à l'expression générale

$$N = 2V((a(a+1) - b(b+1))^2 2V \pm (2a+1)(2b+1))$$

la seconde à

$$N = V((a(a+1) - b(b+1))^2 V \pm (2a+1)(2b+1))$$

et la troisième exige un examen particulier. Les deux tables ajoutées ici sont calculées d'après ces formules, la première pour le cas $W = 2$, et l'autre pour le cas $W = 4$. Elles renferment toutes les suppositions qui peuvent produire des N au-dessous de 100.

a	b	$A=2a+1$	$B=2b+1$	V	W	$R=\frac{V}{W}$	$y=\frac{A^2+B^2}{A^2-B^2}$	$x=\frac{(A^2-B^2)^2R\pm 2AB}{2AB}$	$N=2V((a(a+1)-b(b+1))^2\,2V \pm (2a+1)(2b+1))$
1	0	3	1	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{19}{3}$; $\frac{13}{3}$	22; 10
1	0	3	1	3	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	32; 30	162; 126
2	0	5	1	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{12}$	$\frac{149}{5}$; $\frac{139}{5}$	150; 138
2	1	5	3	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{79}{15}$; $\frac{49}{15}$	94; 34
3	0	7	1	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{583}{7}$; $\frac{569}{7}$	590; 562
3	1	7	3	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{29}{20}$	$\frac{421}{21}$; $\frac{379}{21}$	414; 368
3	2	7	5	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{37}{12}$	$\frac{179}{35}$; $\frac{109}{35}$	214; 74
4	3	9	7	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{65}{16}$	$\frac{319}{63}$; $\frac{193}{63}$	382; 130

Les valeurs nouvelles de cette table sont: 22; 34; 47; 94. La première provient de $x=\frac{19}{3}$, et $y=\frac{5}{4}$; la seconde de $x=\frac{49}{15}$ et $y=\frac{17}{8}$; la troisiéme de $x=\frac{09}{35}$ et $y=\frac{37}{12}$; et la quatrième de $x=\frac{79}{15}$ et $y=\frac{17}{8}$.

Ajoutons la seconde table pour la cas $W=4$.

a	b	$A=2a+1$	$B=2b+1$	V	W	$R=\frac{V}{W}$	$y=\frac{A^2+B^2}{A^2-B^2}$	$x=\frac{(A^2-B^2)^2R\pm 2AB}{2AB}$	$N=V((a(a+1)-b(b+1))^2\,V \pm (2a+1)(2b+1))$
1	0	3	1	1	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{11}{5}$; $\frac{5}{3}$	7; 1
1	0	3	1	3	4	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	9; 7	45; 27
1	0	3	1	5	4	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{43}{3}$; $\frac{37}{3}$	115; 85
2	0	5	1	1	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{13}{12}$	$\frac{77}{5}$; $\frac{67}{5}$	41; 31
2	0	5	1	3	4	$\frac{3}{4}$	$\frac{13}{12}$	$\frac{221}{5}$; $\frac{211}{5}$	383; 309
2	1	5	3	1	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{47}{15}$; $\frac{17}{15}$	31; 1
2	1	5	3	3	4	$\frac{3}{4}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{37}{5}$; $\frac{27}{5}$	189; 99
3	0	7	1	1	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{295}{7}$; $\frac{281}{7}$	151; 137
3	1	7	3	1	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{29}{20}$	$\frac{221}{21}$; $\frac{179}{21}$	121; 79
3	2	7	5	1	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{37}{12}$	$\frac{107}{35}$; $\frac{37}{35}$	71; 1
4	0	9	1	1	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{41}{40}$	$\frac{809}{9}$; $\frac{791}{9}$	409; 391
4	2	9	5	1	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{53}{28}$	$\frac{427}{45}$; $\frac{347}{45}$	241; 151
4	3	9	7	1	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{65}{16}$	$\frac{191}{63}$; $\frac{65}{63}$	27; 1

Cette

Cette table nous fournit les valeurs nouvelles 7, 31, 41, 71, 79, et 85, auxquelles répondent les valeurs $x = \frac{11}{3}$, et $y = \frac{5}{4}$; $x = \frac{67}{5}$, et $y = \frac{13}{12}$; $x = \frac{77}{5}$, et $y = \frac{13}{2}$; $x = \frac{107}{35}$, et $y = \frac{37}{2}$; $x = \frac{179}{21}$, et $y = \frac{19}{20}$; $x = \frac{37}{3}$, et $y = \frac{5}{4}$.

La troisième supposition enfin est que l'expression

$$N = V\left(\left(\frac{a(a-1) - b(2-1)}{W}\right)^2 16\, V \pm 4\, \frac{(2a-1)(2b\cdot 1)}{W}\right.$$

qui se réduit à:

$$4V\left(\left(\frac{a(a-1) - b(b-1)}{W}\right)^2 \pm \frac{(2a+1)(2b+1)}{W}\right)$$

deviendra un nombre entier, si W est en même tems facteur de $2a+1$ (ou de $2b+1$) et de $a(a-1) - b(b-1)$. Pour résoudre ce cas mettons $V = \frac{1}{4}S$; $2a+1 = Wh$, (W et h étant deux nombres entiers impairs, dont le produit est égal au nombre $2a+1$) et $a(a+1) - b(b+1) = Wk$; k étant un nombre pair, lequel multiplié par le nombre impair W, produise le nombre pair $a(a+1) - b(b+1)$. Cela posé, nous aurons $N = S(k^2S \pm h(2b+1))$, où S est un nombre arbitraire, mais premier à V. Or W est $= \frac{2a+1}{h}$, et aussi $= \frac{a(a+1) - b(b+1)}{k}$; par conséquent a sera $= \frac{2k - h \pm \sqrt{((2b+1)^2 h^2 + 4k^2)}}{2h}$, donc $W = \frac{2a+1}{h}$ devient $= \frac{2k \pm \sqrt{((2b+1)^2 h^2 + 4k^2)}}{h^2}$, et ces expressions de a et W doivent être non seulement des nombres rationels, mais encore entiers. La question est donc réduite à déterminer le nombre impair h et le nombre pair k ensorte que ces deux conditions soient remplies. Pour cet effet soit

$$\sqrt{((2b+1)^2 h^2 + 4k^2)} = H;$$

alors

alors a sera $\frac{2k - b \pm H}{2b}$ et $W = \frac{2k \pm H}{b}$. Attachons nous au signe supérieur de H, et comme cette quantité est plus grande que $(2b + 1)h$, posons $H = (2b + 1)h + z$, pour avoir $4k^2 = 2(2b + 1)z + z^2$. Or il n'est question ici que de nombres entiers: il faut donc nécessairement que z soit pair; par conséquent de la forme $2v$, ce qui donne

$$k^2 = ((2b + 1)h + v)v,$$

où l'on voit que v devra être un carré $\mathfrak{B}^2$. Donc aussi $(2b + 1)h + \mathfrak{B}^2$ sera $= \square = L^2 = (\frac{k}{\mathfrak{B}})^2$, et par conséquent k est $= L\mathfrak{B}$. Ces valeurs changent les expressions précédentes de a et W en $a = b + \frac{\mathfrak{B}(L + \mathfrak{B})}{b}$, et

$$W = \frac{2b + 1}{b} + 2\mathfrak{B}(\frac{L + \mathfrak{B}}{b^2}).$$

Lesquelles valeurs seront des nombres entiers, si h est un des facteurs de $2b + 1$, et qu'en même tems $L + \mathfrak{B}$ soit divisible par h^2. On commencera donc par mettre successivement pour b tous les nombres naturels; on prendra ensuite tous les facteurs h de $2b + 1$, depuis 1 jusqu'au nombre $2b + 1$ lui même, pour chercher tous les $\mathfrak{B}$ tels que $(2b + 1)h + \mathfrak{B}^2$ soit $= \square = L^2$, ce qui est toujours fort aisé. Cela fait on aura $k = \mathfrak{B}L$; $a = b + \frac{\mathfrak{B}(L + \mathfrak{B})}{b}$ et $W = \frac{2b + 1}{b} + \frac{2\mathfrak{B}(L + \mathfrak{B})}{b^2}$. Parmi les valeurs de a et W qui résultent de ces suppositions, on prendra ensuite celles qui sont des nombres entiers. Chaque valeur de b en fournit pour le moins une tant pour a que pour W, laquelle provient de la supposition $h = 1$. Ces nombres étant ainsi déterminés, on remontera par les formules précédentes jusqu'à x, y et N. Au reste comme a et b vont toujours en augmentant, de même que $a(a + 1) - b(b + 1)$,

m

m parviendra nécessairement à des N qui surpassent chaque terme auquel on se propose de pousser l'examen. Si dans les expressions de a et W on avoit pris pour H le signe négatif, des raisonnemans semblables auroient conduit aux formules $(2b + 1)h + \mathfrak{V}^2 = L^2$; $a = \mathfrak{V}\left(\frac{1 - \mathfrak{V}}{L}\right) - (b + 1)$ et $W = \frac{2\mathfrak{V}(1 - \mathfrak{V})}{h^2} - \left(\frac{2b + 1}{h}\right)$, dont la solution est analogue à celle que nous venons de donner. Eclaircissons cette solution par quelques exemples.

Supposons $b = 0$; par conséquent $2b + 1$ sera $= 1$ et $h = 1$; mais comme il n'y a point de carré $\mathfrak{V}^2$ tel que $1 + \mathfrak{V}^2$ soit $= \square$, cette supposition ne nous mène à rien.

Prenons donc $b = 1$; par conséquent $2b + 1$ sera $= 3$, et h ne sauroit être que 1 ou 3. Si $h = 1$, il faudra que $3 + \mathfrak{V}^2$ soit $= \square$; donc $\mathfrak{V}$ sera $= 1$, $L = 2$, et $k = L\mathfrak{V} = 2$. Ainsi on aura: $a = b + \frac{\mathfrak{V}(L + \mathfrak{V})}{h} = 4$, et $W = \frac{2b + 1}{h} + \frac{2\mathfrak{V}(L + \mathfrak{V})}{h^2} = 9$. De là nous obtenons $A = 2a + 1 = 9$; $B = 2b + 1 = 3$, $y = \frac{A^2 + B^2}{A^2 - B^2} = \frac{5}{4}$; $x = \frac{8S \pm 3}{3}$ et $N = S(4S \pm 3)$, où S pourra être tout nombre entier non-multiple de 3. En mettant donc successivement pour cette quantité les nombres 1, 2, 4, 5, 7, etc. on trouve les N suivans au-dessous de 100 : 7; 1; 22; 10, 76; 52, 85; mais parmi ces nombres aucun n'est nouveau. Tel est le résultat du facteur 1. Il nous reste maintenant à examiner l'autre facteur qui est le nombre 2 lui même. En ce cas $(2b + 1)h + \mathfrak{V}^2 = L^2$ se changera en $9 + \mathfrak{V}^2 = L^2$. Donc $\mathfrak{V}$ ne sauroit être que 4; par conséquent L sera $= 5$, $k = \mathfrak{V}L = 20$; $a = 13$ et $W = 9$. Donc

Donc A est $= 27$; $B = 3$; $y = \frac{41}{40}$; $R = \frac{S}{4W} = \frac{S}{36}$;
$x = \frac{\frac{(A^2 - B^2)^2 S}{36} \pm 2AB}{2AB} = \frac{800S \pm 9}{9}$ et $N = S(400S \pm 9)$;
où S peut être tout nombre non-multiple de 9. Mais tous les N compris dans cette formule sont au-de-là de 100.

Soit $b = 2$; donc $2b + 1$ sera $= 5$, et h ne pourra être que 1 ou 5. La première de ces suppositions conduit aux équations $x = \frac{72S \pm 5}{5}$; $y = \frac{13}{12}$; $N = S(36S \pm 5)$. De cette formule on déduit les nombres 41 et 31, en y mettant $S = 1$. Mais il ne sont point nouveaux. La seconde supposition, c'est-à-dire $h = 5$, donne les valeurs $y = \frac{313}{312}$; $x = \frac{4867\ S \pm 25}{25}$; $N = S(156^2 S \pm 25)$: mais toutes les valeurs de cette dernière formule sont beaucoup au-dessus de 100. Il en est de même de tous les autres N résultans des valeurs de b qui surpassent le nombre 2.

Si W avoit été supposé facteur commun de $2b + 1$, et de $a(a + 1) - b(b + 1)$, on auroit trouvé les formules $(2a + 1)h + \mathfrak{B}^2 = L^2$; $k = \mathfrak{B}L$; $W = \frac{2\mathfrak{B}(L + \mathfrak{B})}{b^2} + \frac{2a + 1}{b}$; $b = \frac{\mathfrak{B}(L + \mathfrak{B})}{b} + a$; $N = S(k^2 S \pm (2a + 1)h)$, qui ne diffèrent de celles que nous avons traitées jusqu'ici qu'en ce qu'ici la quantité a a pris la place de b des formules précédentes. Ainsi il ne sauroit résulter des N differens de ceux que nous avons trouvés tantôt.

2) Si R est un nombre entier, et A et B (ou seulement l'un des deux) des fractions, mettons $A = \frac{\alpha}{\beta}$, et $B = \frac{\gamma}{\delta}$, alors N deviendra $\frac{(\alpha^2 \delta^2 - \beta^2 \gamma^2)^2 R^2}{\beta^4 \delta^4} \pm \frac{2 \alpha \gamma R}{\beta \delta}$. Cette expression ne sauroit devenir un nombre entier, à moins que $\beta^2 \delta^2$ ne soit un facteur de R, ou de $\alpha^2 \delta^2 - \beta^2 \gamma^2$. Le dernier cas est impossible, puisque α et β, ainsi que γ et δ, α et γ, β et δ sont supposés être premiers entr' eux. Il faut donc que $\beta^2 \delta^2$ soit facteur de R, c'est-à-dire que R soit $= \beta^2 \delta^2 \tau$, ce qui change la valeur de N en $\tau ((\alpha^2 \delta^2 - \beta^2 \gamma^2)^2 \tau \pm 4 \alpha \beta \gamma \delta)$. Cette expression, en y mettant $\alpha \delta = A'$, et $\beta \gamma = B'$, devient $= \tau ((A'^2 \quad B'^2)^2 \tau \pm 4 A B')$, et se réduit par conséquent à celles que nous avons examinées au paragraphe III.

3) La troisième supposition enfin est, que A, B et R sont des fractions. Soit donc $A = \frac{m}{n}$; $B = \frac{u}{v}$; $R = \frac{r}{s}$, et N sera $= (\frac{m^2 v^2 - n^2 u^2}{s})^2 \frac{r^2}{n^4 v^4} \pm \frac{4mu}{s} \cdot \frac{r}{nv}$; laquelle expression doit être un nombre entier. Or, en considérant d'abord le membre $\frac{4mu}{s} \cdot \frac{r}{nv}$, s premier à r, ne sauroit être facteur de m, puisque s'il l'étoit, il le seroit aussi de u et de n (dans le premier membre $(\frac{m^2 v^2 - n^2 u^2}{s})^2 \frac{r^2}{n^4 v^4}$), ce qui est contre la supposition, m et n, aussi bien que A et B, c'est-à-dire m et u étant premiers entr' eux. Il faut donc nécessairement que s ſoit 2, ou 4. Dans l'un et l'autre cas, r premier à s, sera un nombre impair, et en même tems de la forme $n^2 v^2 w$; et $m v^2 - n^2 u^2$, pour être divisible par s, ne peut être que de la forme $2t$, ou $4t$. Or, si m étoit un nombre pair, n ou u le seroient aussi, ce qui est contraire à l'hypothèse que ces

nombres

nombres soient premiers entr' eux. Il faut donc que m, n, u, v soient des nombres impairs. Substituons maintenant les valeurs $r = n^2 v w$, $s = 2$, et $s = 4$ dans l' expression de N, et elle se transformera en: $N = nvw\left(\left(\frac{m^2 v^2 - n^2 u^2}{2}\right)^2 w \pm 2mu\right)$; et

$$N = nvw\left((m^2 v^2 - n^2 u^2)^2 w \pm mu\right).$$

Ces formules, dont celles des paragraphes III et IV ne sont que des cas particuliers, qu' on en peut deduire aisément, renferment un nombre infini de valeurs pour N. Cependant comme m et n doivent être des nombres impairs et premiers entr' eux, ainsi que u et v, m et u, et n et v, elles ne produisent que des N au dessus de 100, comme on peut s'en convaincre, en prenant pour ces quantités les plus petits nombres possibles. C'est pourquoi nous ne nous y arrêterons point.

Examinons d'une manière semblable les formules:

$$y = \frac{m+1}{m-1};\ x = \frac{(m-1)^2 R \pm 2}{2};\ N = mR\left((m-1)^2 R \pm 4\right) \text{ et}$$

$$y = \frac{m+Q^2}{m-Q^2};\ x = \frac{\left(\frac{m-Q^2}{2}\right)^2 T \pm 2}{Q};\ N = mT\left(\left(\frac{m-Q^2}{2}\right)^2 T \pm 2Q\right)$$

Mais comme la première se déduit de la seconde, en mettant dans cette dernière $Q = 2$; $m = 4m'$, et $T = \frac{1}{4}R$, nous ne considererons que celle-ci. Il sera essentiel d'y distinguer aussi trois cas:

1°) m et Q sont des nombres entiers, et T est une fraction;

2°) m et Q sont des Fractions et T est un nombre entier;

3°) m, Q et T sont des fractions.

Si m et Q sont des nombres entiers et T une fraction, supposons que cette dernière quantité soit $= \frac{u}{v}$; alors N deviendra $= (\frac{m - Q^2}{2})^2 \frac{mu^2}{v^2} \pm \frac{2muQ}{v}$. Cette formule sera un nombre entier dans les cas suivans:

a) Si $v = 2$ et qu' en même tems m et Q soient des nombres impairs, le premier de la forme $4M + 1$, l'autre de la torme $2Q' + 1$. Car ces valeurs substituees dans l'équation de N, la changent en

$$N = u(4M + 1)((Q'(Q' + 1) - M)^2 u \pm (2Q' + 1)),$$

à laquelle répondent les valeurs

$$y = \frac{2M + 2Q'(Q' + 1) + 1}{2M - 2Q'(Q' + 1)}, \quad x = (\frac{(M - Q'(Q'+1))^2 \, 2u \pm (2Q' + 1)}{2Q' + 1}).$$

Ces formules ne donnent aucune valeur nouvelle pour N au-dessous de 100.

b) N devient encore un nombre entier, si $v = 2$, $m = 4M$, et $Q = 2Q'$. En ce cas il y aura

$$N = 4uM((M - Q^2)^2 u \pm 2Q'), \quad y = \frac{M + Q'^2}{M - Q'^2},$$

$$x = \frac{(M - Q'^2)^2 u \pm Q'}{Q'}.$$

Aux valeurs de N qui proviennent de cette expression, on en ajoutera encore celles qu' on obtient, en mettant pour M et Q' des nombres à la fois pairs ou impairs, et $u = \frac{1}{4}U$, et qui sont contenus dans la formule

$$N = MU(\frac{M - Q'^2}{2})^2 U \pm 2Q')$$

dans laquelle U represeute un nombre impair quelconque. Mais comme cette même expression a déja été examinée

Nr. IV.

Nr. IV. nous ne nous y arrêterons point. Quant à la première, elle ne donne pour N d'autres nombres au-dessous de 100, que 20 et 52, qui sont l'un et l'autre connus par les solutions précédentes.

Le troisième cas auquel l'expression de N devient un nombre entier, c'est lorsqu'on prend:

c) $v = 4$, $m = 4M$, et $Q = 2Q'$. Ces suppositions donnent les valeurs $y = \frac{M + Q'^2}{M - Q'^2}$, $x = \frac{(M - Q'^2)^2 u \pm 2Q'}{2Q'}$, et $N = uM((M - Q'^2)^2 u \pm 4Q')$. La table que j'ai calculée d'après ces formules n'a offert aucune valeur nouvelle pour N au-dessous de 100.

d) Une quatrième supposition pour changer la valeur de N en un nombre entier, c'est de faire $v = 8$, $Q = 2Q'$, $m = 8M$. Car alors N devient

$$N = uM((2M - Q'^2)^2 \tfrac{u}{2} \pm 8Q')$$

laquelle expression sera un nombre entier: 1°) si M est un nombre pair, et 2°) si $Q' = 2Q''$. Le premier cas se réduit à la supposition c, et le second donne les valeurs $y = \frac{M + 2Q''^2}{M - 2Q''^2}$; $x = \frac{(M - 2Q''^2)^2 u \pm 2Q''}{2Q''}$; $N = 2uM((M - 2Q''^2)^2 u \pm 4Q'')$. Ici la suppotion $M = 1$, $Q'' = 2$, $u = 1$ produit les valeurs $y = \frac{9}{7}$, $x = \frac{45}{4}$ (en prennant le signe moins) et $N = 82$, dont la dernière est nouvelle.

3)

e) L' expression $N = \left(\frac{m-Q^2}{2}\right)^2 \frac{mu^2}{v^2} \pm \frac{2muQ}{v}$ sera enfin un nombre entier, si $m = \alpha v^2$, α étant un nombre entier quelconque: car en ce cas N devient $= \alpha u\left(\left(\frac{\alpha v^2 - Q^2}{2}\right)^2 u \pm 2vQ\right)$, laquelle formule sera toujours un nombre entier, pourvû que αv et Q soient à la fois pairs ou impairs, ou que u soit un nombre pair. Les valeurs de x et y répondant à cette expression sont: $\frac{\left(\frac{\alpha v^2 - Q^2}{2}\right)^2 u \pm vQ}{vQ}$ et $\frac{\alpha v^2 + Q^2}{\alpha v^2 - Q^2}$, où il est à remarquer que les nombres u et v doivent être premiers entr' eux. Au reste ces formules ne produisent d' autres N au dessous de 100 que ceux qui sont dejà connus par les autres solutions que nous avons données.

2) Si m et Q sont des fractions, et T un nombre entier, supposons $m = \frac{p}{q}$, $Q = \frac{r}{s}$: alors N sera $= \frac{(ps^2 - qr^2)^2 pT^2}{4q^3s^4} \pm \frac{2prT}{qs}$. Cette formule devient un nombre entier dans un grand nombre de cas analogues à ceux du Nr. precédent, et qu' une legère attention fait découvrir. C' est par cette raison, et puisque tout le calcul peut s' achever sans employer de nouveaux artifices, que je passerai légèrement sur ce qui resteroit encore à développer, laissant à ceux qui sont curieux de ces sortes de problemes le soin de faire les petits calculs que je ne ferai qu' indiquer.

Cette expression de N sera un nombre entier:

1°) Si $q = 2$; $s = 2S$; $T = 16\alpha S^2$.

2°)

2°) Si $p = 4s^4p'$; et $T = q^3T'$.

3°) Si $T = q^2s^2\alpha$, et qu'en même tems $ps^2 - qr^2$ soit un nombre pair.

4°) Si $p = 2s^4p'$; et $T = 2q^3T'$ etc.

3) Enfin si m, Q, T sont des fractions, savoir $m = \frac{p}{q}$; $Q = \frac{r}{s}$, $T = \frac{t}{u}$, N devient $= (ps^2 - qr^2) \frac{pt^2}{4u^2s^4q^3} \pm \frac{2tr}{usq}$, expression qui sera un nombre entier dans les cas suivans:

1°) Si $t = 2s^2q^2\beta$, et $p = \alpha u^2$.

2°) Si $t = s^2q^2\beta$, et $p = 2\alpha u^2$.

3°) Si $t = q^2\beta$; $p = u^2s^4\alpha$, et $ps^2 - qr^2 = \alpha'$ un nombre pair etc.

Telles sont donc les différentes routes, sur lesquelles on parvient à la solution générale du problème de Mr. Euler; et quoique la methode, dont je me suis servi, n'ait été appliquée qu'à un cas particulier, (car ce problème n'est autre chose qu'un cas très-simple d'une question bien plus compliquée), il me semble cependant, que cette même méthode pourra être employée avec un égal succès à la solution de toutes les questions de cette espèce. La table que j'ajoute ici, contient le résultat de toutes les recherches précédentes, en supposant que le produit $(x^2 - 1)(y^2 - 1)$ ne surpasse pas le nombre 100.

Table

Table des valeurs de x et y qui rendent le produit $(x^2 - 1)(y^2 - 1)$ égal à un nombre entier et positif N, pour tous les N au-dessous de 100.

x	y	N.	x	y	N
$\frac{5}{4}$; $\frac{13}{12}$; $\frac{25}{24}$, etc.	$\frac{5}{3}$; $\frac{13}{5}$; $\frac{25}{7}$, etc.	1	$\frac{11}{2}$	$\frac{5}{3}$	52
$\frac{11}{31}$	$\frac{5}{4}$	7	$\frac{13}{4}$	$\frac{5}{3}$	57
2	2	9	7	$\frac{3}{2}$	60
3; $\frac{13}{3}$	$\frac{3}{2}$; $\frac{5}{4}$	10	3	3	64
$\frac{13}{4}$	$\frac{5}{3}$	17	$\frac{107}{35}$	$\frac{37}{12}$	71
$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{3}$	20	2	5	72
$\frac{19}{3}$	$\frac{5}{4}$	22	$\frac{109}{35}$	$\frac{37}{12}$	74
3	2	24	$\frac{35}{3}$	$\frac{5}{4}$	76
7	$\frac{5}{4}$	27	10	$\frac{4}{3}$	77
5	$\frac{3}{2}$	30	$\frac{179}{21}$	$\frac{29}{20}$	79
$\frac{47}{15}$; $\frac{67}{5}$	$\frac{17}{8}$; $\frac{13}{12}$	31	$\frac{45}{4}$	$\frac{9}{7}$	82
$\frac{49}{15}$	$\frac{17}{8}$	34	$\frac{37}{3}$	$\frac{5}{4}$	85
$\frac{77}{5}$	$\frac{13}{12}$	41	3	$\frac{7}{2}$	90
3	$\frac{5}{2}$	42	$\frac{79}{15}$	$\frac{17}{8}$	94
2; 9	4; $\frac{5}{4}$	45	$\frac{73}{24}$	$\frac{25}{7}$	97
8; $\frac{37}{12}$	$\frac{4}{3}$; $\frac{13}{5}$	49	7	$\frac{7}{4}$	90
17; $\frac{7}{3}$	$\frac{13}{12}$; $\frac{7}{2}$	50	9; $\frac{37}{12}$	$\frac{3}{2}$; $\frac{25}{7}$	100

Où il est à remarquer que lorsque plusieurs valeurs de x et y se rapportent au même nombre N, comme on le voit dans les colonnes de N = 1, N = 10, N = 31 etc. c'est toujours

toujours la première valeur de x avec la première de y, ou la seconde de x avec la seconde de y, qu'il faut prendre pour en former le produit N. Par exemple le nombre 31 résulte de la supposition $x = \frac{47}{15}$ et $y = \frac{17}{8}$: ou aussi de celle-ci, $x = \frac{67}{5}$, et $y = \frac{13}{12}$, lesquelles valeurs substituées dans la formule $(x^2 - 1)(y^2 - 1)$ changent également ce produit en 31.

Quant aux valeurs négatives de N, je le repète ici que les formules précédentes les contiennent aussi, et qu'il est facile de les en déduire.

DEMONSTRATIO THEOREMATIS:

NEC SUMMAM NEC DIFFERENTIAM DUORUM CUBO-CUBORUM CUBO-CUBUM ESSE POSSE.

AUCTORE

C. F. KAUSLERO.

Conventui exhibita die 18. Jan. 1801.

Novum theorematis Fermatiani casum Geometrarum examini hic subiicere audeo, quem per eandem ratiocinandi methodum, et ut mihi quidem videtur, non minus feliciter absolvi, quam quos nuper cum Academia communicavi, et qui Tomo XIII. pag. 237-253. inserti leguntur. Statueram nimirum loco citato, methodum ibidem exhibitam non solum ad cubos et biquadrata, sed et ad altiores potestates facile extendi posse. Ut igitur assertioni illi fidem faciam, demonstrationem, quoad potestatem sextam, nunc proponere volui. Quo autem haec demonstratio, quam ante me nemo adhuc tentavit (illa enim quam Fermatius invenisse dicitur, nullibi extat) facilius intelligatur, sequens Lemma, quo ea praecipue nititur, praemittere necesse est.

Lemma.

Impossibile est ejusmodi invenire valores rationales numerorum z et y, qui expressionem $z^4 + z^2 y^2 + y^4$ quadrato aequalem reddant.

Ve-

Demonstratio.

Veritatem hujus lemmatis de valoribus integris et inter se primis numerorum z et y demonstrare sufficiet, quum reliqui casus, si nempe hi numeri vel fracti accipiuntur, vel communem habent factorem, facillime ad hunc unicum reduci possint. Sit igitur, si fieri potest, $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = P^2$, denotantibus z et y numeros rationales, integros et inter se primos, sive quod eodem redit, supponamus $(z^2 - y^2)^2 + 3 z^2 y = P^2$, et videamus an haec aequatio subsistere possit, nec ne? Atqui, si posito A numero quocunque integro, expressio $T^2 + A$ quadrato aequalis evadere debet, id non fieri posse constat, nisi sumtis pro T ejusmodi numeris, qui sunt semisses differentiae factorum numeri A. Quotcunque igitur modis numerus datus A in duos factores resolvi potest, quorum differentia sit par, totidem numeri T valores assignari poterunt, conditioni $T^2 + A$ satisfacientes. Quodsi applicemus haec ad expressionem $(z^2 - y^2)^2 + 3 z^2 y^2 = P^2$, ubi $A = 3 z^2 y^2$ et $T = z^2 - y^2$; patet, sequentes tantum dari suppositiones ad hanc aequationem explicandam:

1) $3 z^2 y^2 = 1 \cdot 3 z^2 y^2$
2) $3 z^2 y^2 = 3 \cdot z^2 y^2$
3) $3 z^2 y^2 = 3 z \cdot z y^2$
4) $3 z^2 y^2 = 3 z^2 y^2$,
5) $3 z^2 y^2 = 3 y \cdot z^2 y$
6) $3 z^2 y^2 = 3 y^2 \cdot z^2$
7) $3 z^2 y^2 = 3 z^2 y \cdot y$
8) $3 z^2 y^2 = z \cdot 3 z y^2$.

ex quibus oriuntur aequationes:

$$z^2 - y^2 = \frac{3 z^2 y^2 - 1}{2}$$

$$z^2 - y^2 = \frac{z^2 y - 3}{2}$$

T 2 $z^2 - y^2$

$$z^2 - y^2 = \frac{zy^2 - 3z}{2}$$
$$z^2 - y^2 = \frac{3z^2 - y^2}{2}$$
$$z^2 - y^2 = \frac{z^2y - 3y}{2}$$
$$z^2 - y^2 = \frac{z^2 - 3y^2}{2}$$
$$z^2 - y^2 = \frac{3z^2y - y}{2}$$
$$\text{et } z^2 - y^2 = \frac{3zy^2 - z}{2}.$$

Omnes vero hasce suppositiones, positis z et y numeris rationalibus integris et inter se primis, partim impossibiles, partim absurdas esse, in oculos cadit, si sequentes ex iis derivatos intuemur valores:

Ex prima nimirum aequatione deducitur: $y^2 = \frac{2z^2+1}{3z^2+2}$; ex secunda $z^2 = \frac{3-2y^2}{y^2-2}$; ex tertia $y^2 = z(2 - \frac{1}{z+2})$; ex quarta $z^2 = \frac{3}{5}y^2$; ex quinta $z^2 = y(\frac{3-2y}{y-2})$; ex sexta $z^2 + y^2 = 0$; ex septima $z^2 = y - \frac{2y}{2-3y}$; et ex octava $y^2 = z(\frac{2z+1}{3z+2})$. Ex harum aequationum intuitu satis perspicue apparet, nullam earum subsistere posse, in hypothesi quod z et y sint numeri rationales, integri et inter se primi. Concludimus itaque et impossibile esse tales invenire valores rationales quantitatum z et y, qui expressionem $z^4 + z^2y^2 + y^4$ quadrato aequalem reddant.

Scholion.

Objici potest, nostram demonstrationem tacitae suppositioni quod z et y sint numeri primi, superstructam esse. Id concedo quidem, sed casus quo hi numeri ex factoribus compositi sunt, facillime ad praecedentem reducitur. Quodsi enim sta-

statuamus $z = mn$ et $y = pq$, erit $A = 3z^2y^2 = 3m^2n^2p^2q^2$, et factores $1.\ 3m^2n^2p^2q^2$, vel $3.\ m^2n^2p^2q^2$, vel $3m.\ mn^2p^2q^2$ etc. ut perspicuum est, omnes cum iis conveniunt, quos modo contemplati sumus.

Theorema.

Nec summa nec differentia duorum Cubo-Cuborum Cubo-Cubus esse potest.

Demonstratio.

Primum observo, sufficere unicum tantum casum pro summa vel differentia considerare; nam si impossibile est quod $x^6 + y^6$ sit $= z^6$, nullo quoque modo $x^6 = z^6 - y^6$ fieri poterit, et vice versa. Deinde numeros z, y et x tanquam integros et inter se primos spectare licet, ex ratione in dissertationibus supradictis allegata. Hisce praemissis offendemus, aequationem $z^6 - y^6 = x^6$ impossibilem esse. Est vero $z^6 - y^6 = (z^2 - y^2)(z^4 + z^2y^2 + y^4)$. Ergo x numerus primus esse nequit. Posito igitur $x = mn$, erit $z^6 - y^6$ vel $(z^2 - y^2)(z^4 + z^2y^2 + y^4) = m^6n^6$; haec autem aequatio sequentes tantum suppositiones admittit:

1) $z^4 + z^2y^2 + y^4 = m^6n^6$
$z^2 - y^2 = 1.$

2) $z^4 + z^2y^2 + y^4 = m^5n^6$
$z^2 - y^2 = m.$

3) $z^4 + z^2y^2 + y^4 = m^4n^6$
$z^2 - y^2 = m^2.$

4) $z^4 + z^2y^2 + y^4 = m^3n^6$
$z^2 - y^2 = m^3.$

5) $z^4 + z^2y^2 + y^4 = m^2n^6$
$z^2 - y^2 = m^4.$

6) $z^4 + z^2y^2 + y^4 = m\,n^6$
$z^2 - y^2 = m^5.$

7)

7) $z^4 + z^2 y^2 = y^4 = n^6$
$z^2 - y^2 = m^6.$

8) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^5 n^5$
$z^2 - y^2 = m n.$

9) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^4 n^4$
$z^2 - y^2 = m^2 n^2.$

10) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^3 n^3$
$z^2 - y^2 = m^3 n^3.$

11) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m n^5.$
$z^2 - y^2 = m^5 n.$

12) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m n^4$
$z^2 - y^2 = m^5 n^2.$

13) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m n^3$
$z^2 - y^2 = m^5 n^3.$

14) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m n^2$
$z^2 - y^2 = m^5 n^4.$

15) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m n$
$z^2 - y^2 = m^5 n^5.$

16) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^2 n^3$
$z^2 - y^2 = m^4 n^3.$

17) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^2 n^2$
$z^2 - y^2 = m^4 n^4.$

18) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^2 n$
$z^2 - y^2 = m^4 n^5.$

19) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^2 n^4$
$z^2 - y^2 = m^4 n^2$

20) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^2 n^5$
$z^2 - y^2 = m^4 n.$

21) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^3 n$
$z^2 - y^2 = m^3 n^5.$

22) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^3 n^2$
$z^2 - y^2 = m^3 n^4.$

23) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^3 n^4$
$z^2 - y^2 = m^3 n^2.$

24) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^3 n^5$
$z^2 - y^2 = m^3 n.$

25) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^3 n^6$
$z^2 - y^2 = m^3.$

26) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^4 n$
$z^2 - y^2 = m^2 n^5.$

27) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^4 n^2$
$z^2 - y^2 = m^2 n^4.$

28) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^4 n^3$
$z^2 - y^2 = m^2 n^3.$

29) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^4 n^5$
$z^2 - y^2 = m^2 n.$

30) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^4 n^6$
$z^2 - y^2 = m^2.$

31) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^5 n$
$z^2 - y^2 = m n^5.$

32) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^5 n^2$
$z^2 - y^2 = m n^4$

33)

33) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^5 n^3$
$z^2 - y^2 = m n^3.$

34) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^5 n^4$
$z^2 - y^2 = m n^4.$

35) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^6 n$
$z^2 - y^2 = n^5.$

36) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^6 n^2$
$z^2 - y^2 = n^4.$

37) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^6 n^3$
$z^2 - y^2 = n^3.$

38) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^6 n^4$
$z^2 - y^2 = n^2.$

39) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^6 n^5$
$z^2 - y^2 = n.$

40) $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = 1$
$z^2 - y^4 = m^6 n^6.$

Has vero aequationes omnes partim impossibiles, partim absurdas esse, sequenti modo facillime demonstrari potest.

Casus 1. Est impossibilis, quia (ex Lemmate praecedenti) non solum impossibile est tales invenire valores pro z et y, qui aequationem quadrato aequalem reddant, sed et quod non dantur numeri integri quorum quadrata unitate differunt.

Cas. 2. Est impossibilis, quia $z^2 - y^2$ non est factor expressionis $z^4 + z^2 y^2 + y^4$.

Cas. 3. Est imposs. ob rationes Nr. 1 et 2. allegatas.

Cas. 4. Est imposs. ob rationem Nr. 2.

Cas. 5. Imposs. ob rationem Nr. 1.

Cas. 6. Subsistere nequit ex sequenti ratione. Cum $z^2 - y^2 = m^5$, erit $z^2 - y^2 - m^5$; qui valor in aequatione $z^4 - z^2 y^2 + y^4 = mn^6$ substitutus, eam in $3y^4 + 3y^2 m^5 + m^{10} = m n^6$ transmu-

mutat; cumque omnes termini, excepto primo, per m sint divisibiles, hanc quantitatem necessario factorem producti $3y^4$ esse oportet, ergo vel $m = 3$, vel $y = \alpha m$ erit. Priori casu habebimus $z^2 - y^2 = m^5 = 243$, proinde $z^2 = y^2 + 243$. Omnes autem valores integri numeri y, quorum quadrata, adscito numero 243, quadratum faciunt, semisses sunt factorum producti 243. Atqui hoc productum est $= 1 . 243 = 3 . 81 = 9 . 27$. Ergo valores ipsius y erunt $\frac{243-1}{2}$ sive 121, $\frac{81-3}{2}$ sive 39, et $\frac{27-9}{2}$ vel 9. Hi vero valores simul formulam $z^4 + z^2 y^2 + y^4$ quadrato aequalem reddere et ad z primi esse debent. Primus eorum, scilicet numerus 121, pro y substitutus hancce aequationem in $121^2 (121^2 + 243) + 19683$ transmutat, qui numerus in 7 desinens quadratum non esse potest Secundus 39 et tertius 9 pariter non conveniunt, quia ejusmodi numeri z valores, nempe 42 et 18, iis respondent, qui non sunt primi ad y. Si denique $y = m\alpha$ ponere vellemus, ex aequatione $z^2 = y^2 + m^5$ sequeretur, quod z et m, proinde z et y, communem haberent factorem, quod est contra hypothesin. Concludimus itaque suppositionem $z^2 - y^2 = m^5$ et $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m n^6$ fieri non posse.

Cas. 7. Imposs. est ob Lemma praecedens.

Cas. 8. Imp. cum $z^4 + z^2 y^2 + y^4$ differentiae $z^2 - y^2$ non sit quinta potestas.

Cas. 9. Imp. ex lemmate praecedenti.

Cas. 10. Absurdus est.

Cas. 11.

Cas. 11. Impossibilis ob sequentem rationem. Substituto valore $z^2 = y^2 + m^5 n$ in aequatione $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m n^5$, ea formam $3 y^4 + 3 m^5 n y^2 + m^{10} n^2 = m n^5$ induet; ubi necessario m vel n factor numeri y, ideoque, ob $z^2 = y^2 + m^5 n$, etiam numeri z foret, quod est contra hypothesin qua z et y numeri inter se primi.

Cas. 12. Imposs. Nam ex aequationibus $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m n^4$ et $z^2 - y^2 = m^5 n^2$ oritur aequatio $3 y^4 + 3 m^5 n^2 y^2 + m^{10} n^4 = m n^4$, quae est absurda.

Cas. 13. Imposs. cum $z^4 + z^2 y^2 + y^4$ non sit factor differentiae $z^2 - y^2$.

Cas. 14. 15. 16. Imposs. ob eandem rationem.

Cas. 17. Imp. ex lemmate praecedenti.

Cas. 18. Impossibilis, quia $z^2 - y^2$ non est factor expressionis $z^4 + z^2 y^2 + y^4$.

Cas. 19. Imposs. quia ad Lemma praecedens reducitur.

Cas. 20. Imposs. et ad Cas. 11. redit, facta substitutione valoris $y^2 = z^2 + m^4 n$ in aequatione $z^4 + z^2 y^2 + y^4 = m^2 n^5$.

Cas. 21. Imp. ex ratione Nr. 18. allegata.

Cas. 22. Imposs. et absurdus, cum $z^4 + z^2 y^2 + y^4$ non sit factor differentiae $z^2 - y^2$.

Cas. 23. Imp. ob rationem Nr. 18. allegatam.

Cas. 24 et 25. Impossibiles ob eandem causam.

Cas. 26. Absurdus, quia pervenitur ad aequationem $3y^4 + 3m^2n^5y^2 + m^4n^{10} = m^4n$.

Cas. 27. Imp. ex lemmate praecedenti.

Cas. 28 et 29. Imp. ob rationem Cas. 18. allegatam.

Cas. 30. Imp. et reducitur ad Lemma praecedens.

Cas. 31. Absurdus, quia ad aequationem $3y^4 + 3m^5ny^2 + m^2n^{10} = m^5n$ pervenitur.

Cas. 32. Impossibilis quia hic casus ad Casum 11. redit, permutatis inter se m et n.

Cas. 33. Imp. et hic casus permutatis inter se m et n ad Cas. 18. reducitur.

Cas. 34. Imposs. et permutatis inter se m et n ad Cas. 29. redit.

Cas. 35. Imp. et eodem modo cum Casu 6. convenit.

Cas. 36. Imposs. ob Lemma praemissum.

Cas. 37. Imp. ob rationem Nr. 18.

Cas. 38. Imposs. ob Lemma praemissum.

Cas. 39. Imposs. ob rationem Nr. 18. allegatam.

Cas. 40. Per se impossibilis est.

Cum vero Casus hic exhibiti omnes involvant suppositiones possibiles, demonstratum itaque est, non dari ejusmodi valores numerorum y et z (excepto $y = 0$), ut $z^6 - y^6$ sit $= x^6$. Ergo et impossibile est, tales inveniri numeros ut $z^6 + y^6$ sit $= x^6$, et theorema universaliter demonstratum est.

NOVAE DISQUISITIONES
SUPER NUMERIS FORMAE $mx^2 + ny^2$.

AUCTORE

C. T. KAUSLER.

Conventui exhibitae die 18. Nov. 1801.

§. 1.

Cum nuper egregiam Ill. L. Euleri dissertationem „de „formulis speciei $mx^2 + ny^2$, ad numeros primos explorandos „idoneis, earumque mirabilibus proprietatibus (a)" perlegerim, variae ad hanc rem pertinentes se mihi obtulerunt observationes, quibus et insignem numerorum proprietatem, nondum satis stabilitam, demonstrare, varia problemata resolvere, et nonnullas adplicationes memorabiles ostendere contigit. Inter has primum tenet locum tentamen solutionis inclyti ac difficillimi problematis Fermatiani: „Invenire numerum primum dato numero ma„jorem." Haec solutio tanquam per se ex mirabilibus numerorum formae $mx^2 + ny^2$ proprietatibus fluens, eo magis Geometrarum attentione digna esse videtur, quod per calculum facillimum expedite absolvi potest. Cum autem paucula, quae numerorum theoriae addere hic suscipio, arcto nexu cum disserta-

(a) Nova Acta. Tom XII pag. 22 — 46.

tatione Euleriana juncta sint, tentamen hoc nonnisi tanquam additamentum vel appendicem illius lectoribus propono, ad quam quoque, ad vitandas explicationes et repetitiones omnia, in sequentibus ſe referunt.

Theorema.

§. 2. Si m et n sunt numeri positivi, integri et inter se primi, numerus quilibet primus N nonnisi unico modo in ſorma $mx^2 + ny^2$ contineri potest.

Demonstratio.

Probandum nobis est, sub hypothesi modo allegata, binas aequationes:

$$N = mx^2 + ny^2$$
$$N = mp^2 + nq^2$$

simul subsistere non posse, positis nempe p et q numeris ab x et y diversis; et quidem in sequentibus semper supponemus p esse majorem numerorum x et p, ideoque q minorem quam y.

Quo nunc impossibilitas clarissime perspiciatur, consideremus, ex prima aequatione sequi:

$$m = \frac{N - ny^2}{x^2},$$

et ex secunda: $m = \frac{N - nq^2}{y^2}$,

unde obtinemus $\frac{N - ny^2}{x^2} = \frac{N - nq^2}{y^2}$, et proinde

$$n = \frac{N(p^2 - x^2)}{p^2y^2 - q^2x^2},$$

ergo $$m = \frac{N(y^2 - q^2)}{p^2y^2 - q^2x^2}.$$

Cum

Cum vero numeri positivi m et n sint integri et inter se primi, expressiones $\frac{N(p^2-x^2)}{p^2y^2-q^2x^2}$ et $\frac{N(y^2-q^2)}{p^2y^2-q^2x^2}$ neque factorem communem, neque denominatorem habere posse patet. Sunt autem quantitates p^2-x^2 et y^2-q^2 vel numeri inter se primi, vel secus. Si sunt inter se primi, necessario $N = p^2y^2-q^2x^2 = (py+qx)(py-qx)$ esse debet, qui numerus semper est compositus, excepto casu $py-qx=1$, qui vero hic locum habere non potest. Quodsi enim in aequationibus $N = mx^2+ny^2$ et $N = mp^2+nq^2$, $x<p$ statuatur, $y>q$ esse necesse est. Positis itaque $x = p-p'$ et $y = q+q'$, factor $py-qx$ evadit $pq'+p'q$, qui nullo modo unitati aequalis est.

Si quantitates p^2-x^2, y^2-q^2, non sunt numeri inter se primi, sed factorem habent communem α, ita ut sit $p^2-x^2 = \alpha\beta$, et $y^2-q^2 = \alpha\gamma$, perspicuum est numeros m et n, ut hypothesis postulat, inter se primos non esse posse, nisi fiat $N\alpha = p^2y^2-q^2x^2$, vel $N = \frac{(py+qx)(py-qx)}{\alpha}$, et ad hanc aequationem explicandam tres perpendendi sunt casus:

I) α divisor numeri $py+qx$; esse potest; vel

II) α divisor numeri $py-qx$; vel denique

III) alter factor hujus denominatoris dividit numerum $py+qx$, alter vero $py-qx$.

Si α est divisor quantitatis $py+qx$, ponamus $\frac{py+qx}{\alpha} = \delta$, et numerus N evadit $= (py-qx)\delta = (pq'+p'q)\delta$; hoc autem productum erit numerus compositus, si demonstrari potest, quotientem δ unitati nunquam esse aequalem.

Si

Si α est divisor factoris $py - qx$, sit $\frac{py - qx}{\alpha} = \delta'$, et N erit $= (py + qx)\,\delta'$. Hic casus priori analogus est, et incumbit nobis demonstrare, quotientem δ' unitati non esse posse aequalem.

Si denique $\alpha = \alpha'\alpha''$, $py + qx = \alpha'$T, et $py - qx = \alpha''$V, N erit $=$ TV: hoc autem productum est numerus compositus, si nec T, nec V unitati aequales sint.

Consideremus tres istos casus seorsim.

I. Si in $\frac{py + qx}{\alpha} = \delta$, hic quotiens unitati aequalis esse posset, haberemus $py + qx = \alpha$. Cum vero ob $\alpha\beta = p^2 - x^2$, et $\alpha\gamma = y^2 - q^2$, α sit communis factor numerorum $p^2 - x^2$ et $y^2 - q^2$, patet, quotientes $\frac{p^2 - x^2}{py + qx}$ et $\frac{y^2 - q^2}{py + qx}$ numeris integris aequales esse debere. Est vero $p^2 - x^2 = (p + x)(p - x)$, et $p + x > py + qx$. Si igitur productum $(p + x)(p - x)$ per numerum $py + qx$ divisibile est, id fieri nequit nisi per suppositionem sequentem analogam Nr. III., scilicet sumendo:

$$py + qx = uv;\; p + x = ut;\; p - x = vw,$$

et ob eandem rationem, quia $\frac{y^2 - q^2}{py + qx}$ numerum integrum esse oportet, erit:

$$py + qx = uv;\; y + q = ut';\; \text{et } y - q = vw'.$$

Ex his autem aequationibus deducuntur valores:

$$p = \frac{ut + vw}{2};\quad y = \frac{ut' + vw'}{2};$$
$$x = \frac{ut - vw}{2};\quad q = \frac{ut' - vw'}{2};$$

ex

ex quibus sequitur:

$$py + qx = \frac{u^2 tt' + v^2 ww'}{2}, \text{ vel ob } py + qx = uv;$$
$$2uv = u^2 tt' + v^2 ww',$$

quae aequatio, cum per naturam suppositionis hujus casus u et v, nec non t et t', vel w et w' unitate majores esse debeant, absurda est. Desuper $py - qx = \frac{uv}{2}(tw' + tw)$ invenitur; sed $uv = qy + qx$; ergo $2(py - qx) = (py + qx)(tw' + t'w)$, et $py + qx$ factor esset numeri $py - qx$, quod est impossibile.

II. Ponamus nunc $\alpha = py - qx$, et quotientes $\frac{p^2 - x^2}{py - qx}$ et $\frac{y^2 - q^2}{py - qx}$ numeri integri esse debebunt. Hic casus tres suppositiones admittit:

1) $py - qx$ potest esse divisor factoris $p + x$; vel
2) divisor factoris $p - x$; vel
3) alter factorum numeri $py - qx$ est divisor quantitatis $p + x$, alter vero quantitatis $p - x$.

α) Si $py - qx$ est factor numeri $p + x$, et ob eandem rationem numeri $y + q$, ponamus $p + x = \Phi(py - qx)$, et $y + q = \Phi'(py - qx)$, et erit:

$$\frac{p + x}{py - qx} = \Phi, \text{ nec non } \frac{y + q}{py - qx} = \Phi', \text{ vel ob}$$
$$py - qx = pq' + p'q \text{ et } x = p - p',$$
$$\Phi = \frac{p - p'}{pq' + p'q} + \frac{p}{pq' + p'q} = \frac{1 - \frac{p'}{p}}{q' + \frac{qp'}{p}} + \frac{1}{q' + \frac{qp'}{p}}$$

sed $1 - \frac{p'}{p} < 1$, et $q' + \frac{qp'}{p} > 1$, ergo $\Phi < 2$.

Eo-

Eodem modo et $\Phi' < 2$ reperitur. Quodsi ergo quotientes Φ et Φ', ut hypothesis postulat, sint numeri integri, ii non nisi unitati aequales esse poterunt. Sed positis $\Phi = \Phi' = 1$, habebimus $p + x = py - qx$, et $y + q = py - qx$. Ex prima aequatione sequitur $x = \frac{p(y-1)}{q+1}$, et $x + 1 = \frac{py - p + q + 1}{q+1}$; at ex secunda: $x + 1 = \frac{y(p-1)}{q}$, ergo $\frac{py - p + q + 1}{q+1} = \frac{y(p-1)}{q}$, ergo $q = -y$ esset, quod est suppositionibus nostris contrarium.

β) Si $py - qx$ est divisor numerorum $p - x$ et $y - q$, habebimus $\frac{p-x}{py-qx}$ = numero integro Φ, et $\frac{y-q}{py-qx}$ = numero integro Φ'. At $py - qx = pq' + p'q$, $p - x = p'$, et $y - q = q'$, ergo $\Phi = \frac{p}{pq' + p'q}$ et $\Phi' = \frac{q}{pq' + p'q}$. Hic itaque quotientes, contra hypothesin, fractiones essent; unde concludimus, impossibile esse quod $py - qx$ sit factor numerorum $p - x$ et $y - q$, vel producti $p^2 - x^2$, et $y^2 - q^2$.

γ) Quodsi autem tertiam admittamus suppositionem, scilicet alterum factorem numeri $py - qx$ esse divisorem quantitatis $p + x$, alterum vere quantitatis $p - x$, statuatur:

$$py - qx = uv,\ p + x = ut,\ p - x = vw, \text{ et}$$
$$py - qx = uv,\ y + q = ut',\ y - q = vw';$$

ergo $py - qx$, vel uv, erit $= uv\left(\frac{tw' + t'w}{2}\right)$, unde sequitur $2 = tw' + t'w$. Haec autem aequatio impossibilis est, excepto casu $t = t' = w = w' = 1$, qui admitti non potest. Quia enim $py - qx = uv$, $p + x = ut$, $p - x = vw$, $y + q = ut'$; $y - q = vw'$ supponuntur, haberemus:

$$p = \frac{u+v}{2} \text{ et } y = \frac{u+v}{2},$$
$$x = \frac{u-v}{2},\ q = \frac{u-v}{2}$$

ergo $p = y$ et $q = x$. Hi autem valores in aequationibus

$$N = mx^2 + ny^2$$
$$N = mp^2 + nq^2$$

substituti, eas in $mx^2 + ny^2 = nx^2 + my^2$, vel in

$$(m - n)\, x^2 = (m - n)\, y^2$$

transmutarent, ex quibus $x = y$ sequeretur. Quod est impossibile, y et x cum significent numeros a se invicem diversos et inter se primos.

III. Superest tertius et ultimus casus, scilicet quod in

$$N = \frac{(py + qx)(py - qx)}{\alpha}$$

alter factorum denominatoris α sit divisor factoris $py + qx$, alter vero factoris $py - qx$. Posito itaque $\alpha = \alpha' \alpha''$, $py + qx = \alpha' T$, et $py - qx = \alpha'' V$, haberemus $N = TV$, et demonstrandum est, nec T, nec V, unitati aequales esse posse.

Quodsi enim $T = 1$ acciperetur, factor $py + qx = \alpha'$ esset: sed

$$p^2 - x^2 = \alpha\beta = \alpha'\alpha''\beta, \text{ et}$$
$$y^2 - q^2 = \alpha\gamma = \alpha'\alpha''\gamma;$$

ergo $\frac{p^2 - x^2}{py + qx}$ = numero integro, et $\frac{y^2 - q^2}{py + qx}$ = numero integro, qui casus ad Nr. I. redit.

Simili modo suppositio $V = 1$, cum casu Nr. II. coincidit.

§. 3. Patet igitur aequationes $N = mx^2 + ny^2$ et $N = mp^2 + nq^2$ subsistere non posse, sub hypothesi quod m et n sint numeri positivi, integri et inter se primi, nisi N sit numerus ex factoribus compositus. Numeri itaque primi non nisi

nisi unico modo in forma $mx^2 + ny^2$ contineri possunt, quae pulcherrima numerorum proprietas a Celeb. L. Eulero primum detecta, sed quantum equidem scio, nullibi demonstrata fuit (vide dissertatio citat. § 1 — 6).

Caeterum propositio haec inverti non potest: dantur enim multi numeri compositi, qui unico tantum modo in hac forma contenti sunt. Quo autem numeri primi ab his discerni possint, magnus hic Geometra desuper hanc admirabilem numerorum proprietatem demonstravit: dari scilicet ejusmodi numerorum m et n valores, pro quibus omnes numeri, semel tantum in forma $mx^2 + ny^2$ contenti, semper primi sint, horum numerorum, quos *idoneos* vel *congruos* vocat, tabulam dissertationi suae subjunxit.

§ 3. Desideratur nunc methodus facilis, datum numerum N toties sub forma $mx^2 + ny^2$ repraesentandi, quoties id fieri potest, ad quod efficiendum duplex patet via. Vel enim

1°) Formula $mx^2 + ny^2 = N$, ad genus indeterminatarum pertinens, per prima Analyseos indeterminatae principia resolvi potest: positis nempe $x^2 = X$ et $y^2 = Y$, ea induit formam $mX + nY = N$, quae per methodos cognitas (vide Elem. Algebrae L. Euleri Add. Lagrange Paragr. III.) pro omnibus numerorum m, n, N valoribus satis expedite absolvitur, hoc modo omnes interminatarum X et Y valores inveniuntur, qui et quadrata x^2 et y^2 includunt. Vel

2°) Formula, de qua agitur, eodem ratiocinio, quo olim in decompositione numerorum in quadrata usus sum, ope numerorum pronicorum, facillime resolvitur. Secundam methodum, quae primae mihi praestare videtur, sequentibus illustrabo problematibus et exemplis.

§ 5. Problema.

Resolvere aequationem indeterminatam $m'x^2 + n'y^2 = N$, in qua N numerum formae $4A + 1$, m' formae $4m + 1$, et n' formae $2(2n + 1)$ significare supponuntur.

Solutio.

Per suppositiones praecedentes aequatio solvenda evadit:

$$(4m + 1)x^2 + 2(2n + 1)y^2 = 4A + 1$$

quae subsistere nequit, nisi x sit numerus impar. Fiat $x = 2X + 1$, et habebimus:

$$(4m + 1)\,2X(X + 1) + 2m + (2n + 1)y^2 = 2A,$$

ergo pro y numerus par $2Y$ sumi debet: quare erit:

$$(4m + 1)X(X + 1) + 2(2n + 1)Y^2 = A - m,$$

et patet, numeros A et m simul vel pares vel impares esse oportere. Statuatur $A - m = 2B$, unde sequitur

$$\frac{X(X + 1)}{2} = \frac{B - (2n + 1)Y^2}{4m + 1}$$

Hic denuo distinguendi sunt casus $B < 4m + 1$, et $B > 4m + 1$, quorum autem prior ad posteriorem facillime reducitur. Ponamus igitur numerum B majorem esse quantitate $4m + 1$,

$4m+1$, et $2n+1$ minorem hoc numero, tunc aequatio nostra, si fiat $B = (4m+1) D + E$, transmutabitur in hanc:

$$\frac{X(X+1)}{2} = D - \left(\frac{(2n+1)Y^2 - E}{4m+1}\right),$$

quae sequenti modo expedite resolvitur. Ponatur $\frac{(2n+1)Y^2 - E}{4m+1}$ = numero integro et positivo z, et tunc erit:

$$(2n+1) Y^2 - (4m+1) z = E.$$

Aequatio autem indeterminata $ax - by = E$ resolvitur per valores $x = pE \pm \mu b$ et $y = qE \pm \mu a$, in qua μ numerum indeterminatum significat, $\frac{p}{q}$ vero fractionem, valori $\frac{b}{a}$, in fractionem continuam resoluto, continenter proximam. Quodsi jam hanc aequationem cum praecedenti comparemus, habebimus $a = 2n+1$, $b = 4m+1$, $x = Y^2$, et $z = y$, et nunc videndum est, an valor $pE \pm (4m+1) \mu = \square = Y^2$ fieri possit, nec ne? Haec vero quaestio, cum $z < D$ esse debeat, semper ad casum $\frac{Y'^2 \pm g}{b}$ = numero integro redit, cujus solutionem Cel. Legendre in tractatu suo: „Essai d'une théorie des nombres" in parte secunda, § VII Nr. 182 etc. etc. primus dedit. Si pro Y nullus invenitur valor aequationi

$$(2n+1) Y^2 - (4m+1) Z = E$$

satisfaciens, quaestio proposita impossibilis est: sin autem unus vel plures hujus numeri valores extant, videndum est desuper, an differentiae correspondentes $D - z$, $D - z'$ etc. sint numeri formae $\frac{X(X+1)}{2}$, id quod commodissime ope tabulae nostrae numerorum pronicorum Tomo XIV. Actorum pag. 253 insertae, examinari poterit, et quaestio tot admittit solutiones, quot hujusmodi differentiae inveniuntur.

Illustre-

Illustremus hanc solutionem sequenti exemplo:

Exemplum.

§ 5. Explorare, an numerus $N = 430317$ semel vel pluries in forma $53\,x^2 + 166\,y^2$ contineatur?

Comparatione facta cum formula nostra generali, sequentes obtinebimus valores: $m' = 53$, $n = 166$, $m = 13$, $n = 41$, $A = 175579$, ergo $B = \frac{A - m}{2} = 53783$, et

$$\frac{X(X+1)}{2} = 1014 - Y^2 - \left(\frac{30\,Y^2 - 41}{53}\right),$$

ergo $\frac{30\,Y^2 - 41}{53}$ non solum integrum z, sed et $1014 - Y^2 - z$ numerum triangularem formae $\frac{X(X+1)}{2}$ esse oportebit. Posito autem $\frac{30\,Y^2 - 41}{53} = z$, obtinebimus hanc aequationem: $30\,Y^2 - 53\,z = 41$. Sed ex primis Analyseos indeterminatae principiis novimus, omnes valores hanc aequationem solventes, in formulis:

$$Y^2 = 943 \pm 53\mu \text{ et}$$
$$Z = 533 \pm 30\mu$$

contineri. Cum vero $Y^2 + z < 1014$ esse debeat, signum superius hic excludendum erit. Reliquum est, ut omnes numeri μ valores assignemus, qui aequationi:

$$943 - 59\mu = \square = Y^2$$

satisfaciunt. Haec vero aequatio reducitur ad:

$$17 - \left(\frac{Y^2 - 4}{53}\right) = \mu,$$

ergo $\frac{Y^2 - 42}{53}$ numerus integer esse debebit. Quod si nunc ad hanc conditionem solvendam Cel. Legendre methodum adhibeamus, solus valor $Y = 25$ infra 53 invenietur, ex quo deinceps omnes

omnes alii, sumendo $Y = 25 + 53\,Y'$, deducuntur. Posito nempe $Y' = -1$, prodit secundus valor $Y = -28$, cui respondent $\mu = 3$, et $z = 443$. Ergo $Y^2 + z = 1227$. Cum vero hic numerus major sit limite 1014, solus valor pro Y, aequationem propositam solvens, est prior, scilicet 25, cui respondent: $\frac{Y^2 - 42}{53} = 11$, $\mu = 17 - 11 = 6$, $z = 533 - 30 \cdot 6 = 353$. Ergo $1014 - Y^2 - z = 36$; et cum haec differentia sit numerus formae $\frac{X(X+1)}{2}$, habebimus:

$$X = 8,\; x = 2X + 1 = 17,\; y = 2Y = 50 \text{ et}$$
$$N = 430317 = 53 \cdot 17^2 + 166 \cdot 50^2,$$

et patet, hunc numerum non nisi unico modo in forma $53\,x^2 + 166\,y^2$ contentum esse posse.

§ 7. Dantur casus in quibus solutio multo simplicior evadit, ii scilicet, ubi valor $\frac{(2n+1)Y^2 - E}{4m+1}$ induit formam $\frac{Y'^2 - E'}{4m+1}$, vel $\frac{Y'^2 - E'^2}{4m+1}$, ut in sequenti exemplo.

Exemplum.

Explorare, an numerus 25249 semel vel pluries in forma $17\,x^2 + 8\,y^2$ contineatur?

Cum sit $17\,x^2 + 8\,y^2 = 25249$, numerus x impar esse debebit. Ponatur $x = 2X + 1$, et aequatio evadit:

$$17\;\; 4X(X+1) + 8\,y^2 = 25232,$$
$$\text{vel } 17\,\frac{X(X+1)}{2} + y^2 = 3154$$

quae

quae reducitur ad

$$\frac{X(X+1)}{2} = 185 - \left(\frac{y^2-9}{17}\right)$$

ergo $\frac{y^2-9}{17}$ numerum integrum esse oportet. Est vero

$$\frac{y^2-9}{17} = \frac{(y+3)(y-3)}{17}$$

et hic numerus evadit integer, vel 1) sumendo $\frac{y+3}{17} = R$, unde

$$y = 17R - 3, \text{ et } \frac{y^2-9}{17} = R(17R-6),$$

vel etiam 2°) sumendo $\frac{Y-3}{17} = R$, unde $y = 17R + 3$ et

$$\frac{y^2-9}{17} = R(17R+6).$$

Ponantur nunc loco R omnes numeri naturales, donec $R(17R \mp 6)$ vel $=$ vel $>$ 185 evadat, et sequentes orientur differentiae:

$$185 - 11 = 174$$
$$185 - 23 = 162$$
$$185 - 56 = 129$$
$$185 - 80 = 105$$
$$185 - 135 = 50$$
$$185 - 171 = 14$$

inter quas unicus tantum occurrit numerus formae $\frac{X(X+1)}{2}$, nempe 105, cui respondent valores $X = 14$, $R = 2$, $R(17R+6) = 80$, $y = 37$, $x = 2X + 1 = 29$, et $N = 25249 = 17 \cdot 29^2 + 8 \cdot 37^2$; unde concludimus, numerum datum non nisi unico modo in forma $17x^2 + 8y^2$ contineri

§ 8.

§ 8 Problema.

Aequationem $m'x^2 + n'y^2 = N$ solvere sub hypothesi quod N sit $= 4A + 1$; $m' = 4m - 1$; $n' = 4n + 1$.

Solutio.

Cum $(4m - 1)x^2 + (4n + 1)y^2 = 4A + 1$, patet alterum numerorum x et y parem, alterum vero imparem esse oportere. Quodsi nunc $x = 2X + 1$, et $y = 2Y$ statueremus, aequatio nostra evaderet:

$$(4m - 1)\,2X(X + 1) + 2m + (4m + 1)\,2Y^2 = 2A + 1,$$

quae est impossibilis. Fiat igitur $x = 2X$, et $y = 2Y + 1$, et habebimus:

$$(4m - 1)X^2 + (4n + 1)Y(Y + 1) = A - n;$$

et hic duo distinguendi sunt casus, prout $A - n$ fuerit par, vel impar.

1°) Si $A - n = 2B$, sumendum est $X = 2X'$, et aequatio nostra evadit:

$$(4m - 1)\;2X'^2 + (4n + 1)\frac{Y(Y + 1)}{2} = B,$$

quae posito $B = (4m - 1)C + D$, abit in:

$$\frac{Y(Y + 1)}{} = C - \left(\frac{(4m - 1)\,2X'^2 - D}{4n + 1}\right)$$

haec vero, praecedenti similis, per eadem principia resolvitur.

2°) Si $A - n = 2B + 1$, sumendum est $X = 2X' + 1$, et aequatio transformabitur in

$$(4m-1)\,2X'(X'+1)+(4n+1)\frac{Y(Y+1)}{2}=B+1-2m=C,$$

ergo, si $C = 2(4m-1)D + E$ assumitur,

$$X'(X+1) = D - \left(\frac{(4n+1)\frac{Y(Y+1)}{2} - E}{2(4m-1)}\right).$$

Solutio autem conditionis $\frac{(4n+1)\frac{Y(Y+1)}{2} - E}{2(4m-1)} =$ numero integro z, nullam habet difficultatem; posito enim $\frac{Y(Y+1)}{2} = Y'$, solvenda est aequatio indeterminata:

$$(4n+1)Y' - 2(4m-1)z = E,$$

ubi notandum est, inter omnes numeri Y' valores, eos duntaxat sumendos esse, qui sint triangulares, vel formae $\frac{Y(Y+1)}{2}$, et reliqua sunt ut in praecedentibus.

§ 9. *Exemplum.*

Data sit aequatio $79x^2 + 149y^2 = 151089$, in qua $m' = 79$, $n' = 149$, $N = 151089$, ergo $m = 20$, $n = 37$, $A = 37772$, $B = 18867$, $C = 18828$, $D = 119$, et

$$X(X'+1) = 119 - \frac{Y(Y+1)}{4} - \left(\frac{70\frac{Y(Y+1)}{4} - 13}{79}\right).$$

Ponamus $\frac{Y(Y+1)}{4} = Y'$, et $\frac{70Y' - 13}{79} = z$, ergo erit $70Y' - 79z = 13$, ubi $Y' + z < 119$ esse debebit. Haec autem aequatio indeterminata resolvitur per valores $Y' = 35 \cdot 13 \pm 79\mu$, et $z = 31 \cdot 13 \pm 70\mu$, ubi ob conditionem $Y + z < 119$, signum superius rejiciendum est, quare habebimus:

$Y' =$

$$Y' = 455 = 79\,\mu$$
$$Z = 403 - 70\,\mu$$

et solus numeri μ valor, intra limites $Y' + z < 119$ experiendus, est 5, ex quo sequitur $Y' = 60 = \frac{15 \cdot 16}{4}$, $Y = 15$, $z = 53$, $X'(X' + 1) = 6$, $X' = 2$, $X = 5$, $x = 2X = 10$, $y = 2Y + 1 = 31$, et $N = 70 \cdot 10^2 + 149 \cdot 31^2$, et quaestio proposita unicam tantum habet solutionem.

§ 10 Eodem prorsus modo et reliqui casus tractari possunt, quos lectori relinquo. Quae hactenus dixi, fertilitatem ac elegantiam praecedentis methodi in solvenda aequatione $mx^2 + ny^2 = N$ satis superque probant. Hoc unum adhuc observo, eandem methodum absurditatem quarundam quaestionum hujus generis saepe brevissima ostendere via. Propositum sit, ex. gr. explorare, an numerus 1000001 ad formam $2X^2 + 3y^2$ reduci possit nec ne? Ponatur itaque $2x^2 + 3y^2 = 1000001$, ergo $y = 2Y + 1$ sumi debet. Hoc vero valore substituto aequatio transmutatur in:

$$x^2 + 2 \cdot 3Y(Y + 1) = 499999,$$

ergo x numero impari $2X + 1$ aequandus est, et aequatio nostra evadet

$$2X(X + 1) + 3Y(Y + 1) = 249999;$$

hanc vero impossibilem esse per se patet, numeri $2X(X + 1)$ et $3Y(Y + 1)$ cum sint pares, ergo et eorum summa.

§ 11. Transeamus nunc ad problema Fermatianum. „Invenire numerum primum dato numero majorem" cujus solu-

 tio

io, saltem pro numeris qui limitem 100 millionum non excedunt, per calculum simplicem et parum laboriosum ex praecedentibus obtinetur. Duae hunc ad finem formulae $38x^2 + 5y^2$ et $1848x^2 + y^2$ nobis aptissimae videntur, quarum, ut Eulerus in dissertatione citata ostendit, ejusmodi est natura, ut numeri, semel tantum in una vel altera contenti, semper sint primi. Desuper Cel. Legendre in praeclaro suo tractatu (Essai d'une theorie des nombres p. 308) hanc eandem formulam $38x^2 + 5y^2$ considerans, probavit, si pro numeris x et y sumantur pro lubitu valores (dummodo valor x sit primus ad y et ad 5, et valor y primus ad x et 38) numerum resultantem $38x^2 + 5y^2$ ita esse comparatum, ut probabilitas, eum esse primum, ad probabilitatem, eum esse compositum, sit in ratione 8 : 1. Quodsi nunc quaeratur numerus primus, numero dato N major, tribuantur in formula $38x^2 + 5y^2$ (vel in formula $1848x^2 + y^2$) indeterminatis x et y ejusmodi valores inter se primi (quorum prior in formula $38x^2 + 5y^2$ sit primus ad 5, et posterior y in eadem formula primus ad 38, et in $1848x^2 + y^2$ primus ad 1848), ut numerus inde resultans $38x^2 + 5y^2$, vel $1848x^2 + y^2$ datum superet limitem N, id quod infinitis fieri potest modis. Et nunc ope methodi praecedentis examinandum est, an hic numerus semel vel pluries in eadem forma contineatur. Si non nisi unico modo in hanc formam resolvi potest, tuto concludere licet, eum numerum esse primum. Sin autem pluries ad formam $38x^2 + 5y^2$ vel $1848x^2 + y^2$ reduci potest, sumantur pro x vel y numeri unitate majores, ac subjiciatur numerus resultans novo examini.

Quo autem facilius dijudicari possit quaenam ambarum formularum $38x^2 + 5y^2$, vel $1848x^2 + y^2$, ad solvendum pro-

problema magis sit idonea, eadem exempla ambobus modis resolvamus.

§ 12. I. Exemplum. Invenire numerum primum 10000 majorem?

Prima solutio ope formulae $38\,x^2 + 5\,y^2$.

Cum $30\,x^2 + 5\,y^2 > 10000$ esse debeat, patet, $x > \sqrt{\left(\frac{10000 - 5y^2}{38}\right)}$ esse sumendum. Posito igitur exempli gr. $y = 3$, erit $x > 16$. Fiat $x = 17$, unde $38\,x^2 + 5\,y^2 = 11027$, et hic numerus erit primus, si non nisi unico modo in forma $38\,x^2 + 5\,y^2$ contentus est. Ad hoc examinandum, ponamus $y = 2\,Y + 1$, et aequatio nostra reducitur ad formam:

$$19\,x^2 + 2\,.\,5\,Y\,(Y + 1) = 5511,$$

ergo x impar esse debebit. Ponatur $x = 2\,X + 1$, ergo habebimus

$$\frac{X\,(X+1)}{2} = 36 - 5\left(\frac{\frac{Y\,(Y+1)}{2} - 1}{19}\right).$$

Sit porro $\frac{Y\,(Y+1)}{2} = Y'$, et $\frac{Y' - 1}{19} = Z$, vel $Y' = 19\,Z + 1$, et $\frac{X\,(X+1)}{2} = 36 - 5\,Z$ esse debet.

Quaeritur itaque, an inter omnes valores possibiles numeri Z, qui intra limites 0 et 8 continentur, hujusmodi dentur numeri, ut non solum $Y' = 19\,Z + 1$, sed et $36 - 5\,Z$ sit numerus triangularis. Est vero

pro

pro Z	Y′	36 — 5 Z
0	1 *	36 *
1	20	31
2	39	26
3	58	21
4	77	16
5	96	11
6	115	6
7	134	1

Cum autem in secunda et tertia columna nonnisi valores $Y' = 1$, $36 - 5Z = 36$ occurrant, qui sint numeri triangulares, numerus 11027 unico tantum modo in forma $38x^2 + 5y^2$ continetur, scilicet supponendo $Y' = 1$, $Y = 1$, $y = 3$, $X = 8$, et $x = 17$. Certi igitur sumus, hunc numerum necessario esse primum.

Ceterum haec tabula sequenti modo contrahi potest. Cum valores $Y' = 19Z + 1$, et $36 - 5Z$ numeri triangulares vel formae $\frac{m(m+1)}{2}$ esse debeant, omnes vero ejusmodi numeri in 0, 1, 3, 5, 6, 8 desinant, rejici possunt valores $Z = 2, 3, 4, 7$, quo pacto numerus tentaminum ad dimidiam partem reducitur, quod in explorandis numeris praegrandibus maximi est adjumenti.

Secunda solutio ope formulae $1848x^2 + y^2$.

Cum $1848x^2 + y^2 > 10000$, $x > \sqrt{\left(\frac{10000 - y^2}{1848}\right)}$ esse debet; posito itaque $y = 1$, x erit > 2. Sit $x = 3$, et formula

1848

$1848\,x^2 + y^2$ evadit 16633, qui numerus primus est, si nonnisi unico modo in forma $1848\,x^2 + y^2$ continetur. Ad hoc explorandum statuamus:

$$1848\,x^2 + y^2 = 16633,$$

et perspicuum est, y numerum imparem esse oportere. Posito igitur $y = 2\,Y + 1$, erit $1848\,x^2 + 4\,Y\,(Y + 1) = 16632$, vel

$$x^2 = 9 - \frac{Y\,(Y + 1)}{231}.$$

Ejusmodi itaque pro Y invenìendi sunt numeri, ut $9 - \frac{Y\,(Y+1)}{231}$ sit numerus quadratus. Sed quadrata infra 9 sunt 1 et 4, ergo pro $\frac{Y\,(Y + 1)}{231}$ experiendi sunt numeri 8, 5, et 0. Et quidem positio $\frac{Y\,(Y+1)}{231} = 0$, vel $Y = 0$, dat $x^2 = 9$, ergo $x = 3$, et $y = 1$. Positiones autem $\frac{Y\,(Y+1)}{2} = 8$ et 5 impossibiles sunt, quia numerus $Y\,(Y + 1)$ in 8 et 5 desineret, numeri autem pronici nonnisi in 0, 2, 6 desinere possunt. Ergo numerus 16633, unico tantum modo in forma $1848\,x^2 + y^2$ contentus, est primus.

§. 13. Posuimus loco y valorem minimum 1. Quodsi autem assumsissemus valorem maximum, scilicet 97, et pro x numerum 1, aequatio nostra finalis evasisset:

$$x^2 = 6 - \left(\frac{\frac{Y\,(Y+1)}{2} - 21}{231}\right).$$

Cum vero quadrata infra 6 sint 0, 1, et 4, numerus $\frac{\frac{Y\,(Y+1)}{2} - 21}{231}$ nonnisi valores 6, 5, et 2 adipisci poterit. Rejectis igitur valoribus 2 et 6, (quia numeri formae $\frac{Y\,(Y+1)}{2}$ in 3 et 7 desinere nequeunt) superest aequatio $\frac{\frac{Y\,(Y+1)}{2} - 21}{231} = 5$, ex qua

se-

sequitur $\frac{Y(Y+1)}{2} = 1176$, ergo $Y = 48$, $y = 97$, $x = 1$, et numerus 11256 unico modo in forma $1848\,x^2 + y^2$ contentus, certissime est primus.

§. 14. II. Exemplum. Invenire numerum primum qui excedat 1000000?

Prima Solutio ope formulae $38\,x^2 + 5\,y^2$.

Cum $38\,x^2 + 5\,y^2 > 1000000$ esse debeat, tribuatur numero y maximus valor possibilis, ponendo $y = 447$, ergo $x > 5$ esse oportebit. Sit itaque $x = 7$, et formula $38\,x^2 + 5\,y^2$ evadet $= 1000907$. Hic ergo numerus erit primus, si unico tantum modo in forma $38\,x^2 + 5\,y^2$ contentus reperiatur. Ponamus igitur $38\,x^2 + 5\,y^2 = 1000907$, et $y = 2\,Y + 1$, ergo $19\,x^2 + 2.\,5\,Y(Y+1) = 500451$, et $x = 2\,X + 1$ sumi debet. Hoc valore substituto obtinebimus:

$$\frac{X(X+1)}{4} = 1646 - \left(\frac{\frac{5\,Y(Y+1)}{8} - 3}{19}\right),$$

quae aequatio resolvi poterit, si ejusmodi dantur valores ipsius Y, ut non solum $\frac{\frac{5\,Y(Y+1)}{8} - 3}{19}$ aequalis sit numero integro Z, sed et differentia $1646 - Z$ formae $\frac{X(X+1)}{4}$ inveniatur. Ad hoc explorandum ponamus $\frac{\frac{5\,Y(Y+1)}{8} - 3}{19} = Z$, ergo

$\frac{Y(Y+1)}{4}$ erit $= 7\,Z + 1 + \frac{3\,Z+1}{5}$.

Sit $\frac{3\,Z+1}{5} = T$, vel $Z = T + \frac{2\,T-1}{3}$. Posito itaque $\frac{2\,T-1}{3} = R$, erit $T = R + \frac{R+1}{2}$. Quare si fiat $\frac{R+1}{2} = S$, habebimus

$T =$

$T = 3S - 1$, et $Z = 5S - 2$, proinde $\frac{Z+2}{5}$ = numero integro S. Sed $\frac{X(X+1)}{4} = 1646 - Z$, ergo $Z = 1646 - \frac{X(X+1)}{4}$. Subtrahantur igitur a 1646 omnes numeri columnae tertiae et quartae tabulae numerorum pronicorum, qui in 3 et 8 desinunt; hoc enim pacto fiet, ut differentia $1646 - \frac{X(X+1)}{4}$, vel Z binario aucta, per 5 evadat divisibilis. Unde sequentem obtinebimus tabulam:

$\frac{X(X+1)}{4}$	$1646 - \frac{X(X+1)}{4} = Z.$	$\frac{Z+2}{5} = S.$	$38S - 14 = \frac{Y(Y+1)}{4}.$
3	1643	329 .	12488 †
18	1628	326 .	12374.
33	1613	323 .	12260.
68	1578	316 .	11994.
138	1508	302 *	
203	1443	289 .	10968.
248	1398	280 .	10626.
333	1313	263 .	9980.
473	1173	235 *	
588	1058	212 *	
663	983	197 *	
798	848	170 .	6446.
1008	638	128 .	4850.
1173	473	95 *	
1278	368	74 .	2798.
1463	183	37 *	

Ubi notandum est, in tertia columna omnes valores numeri S, in 2, 5 et 7 desinentes, rejici posse, quia ex iis in quarta co-

lumna ejusmodi valores pro $\frac{Y(Y+1)}{4}$ sequerentur, qui in 1, 2, 6, 7 desinerent, quod est contra naturam numerorum $\frac{Y(Y+1)}{4}$. Unicus tantum in quarta columna occurrit numerus formae $\frac{Y(Y+1)}{4}$, scilicet $12488 = \frac{223 \cdot 224}{4}$. Ergo $Y = 223$, $y = 447$, $X = 3$, $x = 7$, et numerus 1000907 est primus.

Secunda Solutio ope formulae $1848\,x^2 + y^2$.

Ponamus loco x et y minimos numeros possibiles 1 et 24, et numerus explorandus, an sit primus, evadet 1064449. Quare si $1848\,x^2 + y^2 = 1064449$ sumatur, ob $y = 2\,Y + 1$, erit $x^2 = 576 - \frac{\frac{Y(Y+1)}{2}}{231}$, et quaestio eo deducta est, an dentur valores numeri Y, qui ita sint comparati, ut non solum $\frac{\frac{Y(Y+1)}{2}}{231}$ numerus integer Z, sed et differentia $576 - Z$ quadrato aequalis sit? Sed ex positione $\frac{\frac{Y(Y+1)}{2}}{231} = Z$ sequitur $\frac{Y(Y+1)}{2} = 231\,Z$, et patet, cum omnes numeri formae $\frac{Y(Y+1)}{2}$ in 0, 1, 3, 5, 6, 8 desinant, valores Z non esse posse nisi numeros in easdem cyphras desinentes, ergo in $Z = 576 - x^2$ pro x assumendi sunt numeri in 1, 4, 5, 6, 9 desinentes, unde sequens oritur tabula:

x	$576 - x^2 = Z.$	$231\, Z = \frac{Y(Y+1)}{2}$
0	576 . . .	133056.
1	575 . . .	132725.
4	560 . . .	129360.
5	551 . . .	127281.
6	540 . . .	124740.
9	495 . . .	114335.
10	476 . . .	109956.
11	455 . . .	105105.
14	380 . . .	87780.
15	351 . . .	81081.
16	320 . . .	73920 †
19	215 . . .	49665.
20	176 . . .	40656.
21	135 . . .	31185.
24	0 . . .	0 †

Duo occurrunt hic in tertia columna numeri formae $\frac{Y(Y+1)}{2}$, scilicet $73920 = \frac{384 \cdot 385}{2}$ et 0, ergo numerus 1064449, duplici modo in forma $1848\, x^2 + y^2$ contentus, non est primus.

Ponatur itaque $x = 24$, ut supra, et $y = 5$, unde nascetur numerus 1064473, qui si eidem examini subjicitur, primus invenietur.

§. 15. Plura exempla afferre inutile esset, cum ex iis, quae dedimus, indoles nostrae methodi satis perspici possit. Quod vero attinet ad formulas $38\, x^2 + 5\, y^2$ et $1848\, x^2 + y^2$, concludi posse videtur, primam ad producendos numeros primos

 mos

mos magis esse idoneam, alteram vero aptiorem ad examinandum, an numerus in illa contentus, primus sit nec ne? Quo major enim est numerus *idoneus* 1848 vel 5. 38, eo minori labore et differentiis opus est in explorandis numeris primis. Si igitur contra, conjecturam Ill. Euleri (vid. finis dissertationis suae) praeter illos 65 numeros *idoneos* vel *congruos*, de quibus nobis catalogum exhibuit, insuper alii ejusdem generis darentur numeri majores, eorum ope per methodum praecedentem maximi numeri primi facillime inveniri possent. Ergo et hoc respectu quaestio magni est momenti in Analysi indeterminata, an dentur adhuc alii ejusmodi numeri? quodsi enim infiniti numeri *idonei* extent, in infinitum quoque numeri primi facili calculo inveniri poterunt. Quo casu desideratur adhuc solutio hujus quaestionis: Invenire numerum primum dato numero proximum?

ESSAI

ESSAI D'UNE MÉTHODE GÉNÉRALE
POUR RÉDUIRE TOUTES SORTES DE SÉRIES EN FRACTIONS CONTINUES.

PAR

B. VISCOVATOV.

Présenté à la Conférence le 2. Mai 1802.

On sait que toute fraction continue peut être réduite en suite infinie, mais le problème inverse n'étoit pas encore résolu d'une maniere générale. Il est vrai que le célebre *Euler* avoit réduit plusieurs séries en fractions continues [a]); mais sa méthode contient beaucoup d'indéterminé et d'ailleurs elle n'est pas applicable à toutes sortes de séries. Aussi Mr. le Gendre à-t-il donné le développement de la tangente d'une arc du cercle en fraction continue [b]), mais ce n'est qu'en employant une méthode particulière et indirecte.

Il étoit bien naturel de penser que la même méthode qui sert à convertir les fractions ordinaires en fractions continues doit

a) Introduction à l'Analyse infinitésimale, par L. Euler, traduite par I. B. Labey. Tome I. pag. 282 et suiv.

b) Elemens de Géometrie avec des notes; par A. M. le Gendre. An IX, page 520 et suiv. Voyez aussi l'ouvrage de M. Euler cité plus haut, page 362 et suiv.

doit aussi servir à la réduction semblable des séries ; mais comme les idées simples viennent toujous après, aussi n'avoit-on pas remarqué jusqu'à présent que cette méthode est générale et applicable aux suites infinies.

Ce petit mémoire, que j'ai l'honneur de présenter maintenant à la célebre Académie, contient cette méthode générale appliquée au développement des expressions algebriques les plus remarquables en fractions continues, et puisque ces fractions sont devenues d'un assez fréquent usage dans l'Analyse et surtout après les recherches savantes de Mr. la Grange, j'ose éspérer que l'illustre société ne jugera ce mémoire tout-à-fait indigne de son attention.

Voici en quoi consiste cette méthode.

2. Soit une série quelconque que je répresenterai par P: je lui donne la forme $P = 1 : \frac{1}{P}$; ensuite je divise 1 par P par la méthode ordinaire, et si je trouve au quotient α et le reste $a\,P^{I}$, j'aurai $\frac{1}{P} = \alpha + \frac{a\,P^{I}}{P} = \alpha + \frac{a}{\frac{P}{P^{I}}}$; maintenant je divise P par P^{I}, et si le quotient $= \beta$ et le reste $= b\,P^{II}$, j'aurai $\frac{P}{P^{I}} = \beta + \frac{b\,P^{II}}{P^{I}} = \beta + \frac{b}{\frac{P^{I}}{P^{II}}}$; je divise P^{I} par P^{II}, et en nommant le quotient γ et le reste $c\,P^{III}$, je trouverai

$\frac{P^{I}}{P^{II}}$

$\frac{P^{I}}{P^{II}} = \gamma + \frac{c P^{III}}{P^{II}} = \gamma + \frac{c}{\frac{P^{II}}{P^{III}}}$, et ainsi de suite. De cette manière je trouve $P = \cfrac{1}{\cfrac{1}{\alpha + \cfrac{a}{\beta + \cfrac{b}{\gamma + \cfrac{c}{\cfrac{P^{II}}{P^{III}}}}}}}$.

2. Si la série proposée P provient du developpement d'une fraction rationelle, la fraction continue qui exprimera cette série aura un nombre fini de termes et parconséquent étant réduite en fraction ordinaire, donnera la fraction, dont la série proposée est le developpement. D'où l'on voit que de cette manière on resout le problème suivant: Etant donnée une série, trouver (si cela se peut) la fraction, dont cette série est le développement.

3. Je prendrai pour premier exemple la série
$P = 1 + 2x^2 + 2x^3 + 6x^4 + 10x^5 + 22x^6 + 42x^7 + 86x^8 +$ etc.
qui est le developpement de la fraction $\frac{1-x}{1-x-2x^2}$. Je mettrai P sous cette forme $P = 1 : \frac{1}{P}$, et puisque je trouve (voy. la table I.) $\frac{1}{P} = 1 - \frac{2x^2}{P : P^I}$, $\frac{P}{P^I} = 1 - \frac{x}{P^I : P^{II}}$, $\frac{P^I}{P^{II}} = 1$, je conclud que $P = \cfrac{1}{1 - \cfrac{2x^2}{1-x}}$.

Si on reduit cette fraction continue en fraction ordinaire, on trouvera $\frac{1-x}{1-x-2x^2}$, comme cela doit être.

4.

4. Je prendrai pour second exemple la suite

$$P = 1 + x + 3x^2 + 7x^3 + 18x^4 + 47x^5 + 123x^6 + 322x^7 + 843x^8 + 2207x^9 + \text{etc.},$$

que je mettrai sous la forme $P = \frac{1}{1 : P}$. Mais je trouve (voyez la table II.)

$$\frac{1}{P} = 1 - \frac{x}{P : P^{I}}, \quad \frac{P}{P^{I}} = 1 - \frac{x}{P^{I} : P^{II}}, \quad \frac{P^{I}}{P^{II}} = \frac{1}{2} + \frac{x}{P^{II} : P^{III}};$$

$$\frac{P^{II}}{P^{III}} = 2 + \frac{x}{P^{III} : P^{IV}}, \quad \frac{P^{III}}{P^{IV}} = 1 - \frac{x}{P^{IV} : P^{V}}, \quad \frac{P^{IV}}{P^{V}} = \frac{2}{5} + \frac{x}{P^{V} : P^{VI}},$$

$$\frac{P^{V}}{P^{VI}} = \frac{5}{2}.$$

Donc
$$P = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{\frac{1}{2} + \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{\frac{2}{5} + \cfrac{x}{\frac{5}{2}}}}}}}} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 - \cfrac{2x}{1 + \cfrac{2x}{2 + \cfrac{x}{1 - \cfrac{5x}{2 + 2x}}}}}}.$$

En reduisant cette fraction continue en fraction ordinaire, on trouvera $\frac{1 - 2x + x^2 - x^3}{1 - 3x + x^2}$; et ce de cette fraction que la série proposée est le développement.

Ainsi on peut toujours trouver la fraction, dont la serie recurrente proposée est le développement.

5. Prenons pour troisième exemple le binome de Newton

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} x^3 + \text{etc.}$$

je suppose cette série $= P$ et je lui donne la forme $P = 1 : \frac{1}{P}$.

Or

Or par le moyen de la division ordinaire je trouve (voyez la table III.)

$$\frac{1}{P} = 1 - \frac{nx}{P : P^{I}}, \qquad \frac{P}{P^{I}} = 1 + \frac{(n+1)x}{P^{I} : P^{II}}$$

$$\frac{P^{I}}{P^{II}} = 2 - \frac{(n-1)x}{P^{II} : P^{III}}, \quad \frac{P^{II}}{P^{III}} = 3 + \frac{(n+2)x}{P^{III} : P^{IV}},$$

$$\frac{P^{III}}{P^{IV}} = 2 - \frac{(n-2)x}{P^{IV} : P^{V}}, \quad \frac{P^{IV}}{P^{V}} = 5 + \frac{(n+3)x}{P^{V} : P^{VI}},$$

$$\frac{P^{V}}{P^{VI}} = 2 - \frac{(n-3)x}{P^{VI} : P^{VII}}, \quad \frac{P^{VI}}{P^{VII}} = 7 + \frac{(n+4)x}{P^{VII} : P^{VIII}},$$

$$\frac{P^{VII}}{P^{VIII}} = 2 + \frac{(n-4)x}{P^{VIII} : P^{IX}}, \quad \frac{P^{VIII}}{P^{IX}} = 9 + \frac{(n+5)x}{P^{IX} : P^{X}},$$

$$\frac{P^{IX}}{P^{X}} = 2 - \frac{(n-5)x}{P^{X} : P^{XI}},$$ et ainsi de suite.

D'où il s'ensuit que

$$(1+x)^n = \cfrac{1}{1 - \cfrac{nx}{1 + \cfrac{(n+1)x}{2 - \cfrac{(n-1)x}{3 + \cfrac{(n+2)x}{2 - \cfrac{(n-2)x}{5 + \cfrac{(n+3)x}{2 - \cfrac{(n-3)x}{7 + \cfrac{(n+4)x}{2 - \cfrac{(n-4)x}{9 + \cfrac{(n+5)x}{2 - \cfrac{(n-5)x}{11 + etc.}}}}}}}}}}}}$$

Puis

Puisque $(1+x)^{-n} = \frac{1}{(1+x)^n}$, on aura

$$(1+x)^{-n} = 1 - \cfrac{nx}{1+\cfrac{(n+1)x}{2-\cfrac{(n-1)x}{3+\cfrac{(n+2)x}{2-\cfrac{(n-2)x}{5+\cfrac{(n+3)x}{2-\cfrac{(n-3)x}{7+\text{etc.}}}}}}}}$$

Puisque ces deux expressions contiennent dans leurs termes les quantités $n-1$, $n-2$, etc. il est evident que les deux fractions continues s'interrompent lorsque n est un nombre entier positif ou négatif et qu'elles s'etendent à l'infini dans tous les autres cas.

Par exemple, si $n=3$, on aura

$$(1+x)^3 = \cfrac{1}{1-\cfrac{3x}{1+\cfrac{4x}{2-\cfrac{2x}{3+\cfrac{5x}{2-\cfrac{x}{5+\cfrac{6x}{2}}}}}}} = \cfrac{1}{1-\cfrac{3x}{1+\cfrac{2x}{1-\cfrac{x}{3+\cfrac{5x}{2-\cfrac{x}{5+3x}}}}}};$$

en reduisant cette expression en fraction ordinaire on trouvera $1+3x+3x^2+x^3$, comme cela doit être.

De même

$$(1+x)^{-3} = 1 - \cfrac{3x}{1+\cfrac{2x}{1-\cfrac{x}{3+\cfrac{5x}{2-\cfrac{x}{5+3x}}}}} = \frac{1}{1+3x+3x^2+x^3}.$$

Suit

Soit n un nombre fractionnaire $\frac{p}{q}$, on aura

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{\frac{p}{q}x}{1 + \cfrac{\left(\frac{p+q}{q}\right)x}{2 - \cfrac{\left(\frac{p-q}{q}\right)x}{3 + \cfrac{\left(\frac{p+2q}{q}\right)x}{2 - \text{etc.}}}}}}$$

$$\cfrac{1}{1 - \cfrac{px}{q + \cfrac{(p+q)x}{2 - \cfrac{(p-q)x}{3q + \cfrac{(p+2q)x}{2 - \cfrac{(p-2q)x}{5q + \cfrac{(p+3q)x}{2 - \cfrac{(p-3q)x}{2q + \text{etc.}}}}}}}}}$$

Dans le cas où $p < q$, on peut donner à cette expression la forme suivante:

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{px}{q + \cfrac{(q+p)x}{p + \cfrac{(q-p)x}{3q + \cfrac{(2q+p)x}{2 + \cfrac{(2q-p)x}{5q + \cfrac{(3q+p)x}{2 + \text{etc.}}}}}}}}$$

6. Prenons maintenant l' expression

$$\log. (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \text{etc.}$$

Je designe cette série par Px, ce qui donne log. $(1+x) = \frac{x}{1:P}$; mais (voyez la table IV.)

$$\frac{1}{P} = 1 + \frac{x}{P:P^{I}}, \quad \frac{P}{P^{I}} = 2 + \frac{x}{P:P^{I}}, \quad \frac{P^{I}}{P^{II}} = 3 + \frac{2x}{P^{II}:P^{II}}$$

$$\frac{P^{II}}{P^{III}} = 2 + \frac{2x}{P^{III} : P^{IV}}, \quad \frac{P^{III}}{P^{IV}} = 5 + \frac{3x}{P^{IV} : P^{V}}, \quad \frac{P^{IV}}{P^{V}} = 2 + \frac{3x}{P^{V} : P^{VI}},$$

$$\frac{P^{V}}{P^{VI}} = 7 + \frac{4x}{P^{VI} : P^{VII}}, \quad \frac{P^{VI}}{P^{VII}} = 2 + \frac{4x}{P^{VII} : P^{VIII}}, \quad \frac{P^{VII}}{P^{VIII}} = 9 + \frac{5x}{P^{VIII} : P^{IX}},$$

$$\frac{P^{VIII}}{P^{IX}} = 2 + \frac{5x}{P^{IX} : P^{X}}, \text{ etc.}$$

Par conséquent

$$\log.(1+x) = \cfrac{x}{1+\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{3+\cfrac{2x}{2+\cfrac{2x}{5+\cfrac{3x}{2+\cfrac{3x}{7+\cfrac{4x}{2+\cfrac{4x}{9+\cfrac{5x}{2+\cfrac{5x}{11+\cfrac{6x}{2+\cfrac{6x}{13+\text{etc.}}}}}}}}}}}}}}$$

7. Soit e la base des logarithmes naturels, on aura

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{etc.}$$

Je pose cette serie $= P$, ce qui donne $e^x = \frac{1}{1 : P}$; mais je trouve (voyez la table V.)

$$\frac{1}{P} = 1 - \frac{x}{P : P^{I}}, \quad \frac{P}{P^{I}} = 1 + \frac{x}{P^{I} : P^{II}}, \quad \frac{P^{I}}{P^{II}} = 2 - \frac{x}{P^{II} : P^{III}},$$

$$\frac{P^{II}}{P^{III}} = 3 + \frac{2x}{P^{III} : P^{IV}}, \quad \frac{P^{III}}{P^{IV}} = 4 - \frac{2x}{P^{IV} : P^{V}},$$

P^{IV}

$$\frac{p^{IV}}{p^{V}} = 5 + \frac{3x}{p^{V} : p^{VI}}, \quad \frac{p^{V}}{p^{VI}} = 6 - \frac{3x}{p^{VI} : p^{VII}},$$

$$\frac{p^{VI}}{p^{VII}} = 7 + \frac{4x}{p^{VII} : p^{VIII}}, \quad \frac{p^{VII}}{p^{VIII}} = 8 - \frac{4x}{p^{VIII} : p^{IX}}, \text{ etc.}$$

D'où il suit que

$$e^{x} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{2 - \cfrac{x}{3 + \cfrac{2x}{4 - \cfrac{2x}{5 + \cfrac{3x}{6 - \cfrac{3x}{7 + \cfrac{4x}{8 - \cfrac{4x}{9 + \textit{etc.}}}}}}}}}}}$$

et par conséquent

$$e^{-x} = 1 - \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{2 - \cfrac{x}{3 + \cfrac{2x}{4 - \cfrac{2x}{5 + \textit{etc.}}}}}}$$

8. Prenons encore l'expression

$$\text{tang. } x = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3 \cdot 5} + \frac{17 x^7}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 31 x^9}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{2 \cdot 691 x^{11}}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} \text{ etc.}$$

que nous poserons $= Px$; on aura tang. $x = \frac{x}{1 : P}$; or on trouvera (voyez la table VI.)

I

$$\frac{1}{P} = 1 - \frac{x^2}{P : P^{I}}, \quad \frac{P}{P^{I}} = 3 - \frac{x}{P^{I} : P^{II}}, \quad \frac{P^{I}}{P^{II}} = 5 - \frac{x^2}{P^{II} : P^{III}},$$

$$\frac{P^{II}}{P^{III}} = 7 - \frac{x^2}{P^{III} : P^{IV}}, \quad \frac{P^{III}}{P^{IV}} = 9 - \frac{x^2}{P^{IV} : P^{V}},$$

$$\frac{P^{IV}}{P^{V}} = 11 - \frac{x^2}{P^{V} : P^{VI}}, \text{ et ainsi de suite.}$$

Donc tang. $x = 1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \cfrac{x^2}{11 - \cfrac{x^2}{13 - etc.}}}}}}$

c' est la même fraction à laquelle Mr. Le Gendre a parvenu par une méthode, quoique très ingénieuse, mais particuliere.

9. On peut encore trouver cette fraction d' une maniere plus simple.

En effet, puisque tang. $x = \frac{\sin. x}{\cos. x}$ et

$$\sin. x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{etc.}$$

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{etc.},$$

$$\text{donc tang. } x = \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{etc.}\right)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{etc.}},$$

ou, en désignant le numerateur par $P'x$ et le denominateur par P,

tang. $x = \frac{P'x}{P} = \frac{x}{P : P'}$; or je trouve (voyez la table VII.)

$$\frac{P}{P^{I}} = 1 - \frac{x^2}{P^{I} : P^{II}}, \quad \frac{P^{I}}{P^{II}} = 3 - \frac{x^2}{P^{II} : P^{III}}, \quad \frac{P^{II}}{P^{III}} = 5 - \frac{x^2}{P^{III} : P^{IV}};$$

$$\frac{P^{III}}{P^{IV}} = 7 - \frac{x^2}{P^{IV} : P^{V}}, \quad \frac{P^{IV}}{P^{V}} = 9 - \frac{x^2}{P^{V} : P^{VI}}, \quad \frac{P^{V}}{P^{VI}} = 11 - \frac{x^2}{P^{VI} : P^{VII}},$$

$$\frac{P^{VI}}{P^{VII}} = 13 - \frac{x^2}{P^{VII} : P^{VIII}}, \text{ etc.}$$

Donc tang. $x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \cfrac{x^2}{11 - \cfrac{x^2}{13 - \text{etc.}}}}}}}}$

Il suit aussi delà que

cot. $x = \cfrac{1}{\cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \text{etc.}}}}}}$

10. Prenons pour dernier exemple l'éxpression suivante:

$$\text{Arc. tang. } x = (1 - \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{5}x^4 - \tfrac{1}{7}x^6 + \tfrac{1}{9}x^8 - \tfrac{1}{11}x^{10} + \tfrac{1}{13}x^{12} - \text{etc.}) = xP.$$

Representons cette suite par $\frac{x}{1 : P}$; nous trouverons (voyez la table VIII.)

$$\frac{1}{P} = 1 + \frac{x^2}{P : P^{I}}, \quad \frac{P}{P^{I}} = 3 + \frac{4x^2}{P^{I} : P^{II}}, \quad \frac{P^{I}}{P^{II}} = 5 + \frac{9x^2}{P^{II} : P^{III}},$$

$$\frac{P^{II}}{P^{III}} = 7 + \frac{16x^2}{P^{III} : P^{IV}}, \quad \frac{P^{III}}{P^{IV}} = 9 + \frac{25x^4}{P^{IV} : P^{V}}, \quad \frac{P^{IV}}{P^{V}} = 11 + \frac{36x^2}{P^{V} : P^{VI}},$$

$\frac{P^{V}}{P^{VI}}$

$\frac{p^{V}}{p^{VI}} = 13 + \frac{49\,x^2}{p^{VI} : p^{VII}}$, $\frac{p^{VI}}{p^{VII}} = 15 + \frac{64\,x^2}{p^{VII} : p^{VIII}}$, etc. D'où il s' ensuit que

$$\text{Arc. tang. } x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{4x^2}{5 + \cfrac{9x^2}{7 + \cfrac{16x^2}{9 + \cfrac{25x^2}{11 + \cfrac{36x^2}{13 + \cfrac{49x^2}{15 + \cfrac{64x^2}{17 + \text{etc.}}}}}}}}}}$$

Je me borne à ces exemples, car on voit que la méthode éxposée ici est générale, et que même il est très aisé de la presenter sous une formule générale, applicable à tous les cas possibles.

Table

$$\begin{array}{l|l} 42x^7 + 86x^8 + etc & 1 \\ \hline 42x^7 - 86x^8 - etc. & = -2x^2p^{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} + 22x^6 + etc. & 1 \\ + 43x^6 + etc. & \\ \hline - 21x^6 - etc. & = -x\,p^{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} ^5 + 43x^6 + etc. & 1 \\ ^5 + etc. & \\ \hline \end{array}$$

Table I.

$$P = 1 + 2x^2 + 2x^3 + 6x^4 + 10x^5 + 22x^6 + 42x^7 + 86x^8 + \text{etc.}\ \left|\begin{array}{l} 1 \\ 1 + 2x^2 + 2x^3 + 6x^4 + 10x^5 + 22x^6 + 42x^7 + 86x^8 + \text{etc} \\ \hline -2x^2 - 2x^3 - 6x^4 - 10x^5 - 22x^6 - 42x^7 - 86x^8 - \text{etc.} \end{array}\right| 1 \quad = -2x^2 P^I$$

$$P^I = 1 + x + 3x^2 + 5x^3 + 11x^4 + 21x^5 + 43x^6 + \text{etc.}\ \left|\begin{array}{l} 1 + 2x^2 + 2x^3 + 6x^4 + 10x^5 + 22x^6 + \text{etc.} \\ 1 + x + 3x^2 + 5x^3 + 11x^4 + 21x^5 + 43x^6 + \text{etc.} \\ \hline -x - x^2 - 3x^3 - 5x^4 - 11x^5 - 21x^6 - \text{etc.} \end{array}\right| 1 \quad = -x P^{II}$$

$$P^{II} = 1 + x + 3x^2 + 5x^3 + 11x^4 + 21x^5 + \text{etc.}\ \left|\begin{array}{l} 1 + x + 3x^2 + 5x^3 + 11x^4 + 21x^5 + 43x^6 + \text{etc.} \\ 1 + x + 3x^2 + 5x^3 + 11x^4 + 21x^5 + \text{etc.} \\ \hline 0 \end{array}\right| 1$$

$$P = 1 + x + \ldots\ x^6 + 322\,x^7 + 843\,x^8 + 2207\,x^9 + etc. \quad \Big|\ 1$$

$$\ldots\ x^6 - 322\,x^7 - 843\,x^8 - 2207\,x^9 - etc. \quad = -\,x\,P^{I}$$

$$P^{I} = 1 + 3\,x\ \ldots\ 123\,x^6 + 322\,x^7 + 843\,x^8 + etc. \quad \Big|\ 1$$

$$322\,x^6 + 843\,x^7 + 2207\,x^8 + etc.$$

$$199\,x^6 - 521\,x^7 - 1364\,x^8 - etc. \quad = -\,x\,P^{II}$$

$$P^{II} = 2 + 4\ \ldots\ 123\,x^5 + 322\,x^6 + 843\,x^7 + etc. \quad \Big|\ \frac{1}{2}$$

$$\frac{199}{2}\,x^5 + \frac{521}{2}\,x^6 + 682\,x^7 + etc.$$

$$\frac{47}{2}\,x^5 + \frac{123}{2}\,x^6 + 161\,x^7 + etc. \quad = x\,P^{III}$$

$$P^{III} = 1 - \ldots\ x^4 + 199\,x^5 + 521\,x^6 + etc. \quad \Big|\ 2$$

$$x^4 + 123\,x^5 + 322\,x^6 + etc.$$

$$x^4 + 76\,x^5 + 199\,x^6 + etc. \quad = x\,P^{IV}$$

$$P^{IV} = 1 - \ldots\ \frac{47}{2}\,x^4 + \frac{123}{2}\,x^5 + etc. \quad \Big|\ 1$$

$$76\,x^4 + 199\,x^5 + etc.$$

$$\frac{105}{2}\,x^4 - \frac{175}{2}\,x^5 - etc. \quad = -\,x\,P^{V}$$

$$P^{V} = \frac{5}{2}\ \ldots\ + 199\,x^5 + etc. \ldots \quad \Big|\ \frac{2}{5}$$

$$+ etc. \ldots$$

$$+ etc. \ldots \quad = x\,P^{VI}$$

$$P^{VI} = 1 - \ldots \quad \Big|\ \frac{5}{2}$$

Table II.

$$P = 1 + x + 3x^2 + 7x^3 + 18x^4 + 47x^5 + 123x^6 + 322x^7 + 843x^8 + 2207x^9 + \text{etc.}$$

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1 \\
1 + x + 3x^2 + 7x^3 + 18x^4 + 47x^5 + 123x^6 + 322x^7 + 843x^8 + 2207x^9 + \text{etc.} & \\
\hline
-x - 3x^2 - 7x^3 - 18x^4 - 47x^5 - 123x^6 - 322x^7 - 843x^8 - 2207x^9 - \text{etc.} & = -x\,P^{I}
\end{array}$$

$$P^{I} = 1 + 3x + 7x^2 + 18x^3 + 47x^4 + 123x^5 + 322x^6 + 843x^7 + 2207x^8 + \text{etc.}$$

$$\begin{array}{l|l}
1 + x + 3x^2 + 7x^3 + 18x^4 + 47x^5 + 123x^6 + 322x^7 + 843x^8 + \text{etc.} & 1 \\
1 + 3x + 7x^2 + 18x^3 + 47x^4 + 123x^5 + 322x^6 + 843x^7 + 2207x^8 + \text{etc.} & \\
\hline
-2x - 4x^2 - 11x^3 - 29x^4 - 76x^5 - 199x^6 - 521x^7 - 1364x^8 - \text{etc.} & = -x\,P^{II}
\end{array}$$

$$P^{II} = 2 + 4x + 11x^2 + 29x^3 + 76x^4 + 199x^5 + 521x^6 + 1364x^7 + \text{etc.}$$

$$\begin{array}{l|l}
1 + 3x + 7x^2 + 18x^3 + 47x^4 + 123x^5 + 322x^6 + 843x^7 + \text{etc.} & \frac{1}{2} \\
1 + 2x + \frac{11}{2}x^2 + \frac{29}{2}x^3 + 38x^4 + \frac{199}{2}x^5 + \frac{521}{2}x^6 + 682x^7 + \text{etc.} & \\
\hline
x + \frac{3x^2}{2} + \frac{7x^3}{2} + 9x^4 + \frac{47}{2}x^5 + \frac{123}{2}x^6 + 161x^7 + \text{etc.} & = x\,P^{III}
\end{array}$$

$$P^{III} = 1 + \frac{3x}{2} + \frac{7x^2}{2} + 9x^3 + \frac{47}{2}x^4 + \frac{123}{2}x^5 + 161x^6 + \text{etc.}$$

$$\begin{array}{l|l}
2 + 4x + 11x^2 + 29x^3 + 76x^4 + 199x^5 + 521x^6 + \text{etc.} & 2 \\
2 + 3x + 7x^2 + 18x^3 + 47x^4 + 123x^5 + 322x^6 + \text{etc.} & \\
\hline
x + 4x^2 + 11x^3 + 29x^4 + 76x^5 + 199x^6 + \text{etc.} & = x\,P^{IV}
\end{array}$$

$$P^{IV} = 1 + 4x + 11x^2 + 29x^3 + 76x^4\ 199x^5 + \text{etc.}$$

$$\begin{array}{l|l}
1 + \frac{3x}{2} + \frac{7x^2}{2} + 9x^3 + \frac{47}{2}x^4 + \frac{123}{2}x^5 + \text{etc.} & 1 \\
1 + 4x + 11x^2 + 29x^3 + 76x^4 + 199x^5 + \text{etc.} & \\
\hline
-\frac{5x}{2} - \frac{15x^2}{2} - 20x^3 - \frac{105x^4}{2} - \frac{275}{2}x^5 - \text{etc.} & = -x\,P^{V}
\end{array}$$

$$P^{V} = \frac{5}{2} + \frac{15}{2}x + 20x^2 + \frac{105}{2}x^3 + \frac{275}{2}x^4 + \text{etc.}$$

$$\begin{array}{l|l}
1 + 4x + 11x^2 + 29x^3 + 76x^4 + 199x^5 + \text{etc.} \ldots\ldots & \frac{2}{5} \\
1 + 3x + 8x^2 + 21x^3 + 55x^4 + \text{etc.} \ldots\ldots & \\
\hline
x + 3x^2 + 8x^3 + 21x^4 + \text{etc.} \ldots\ldots & = x\,P^{VI}
\end{array}$$

$$P^{VI} = 1 + 3x + 8x^2 + 21x^3 + \text{etc.} \ldots\ldots$$

$$\begin{array}{l|l}
\frac{5}{2} + \frac{15}{2}x + 20x^2 + \frac{105}{2}x^3 + \text{etc.} \ldots\ldots & \frac{5}{2} \\
\frac{5}{2} + \frac{15}{2}x + 20x^2 + \frac{105}{2}x^3 + \text{etc.} \ldots\ldots & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$P = 1 + n x$ … $\Big|$ 1

$- \frac{n . n-1 . n-2 . n-3 . n-4}{2 . 3 . 4 . 5} x^5 + \frac{n . n-1 . n-2 . n-3 . n-4 . n-5}{2 . 3 . 4 . 5 . 6} x^6 + \text{etc.} \Big|$

$- \frac{n . n-1 . n-2 . n-3 . n-4}{2 . 3 . 4 . 5} x^5 - \frac{n . n-1 . n-2 . n-3 . n-4 . n-5}{2 . 3 . 4 . 5 . 6} x^6 - \text{etc.} = - n x P^{I}$

$P^{I} = 1 + \frac{n-3}{2} x^4 + \frac{n . n-1 . n-2 . n-3 . n-4}{2 . 3 . 4 . 5} x^5 + \frac{n . n-1 . n-2 . n-3 . n-4 . n-5}{2 . 3 . 4 . 5 . 6} x^6 + \text{etc.} \Big|$ 1

$x^4 + \frac{n-1 . n-2 . n-3 . n-4 . n-5}{2 . 3 . 4 . 5 . 6} x^5 + \frac{n-1 . n-2 . n-3 . n-4 . n-5 . n-6}{2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7} x^6 + \text{etc.} \Big|$

$+ \frac{5 . n+1 . n-1 . n-2 . n-3 . n-4}{2 . 3 . 4 . 5 . 6} x^5 + \frac{6 . n+1 . n-1 . n-2 . n-3 . n-4 . n-5}{2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7} x^6 + \text{etc.} = (n+1) x P^{II}$

$P^{II} =$ $x^4 + \frac{n-1 . n-2 . n-3 . n-4 . n-5}{2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7} x^5 + \frac{n-1 . n-2 . n-3 . n-4 . n-5 . n-6}{2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8} x^6 + \text{etc.} \Big|$ 2

P^{III}

P^{IV}

$P^{V} =$

P^{VI}

Table III.

$$= 1 + nx + \frac{n.\overline{n-1}}{2}x^2 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.3}x^3 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.3.4}x^4 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5}x^5 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6}x^6 + \text{etc.}$$

$$1 \qquad | \; 1$$
$$1 + nx + \frac{n.\overline{n-1}}{2}x^2 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.3}x^3 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.3.4}x^4 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5}x^5 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6}x^6 + \text{etc.}$$
$$- nx - \frac{n.\overline{n-1}}{2}x^2 - \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.3}x^3 - \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.3.4}x^4 - \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5}x^5 - \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6}x^6 - \text{etc.} = -nxP^{I}$$

$$= 1 + \frac{n-1}{2}x + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.3}x^2 + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.3.4}x^3 + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5}x^4 + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6}x^5 + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7}x^6 + \text{etc.}$$

$$1 + nx + \frac{n.\overline{n-1}}{2}x^2 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.3}x^3 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.3.4}x^4 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5}x^5 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6}x^6 + \text{etc.} \; | \; 1$$
$$1 + \frac{n-1}{2}x + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.3}x^2 + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.3.4}x^3 + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5}x^4 + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6}x^5 + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7}x^6 + \text{etc.}$$
$$\frac{n+1}{2}x + \frac{2.\overline{n+1}.\overline{n-1}}{2.3}x^2 + \frac{3.\overline{n+1}.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.3.4}x^3 + \frac{4.\overline{n+1}.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.3.4.5}x^4 + \frac{5.\overline{n+1}.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6}x^5 + \frac{6.\overline{n+1}.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7}x^6 + \text{etc.} = (n+1)xP^{II}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2.\overline{n-1}}{2.3}x + \frac{3.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.3.4}x^2 + \frac{4.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.3.4.5}x^3 + \frac{5.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6}x^4 + \frac{6.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7}x^5 + \text{etc.}$$

$$1 + \frac{n-1}{2}x + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.3}x^2 + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.3.4}x^3 + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5}x^4 + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7}x^5 + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8}x^6 + \text{etc.} \; | \; 2$$
$$1 + \frac{4.\overline{n-1}}{2.3}x + \frac{6.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.3.4}x^2 + \frac{8.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.3.4.5}x^3 + \frac{10.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6}x^4 + \frac{12.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8}x^5 + \text{etc.}$$
$$- \frac{n-1}{2.3}x - \frac{2.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.3.4}x^2 - \frac{3.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.3.4.5}x^3 - \frac{4.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6}x^4 - \frac{5.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7}x^5 - \text{etc.} = -(n-1)xP^{III}$$

$$P^{III} = \frac{1}{2.3} + \frac{2.\overline{n-2}}{2.3.4}x + \frac{3.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.3.4.5}x^2 + \frac{4.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6}x^3 + \frac{5.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7}x^4 + \frac{6.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8}x^5 + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2.\overline{n-1}}{2.3}x + \frac{3.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.3.4}x^2 + \frac{4.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.3.4.5}x^3 + \frac{5.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6}x^4 + \frac{6.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7}x^5 + \text{etc.} \; | \; 3$$
$$\frac{1}{2} + \frac{6.\overline{n-2}}{2.3.4}x + \frac{9.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.3.4.5}x^2 + \frac{12.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6}x^3 + \frac{15.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7}x^4 + \frac{18.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8}x^5 + \text{etc.}$$
$$+ \frac{2.\overline{n+2}}{2.3.4}x + \frac{2.3.\overline{n+2}.\overline{n-2}}{2.3.4.5}x^2 + \frac{2.6.\overline{n+2}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.3.4.5.6}x^3 + \frac{2.10.\overline{n+2}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6.7}x^4 + \frac{2.15.\overline{n+2}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8}x^5 + \text{etc.} = +(n+2)xP^{IV}$$

$$P^{IV} = \frac{2.1}{2.3.4} + \frac{2.3.\overline{n-2}}{2.3.4.5}x + \frac{2.6.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.3.4.5.6}x^2 + \frac{2.10.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6.7}x^3 + \frac{2.15.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8}x^4 + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{2.3} + \frac{2.\overline{n-2}}{2.3.4}x + \frac{3.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.3.4.5}x^2 + \frac{4.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6}x^3 + \frac{5.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7}x^4 + \frac{6.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8}x^5 + \text{etc.} \; | \; 2$$
$$\frac{1}{2.3} + \frac{4.3.\overline{n-2}}{2.3.4.5}x + \frac{4.6.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.3.4.5.6}x^2 + \frac{4.10.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6.7}x^3 + \frac{4.15.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8}x^4 + \frac{4.21.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8.9}x^5 + \text{etc.}$$
$$- \frac{2.\overline{n-2}}{2.3.4.5}x - \frac{2.3.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.3.4.5.6}x^2 - \frac{2.6.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6.7}x^3 - \frac{2.10.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8}x^4 - \frac{2.15.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8.9}x^5 - \text{etc.} = -(n-2)xP^{V}$$

$$P^{V} = \frac{2.1}{2.3.4.5} + \frac{2.3.\overline{n-3}}{2.3.4.5.6}x + \frac{2.6.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6.7}x^2 + \frac{2.10.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8}x^3 + \frac{2.15.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8.9}x^4 + \text{etc.}$$

$$\frac{2.1}{2.3.4} + \frac{2.3.\overline{n-2}}{2.3.4.5}x + \frac{2.6.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.3.4.5.6}x^2 + \frac{2.10.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6.7}x^3 + \frac{2.15.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8}x^4 + \text{etc.} \; \ldots \; | \; 5$$
$$\frac{2.1}{2.3.4} + \frac{10.3.\overline{n-3}}{2.3.4.5.6}x + \frac{10.6.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6.7}x^2 + \frac{10.10.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8}x^3 + \frac{10.15.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8.9}x^4 + \text{etc.} \; \ldots$$
$$+ \frac{6.1.\overline{n+3}}{2.3.4.5.6}x + \frac{6.4.\overline{n+3}.\overline{n-3}}{2.3.4.5.6.7}x^2 + \frac{6.10.\overline{n+3}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6.7.8}x^3 + \frac{6.20.\overline{n+3}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8.9}x^4 + \text{etc.} \; \ldots = (n+3)xP^{VI}$$

$$P^{VI} = \frac{6.1}{2.3.4.5.6} + \frac{6.4.\overline{n-3}}{2.3.4.5.6.7}x + \frac{6.10.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6.7.8}x^2 + \frac{6.20.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8.9}x^3 + \frac{6.35.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10}x^4 + \text{etc.}$$

$$\frac{2.1}{2.3.4.5} + \frac{2.3.\overline{n-3}}{2.3.4.5.6}x + \frac{2.6.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6.7}x^2 + \frac{2.10.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8}x^3 + \frac{2.15.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8.9}x^4 + \text{etc.} \; \ldots \; | \; 2$$
$$\frac{2.1}{2.3.4.5} + \frac{12.4.\overline{n-3}}{2.3.4.5.6.7}x + \frac{12.10.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6.7.8}x^2 + \frac{12.20.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8.9}x^3 + \frac{12.35.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10}x^4 + \text{etc.} \; \ldots$$
$$- \frac{6.1.\overline{n-3}}{2.3.4.5.6.7}x - \frac{6.4.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6.7.8}x^2 - \frac{6.10.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8.9}x^3 - \frac{6.20.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10}x^4 + \text{etc.} \; \ldots = -(n-3)xP^{VII}$$

$$P^{VII} = \frac{6.1}{2.3.4.5.6.7} + \frac{6.4.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6.7.8}x + \frac{6.10.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8.9}x^2 + \frac{6.20.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10}x^3 + \frac{6.35.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}.\overline{n-7}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}x^4 + \text{etc.}$$

$$\frac{6.1}{2.3.4.5.6} + \frac{6.4.\overline{n-3}}{2.3.4.5.6.7}x + \frac{6.10.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6.7.8}x^2 + \frac{6.20.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8.9}x^3 + \frac{6.35.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10}x^4 + \text{etc.} \; . \; | \; 7$$
$$\frac{6.1}{2.3.4.5.6} + \frac{7.6.4.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6.7.8}x + \frac{7.6.10.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8.9}x^2 + \frac{7.6.20.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10}x^3 + \frac{7.6.35.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}.\overline{n-7}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}x^4 + \text{etc.} \; .$$
$$\frac{24.1.\overline{n+4}}{2.3.4.5.6.7.8}x + \frac{24.5.\overline{n+4}.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6.7.8.9}x^2 + \frac{24.15.\overline{n+4}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10}x^3 + \frac{24.35.\overline{n+4}.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}x + \text{etc.} \; . = (n+4)xP^{VIII}$$

$$P^{VIII} = \frac{24.1}{2.3.4.5.6.7.8} + \frac{24.5.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6.7.8.9}x + \frac{24.15.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10}x^2 + \frac{24.35.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}x^3 + \frac{24.70.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}.\overline{n-7}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12}x^4 + \text{etc.}$$

$$\frac{6.1}{2.3.4.5.6.7} + \frac{6.4.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6.7.8}x + \frac{6.10.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8.9}x^2 + \frac{6.20.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10}x^3 + \frac{6.35.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}.\overline{n-7}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}x^4 + \text{etc.} \; | \; 2$$
$$\frac{6.1}{2.3.4.5.6.7} + \frac{48.5.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6.7.8.9}x + \frac{48.15.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10}x^2 + \frac{48.35.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}x^3 + \frac{48.70.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}.\overline{n-7}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12}x^4 + \text{etc.}$$
$$- \frac{24.1.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6.7.8.9}x - \frac{24.5.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10}x^2 - \frac{24.15.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}x^3 - \frac{24.35.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}.\overline{n-7}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12}x^4 + \text{etc.} = -(n-4)xP^{IX}$$

$$P^{IX} = \frac{24.1}{2.3.4.5.6.7.8.9} + \frac{24.5.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10}x + \frac{24.15.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}x^2 + \frac{24.35.\overline{n-5}.\overline{n-6}.\overline{n-7}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12}x^3 + \text{etc.}$$

$$\frac{24.1}{2.3.4.5.6.7.8} + \frac{24.5.\overline{n-4}}{2.3.4.5.6.7.8.9}x + \frac{24.15.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10} + x^2\frac{24.35.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}x^3 + \text{etc.} \; \ldots \; | \; 9$$
$$\frac{24.1}{2.3.4.5.6.7.8} + \frac{9.24.5.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10}x + \frac{9.24.15.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11} + x^2\frac{9.24.35.\overline{n-5}.\overline{n-6}.\overline{n-7}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12}x^3 + \text{etc.} \; \ldots$$
$$\frac{24.5.1.\overline{n+5}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10}x + \frac{24.5.6.\overline{n+5}.\overline{n-5}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}x^2 + \frac{24.5.21.\overline{n+5}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12}x^3 + \text{etc.} \; \ldots = (n+5)xP^{X}$$

et ainsi de suite.

$$\frac{+\frac{x^{10}}{11}-\frac{x^{11}}{12}+\frac{x^{12}}{13}-\frac{x^{13}}{14}+\text{etc.}}{-\frac{x^{10}}{11}+\frac{x^{11}}{12}-\frac{x^{12}}{13}+\frac{x^{13}}{14}-\text{etc.}}\Bigg|^{1} = x\,p^{I}$$

Table IV.

$$P = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^6}{7} - \frac{x^7}{8} + \frac{x^8}{9} - \frac{x^9}{10} + \frac{x^{10}}{11} - \text{etc.} \quad \Big| \; x \qquad \Big| \; 1$$

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^6}{7} - \frac{x^7}{8} + \frac{x^8}{9} - \frac{x^9}{10} + \frac{x^{10}}{11} - \frac{x^{11}}{12} + \frac{x^{12}}{13} - \frac{x^{13}}{14} + \text{etc.}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{5} + \frac{x^5}{6} - \frac{x^6}{7} + \frac{x^7}{8} - \frac{x^8}{9} + \frac{x^9}{10} - \frac{x^{10}}{11} + \frac{x^{11}}{12} - \frac{x^{12}}{13} + \frac{x^{13}}{14} - \text{etc.} \quad = x\,P^{I}$$

$$P^{I} = \frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{5} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{7} + \frac{x^6}{8} - \frac{x^7}{9} + \frac{x^8}{10} - \frac{x^9}{11} + \frac{x^{10}}{12} - \text{etc.} \quad \Big| \; 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^6}{7} - \frac{x^7}{8} + \frac{x^8}{9} - \frac{x^9}{10} + \frac{x^{10}}{11} - \frac{x^{11}}{12} + \frac{x^{12}}{13} - \text{etc.} \quad \Big| \; 2$$

$$1 - \frac{2x}{3} + \frac{2x^2}{4} - \frac{2x^3}{5} + \frac{2x^4}{6} - \frac{2x^5}{7} + \frac{2x^6}{8} - \frac{2x^7}{9} + \frac{2x^8}{10} - \frac{2x^9}{11} + \frac{2x^{10}}{12} - \frac{2x^{11}}{13} + \frac{2x^{12}}{14} - \text{etc.}$$

$$\frac{x}{2\cdot 3} - \frac{2x^2}{3\cdot 4} + \frac{3x^3}{4\cdot 5} - \frac{4x^4}{5\cdot 6} + \frac{5x^5}{6\cdot 7} - \frac{6x^6}{7\cdot 8} + \frac{7x^7}{8\cdot 9} - \frac{8x^8}{9\cdot 10} + \frac{9x^9}{10\cdot 11} - \frac{10x^{10}}{11\cdot 12} + \frac{11x^{11}}{12\cdot 13} - \frac{12x^{12}}{13\cdot 14} + \text{etc.} \quad = x\,P^{II}$$

$$P^{II} = \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{2x}{3\cdot 4} + \frac{3x^2}{4\cdot 5} - \frac{4x^3}{5\cdot 6} + \frac{5x^4}{6\cdot 7} - \frac{6x^5}{7\cdot 8} = \frac{7x^6}{8\cdot 9} - \frac{8x^7}{9\cdot 10} + \frac{9x^8}{10\cdot 11} - \text{etc.} \quad \Big| \; \frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{5} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{7} + \frac{x^6}{8} - \frac{x^7}{9} + \frac{x^8}{10} - \frac{x^9}{11} + \frac{x^{10}}{12} - \text{etc.} \quad \Big| \; 3$$

$$\frac{1}{2} - \frac{2\cdot 3x}{3\cdot 4} + \frac{3\cdot 3x^2}{4\cdot 5} - \frac{3\cdot 4x^3}{5\cdot 6} + \frac{3\cdot 5x^4}{6\cdot 7} - \frac{3\cdot 6x^5}{7\cdot 8} + \frac{3\cdot 7x^6}{8\cdot 9} - \frac{3\cdot 8x^7}{9\cdot 10} + \frac{3\cdot 9x^8}{10\cdot 11} - \frac{3\cdot 10x^9}{11\cdot 12} + \frac{3\cdot 11x^{10}}{12\cdot 13} - \text{etc.}$$

$$\frac{2x}{3\cdot 4} - \frac{2\cdot 2x^2}{4\cdot 5} + \frac{2\cdot 3x^3}{5\cdot 6} + \frac{2\cdot 4x^4}{6\cdot 7} - \frac{2\cdot 5x^5}{7\cdot 8} + \frac{2\cdot 6x^6}{8\cdot 9} - \frac{2\cdot 7x^7}{9\cdot 10} + \frac{2\cdot 8x^8}{10\cdot 11} - \frac{2\cdot 9x^9}{11\cdot 12} - \frac{2\cdot 10x^{10}}{12\cdot 13} + \text{etc.} \quad = 2x\,P^{III}$$

$$P^{III} = \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{2x}{4\cdot 5} + \frac{3x^2}{5\cdot 6} - \frac{4x^3}{6\cdot 7} + \frac{5x^4}{7\cdot 8} - \frac{6x^5}{8\cdot 9} + \frac{7x^6}{9\cdot 10} - \frac{8x^7}{10\cdot 11} + \text{etc.} \quad \Big| \; \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{2x}{3\cdot 4} + \frac{3x^2}{4\cdot 5} - \frac{4x^3}{5\cdot 6} + \frac{5x^4}{6\cdot 7} - \frac{6x^5}{7\cdot 8} + \frac{7x^6}{8\cdot 9} - \frac{8x^7}{9\cdot 10} + \frac{9x^8}{10\cdot 11} - \text{etc.} \quad \Big| \; 2$$

$$\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{2\cdot 2x}{4\cdot 5} + \frac{2\cdot 3x^2}{5\cdot 6} - \frac{2\cdot 4x^3}{6\cdot 7} + \frac{2\cdot 5x^4}{7\cdot 8} - \frac{2\cdot 6x^5}{8\cdot 9} + \frac{2\cdot 7x^6}{9\cdot 10} - \frac{2\cdot 8x^7}{10\cdot 11} + \frac{2\cdot 9x^8}{11\cdot 12} - \text{etc.}$$

$$\frac{2x}{3\cdot 4\cdot 5} - \frac{2\cdot 3x^2}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{2\cdot 6x^3}{5\cdot 6\cdot 7} - \frac{2\cdot 10x^4}{6\cdot 7\cdot 8} + \frac{2\cdot 15x^5}{7\cdot 8\cdot 9} - \frac{2\cdot 21x^6}{8\cdot 9\cdot 10} + \frac{2\cdot 28x^7}{9\cdot 10\cdot 11} - \frac{2\cdot 36x^8}{10\cdot 11\cdot 12} + \text{etc.} \quad = 2x\,P^{IV}$$

$$P^{IV} = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} - \frac{3x}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{6x^2}{5\cdot 6\cdot 7} - \frac{10x^3}{6\cdot 7\cdot 8} + \frac{15x^4}{7\cdot 8\cdot 9} - \frac{21x^5}{2\cdot 9\cdot 10} + \frac{28x^6}{9\cdot 10\cdot 11} - \text{etc.} \quad \Big| \; \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{2x}{4\cdot 5} + \frac{3x^2}{5\cdot 6} - \frac{4x^3}{6\cdot 7} + \frac{5x^4}{7\cdot 8} - \frac{6x^5}{8\cdot 9} + \frac{7x^6}{9\cdot 10} - \frac{8x^7}{10\cdot 11} + \text{etc.} \quad \Big| \; 5$$

$$\frac{1}{3\cdot 4} - \frac{3\cdot 5x}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{5\cdot 6x^2}{5\cdot 6\cdot 7} - \frac{5\cdot 10x^3}{6\cdot 7\cdot 8} + \frac{5\cdot 15x^4}{7\cdot 8\cdot 9} - \frac{5\cdot 21x^5}{8\cdot 9\cdot 10} + \frac{5\cdot 28x^6}{9\cdot 10\cdot 11} - \frac{5\cdot 36x^7}{10\cdot 11\cdot 12} + \text{etc.}$$

$$\frac{2x}{4\cdot 5\cdot 6} - \frac{3\cdot 3x^2}{5\cdot 6\cdot 7} + \frac{3\cdot 6x^3}{6\cdot 7\cdot 8} - \frac{3\cdot 10x^4}{7\cdot 8\cdot 9} + \frac{3\cdot 15x^5}{8\cdot 9\cdot 10} - \frac{3\cdot 21x^6}{9\cdot 10\cdot 11} + \frac{3\cdot 28x^7}{10\cdot 11\cdot 12} - \text{etc.} \quad = 3x\,P^{V}$$

$$P^{V} = \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} - \frac{3x}{5\cdot 6\cdot 7} + \frac{6x^2}{6\cdot 7\cdot 8} - \frac{10x^3}{7\cdot 8\cdot 9} + \frac{15x^4}{8\cdot 9\cdot 10} - \frac{21x^5}{9\cdot 10\cdot 11} + \frac{28x^6}{10\cdot 11\cdot 12} - \text{etc.} \quad \Big| \; \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} - \frac{3x}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{6x^2}{5\cdot 6\cdot 7} - \frac{10x^3}{6\cdot 7\cdot 8} + \frac{15x^4}{7\cdot 8\cdot 9} - \frac{21x^5}{8\cdot 9\cdot 10} + \frac{28x^6}{9\cdot 10\cdot 11} - \text{etc.} \quad \Big| \; 2$$

$$\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} - \frac{2\cdot 3x}{5\cdot 6\cdot 7} + \frac{2\cdot 6x^2}{6\cdot 7\cdot 8} - \frac{2\cdot 10x^3}{7\cdot 8\cdot 9} + \frac{2\cdot 15x^4}{8\cdot 9\cdot 10} - \frac{2\cdot 21x^5}{9\cdot 10\cdot 11} + \frac{2\cdot 28x^6}{10\cdot 11\cdot 12} - \text{etc.}$$

$$\frac{3x}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = \frac{3\cdot 4x^2}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \frac{3\cdot 10x^3}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} - \frac{3\cdot 20x^4}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10} + \frac{3\cdot 35x^5}{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11} - \frac{3\cdot 56x^6}{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12} + \text{etc.} \quad = 3x\,P^{VI}$$

$$P^{VI} = \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} - \frac{4x}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \frac{10x^2}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} - \frac{20x^3}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10} + \frac{35x^4}{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11} - \frac{56x^5}{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12} + \frac{84x^6}{10\cdot 11\cdot 12\cdot 13} - \text{etc.} \quad \Big| \; \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} - \frac{3x}{5\cdot 6\cdot 7} + \frac{6x^2}{6\cdot 7\cdot 8} - \frac{10x^3}{7\cdot 8\cdot 9} + \frac{15x^4}{8\cdot 9\cdot 10} - \frac{21x^5}{9\cdot 10\cdot 11} + \text{etc.} \;\ldots \quad \Big| \; 7$$

$$\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} - \frac{7\cdot 4x}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \frac{7\cdot 10x^2}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} - \frac{7\cdot 20x^3}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10} + \frac{7\cdot 35x^4}{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11} - \frac{7\cdot 35x^5}{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12} + \text{etc.} \;\ldots$$

$$\frac{4x}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} - \frac{4\cdot 4x^2}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} + \frac{4\cdot 10x^3}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10} - \frac{4\cdot 20x^4}{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11} + \frac{4\cdot 35x^5}{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12} - \text{etc.} \;\ldots \quad = 4x\,P^{VII}$$

etc. etc.

$$P = \left.\frac{}{\cdot\; 5 \cdot 6} + \frac{x^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{x^8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \text{etc.} \right| 1$$

$$\frac{x^6}{4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{x^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{x^8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} - \text{etc.} = - x P^{I}$$

$$P^{I} = \left.\frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{etc.} \;\ldots \right| 1$$

$$\frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{x^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \text{etc.} \;\ldots$$

$$\frac{6x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{7x^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \text{etc.} \;\ldots = + x P^{II}$$

Table V.

$$P = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\cdot3} + \frac{x^4}{2\cdot3\cdot4} + \frac{x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{x^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{x^7}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{x^8}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \text{etc.}$$

$$\left|\begin{array}{l} 1 \\ 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\cdot3} + \frac{x^4}{2\cdot3\cdot4} + \frac{x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{x^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{x^7}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{x^8}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \text{etc.} \end{array}\right| \; 1$$

$$- x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2\cdot3} - \frac{x^4}{2\cdot3\cdot4} - \frac{x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5} - \frac{x^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} - \frac{x^7}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} - \frac{x^8}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} - \text{etc.} \quad = - x P^{I}$$

$$P^{I} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2\cdot3} + \frac{x^3}{2\cdot3\cdot4} + \frac{x^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{x^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{x^7}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \text{etc.}$$

$$\left|\begin{array}{l} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\cdot3} + \frac{x^4}{2\cdot3\cdot4} + \frac{x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{x^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{x^7}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \text{etc.} \\ 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2\cdot3} + \frac{x^3}{2\cdot3\cdot4} + \frac{x^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{x^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{x^7}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \text{etc.} \end{array}\right| \; 1$$

$$+ \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{2\cdot3} + \frac{3x^3}{2\cdot3\cdot4} + \frac{4x^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{5x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{6x^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{7x^7}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \text{etc.} \quad = + x P^{II}$$

$$P^{II} = \frac{1}{2} + \frac{2x}{2\cdot3} + \frac{3x^2}{2\cdot3\cdot4} + \frac{4x^3}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{5x^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{6x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{7x^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \text{etc.}$$

$$\left|\begin{array}{l} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2\cdot3} + \frac{x^3}{2\cdot3\cdot4} + \frac{x^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{x^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \text{etc.} \\ 1 + \frac{4x}{2\cdot3} + \frac{6x^2}{2\cdot3\cdot4} + \frac{8x^3}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{10x^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{12x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{14x^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \text{etc.} \end{array}\right| \; 2$$

$$- \frac{x}{2\cdot3} - \frac{2x^2}{2\cdot3\cdot4} - \frac{3x^3}{2\cdot3\cdot4\cdot5} - \frac{4x^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} - \frac{5x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} - \frac{6x^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} - \text{etc.} \quad = - x P^{III}$$

$$P^{III} = \frac{1}{2\cdot3} + \frac{2x}{2\cdot3\cdot4} + \frac{3x^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{4x^3}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{5x^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{6x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \text{etc.}$$

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{2x}{2\cdot3} + \frac{3x^2}{2\cdot3\cdot4} + \frac{4x^3}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{5x^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{6x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \text{etc.} \\ \frac{1}{2} + \frac{3\cdot2x}{2\cdot3\cdot4} + \frac{3\cdot3x^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{3\cdot4x^3}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{3\cdot5x^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{3\cdot6x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \text{etc.} \end{array}\right| \; 3$$

$$+ \frac{2x}{2\cdot3\cdot4} + \frac{6x^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{12x^3}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{20x^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{30x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \text{etc.} \quad = + 2x P^{IV}$$

$$P^{IV} = \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{3x}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{6x^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{10x^3}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{15x^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \text{etc.}$$

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{2\cdot3} + \frac{2x}{2\cdot3\cdot4} + \frac{3x^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{4x^3}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{5x^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \text{etc.} \\ \frac{1}{2\cdot3} + \frac{4\cdot3x}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{4\cdot6x^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{4\cdot10x^3}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{4\cdot15x^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \text{etc.} \end{array}\right| \; 4$$

$$- \frac{2x}{2\cdot3\cdot4\cdot5} - \frac{6x^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} - \frac{12x^3}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} - \frac{24x^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} - \text{etc.} \quad = - 2x P^{V}$$

$$P^{V} = \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{3x}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{6x^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{10x^3}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \text{etc.}$$

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{3x}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{6x^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{10x^3}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \text{etc.} \\ \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{6\cdot3x}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{5\cdot6x^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{5\cdot10x^3}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \text{etc.} \end{array}\right| \; 5$$

$$+ \frac{3x}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{12x^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{30x^3}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \text{etc.} \quad = + 3x P^{VI}$$

$$P^{VI} = \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{4x}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{10x^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \frac{20x^3}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9} + \text{etc.}$$

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{3x}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{6x^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{10x^3}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \text{etc.} \\ \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{6\cdot4x}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{6\cdot6x^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \frac{6\cdot10x^3}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9} + \text{etc.} \end{array}\right| \; 6$$

$$- \frac{3x}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} - \frac{12x^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} - \frac{6\cdot10x^3}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9} - \text{etc.} \quad = - 3x P^{VII}$$

$$P^{VII} = \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{4x}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \frac{10x^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9} + \text{etc.}$$

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{4x}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{10\cdot x^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \text{etc.} \\ \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{7\cdot4x}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \frac{7\cdot10x^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9} + \text{etc.} \end{array}\right| \; 7$$

$$+ \frac{4x}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \frac{4\cdot5x^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9} + \text{etc.} \quad = 4x P^{VIII}$$

et ainsi de suite.

$P = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2}{3}$ … $\frac{2 \cdot 691\, x^{10}}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \text{etc.}$ | 1

… $\frac{2 \cdot 691\, x^{10}}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} - \text{etc.} = -x^2 P^{I}$

$P^{I} = \frac{1}{3} + \frac{2x^2}{3 \cdot 5}$ … $\frac{31\, x^8}{\cdot\, 5 \cdot 7 \cdot 9} + \text{etc.}$ | 3

… $\frac{691\, x^8}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \text{etc.}$

… $\frac{368\, x^8}{5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} - \text{etc.} = -x^2 P^{II}$

$P^{II} = \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 691\, x^8}{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \text{etc.}$ | 5

etc. . . . . .

etc. . . . . . $= -x^2 P^{III}$

$P^{III} = \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot}$ . . . . . . | 7

. . . . . .

. . . . . . $= -x^2 P^{IV}$

$P^{IV} = \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot}$ . . . . . . | 9

. . . . . .

. . . . . . $= -x^2 P^{V}$

Table VI.

$$P = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{3\cdot 5} + \frac{17x^6}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \frac{2\cdot 31x^8}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \frac{2\cdot 691x^{10}}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} + \text{etc.}$$

$$1 \quad \Big| \quad 1$$

$$1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{3\cdot 5} + \frac{17x^6}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \frac{2\cdot 31x^8}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \frac{2\cdot 691x^{10}}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} + \text{etc.}$$

$$-\frac{x^2}{3} - \frac{2x^4}{3\cdot 5} - \frac{17x^6}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7} - \frac{2\cdot 31x^8}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} - \frac{2\cdot 691x^{10}}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} - \text{etc.} = -x^2 P^{I}$$

$$P^{I} = \frac{1}{3} + \frac{2x^2}{3\cdot 5} + \frac{17x^4}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \frac{2\cdot 31x^6}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \frac{2\cdot 691x^8}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} + \text{etc.}$$

$$1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{3\cdot 5} + \frac{17x^6}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \frac{2\cdot 31x^8}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \text{etc.} \quad \Big| \quad 3$$

$$1 + \frac{2x^2}{5} + \frac{17x^4}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{62x^6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \frac{2\cdot 691x^8}{3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} + \text{etc.}$$

$$-\frac{x^2}{3\cdot 5} - \frac{3x^4}{3\cdot 5\cdot 7} - \frac{11x^6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} - \frac{2\cdot 368x^8}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} - \text{etc.} = -x^2 P^{II}$$

$$P^{II} = \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{3x^2}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{11x^4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \frac{2\cdot 368x^6}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2x^2}{3\cdot 5} + \frac{17x^4}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \frac{2\cdot 31x^6}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \frac{2\cdot 691x^8}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} + \text{etc.} \quad \Big| \quad 5$$

$$\frac{1}{3} + \frac{5x^2}{5\cdot 7} + \frac{5\cdot 11x^4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \frac{2\cdot 368x^6}{3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} + \text{etc.} \ldots$$

$$-\frac{x^2}{3\cdot 5\cdot 7} - \frac{4x^4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} - \frac{2\cdot 27x^6}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} - \text{etc.} \ldots = -x^2 P^{III}$$

$$P^{III} = \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{4x^2}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \frac{2\cdot 27x^4}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{3\cdot 5} + \frac{x^2}{5\cdot 7} + \frac{11x^4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \text{etc.} \ldots \quad \Big| \quad 7$$

$$\frac{1}{3\cdot 5} + \frac{4x^2}{3\cdot 5\cdot 9} + \frac{2\cdot 27x^4}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} + \text{etc.} \ldots$$

$$-\frac{x^2}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} - \frac{5x^4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} - \text{etc.} \ldots = -x^2 P^{IV}$$

$$P^{IV} = \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \frac{5x^2}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} + \text{etc.} \ldots$$

$$\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{4x^2}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \text{etc.} \ldots \quad \Big| \quad 9$$

$$\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{5x^2}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 11} + \text{etc.} \ldots$$

$$-\frac{x^2}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} - \text{etc.} \ldots = -x^2 P^{V}$$

et ainsi de suite.

$$p^{I} = 1 - \frac{x^2}{2.\ 3} + \frac{x^8}{2\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8} - \frac{x^{10}}{2.\ 3.\ 4.\ 5\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ 10} + \text{etc.} \quad \Big|\ 1$$

$$\frac{x^8}{.5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9} - \frac{x^{10}}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9\ 1.\ 10\ 11} + \text{etc.}$$

$$\frac{x^8}{4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 9} - \frac{x^{10}}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ 11} + \text{etc.} = -x^2\, p^{II}$$

$$p^{II} = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{2.\ 3.\ 5} + \frac{x^6}{2\ .\ 5.\ 6.\ 7} + \frac{x^8}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9} - \text{etc.} \quad \Big|\ 3$$

$$\frac{x^6}{5.\ 6.\ 7.\ 9} + \frac{3\,x^8}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ 11} - \text{etc.}$$

$$\frac{x^6}{.\ 5.\ 7.\ 9} + \frac{x^8}{2.\ 3.\ 4.\ 5\ 6.\ 7.\ 9.\ 11} - \text{etc.} = -x^2\, p^{III}$$

$$p^{III} = \frac{1}{3.\ 5} - \frac{\ }{2.\ 3} \frac{x^6}{.\ 5.\ 6.\ 7.\ 9} + \frac{x^8}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ 11} - \text{etc.} \quad \Big|\ 5$$

$$\frac{5\,x^6}{5.\ 6.\ 7.\ 9.\ 11} + \frac{5\,x^8}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ 11.\ 13} - \text{etc.}$$

$$\frac{x^6}{5.\ 6.\ 7.\ 9.\ 11} + \frac{x^8}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13} - \text{etc.} = -x^2\, p^{IV}$$

$$p^{IV} = \frac{1}{3.\ 5.\ 7} - \frac{x}{2.\ 3.\ 5\ 7.\ 9} - \frac{7\,x^6}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 9.\ 11} + \text{etc.} \quad \Big|\ 7$$

$$\frac{\ }{.\ 11} - \frac{7\,x^6}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13} + \text{etc.}$$

$$\frac{\ }{.\ 11} - \frac{x^6}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13} + \text{etc.} = -x^2\, p^{V}$$

$$p^{V} = \frac{1}{3.\ 5.\ 7.\ 9} - \frac{x^4}{2\ 3.\ 4.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11} - \text{etc.} \ldots \quad \Big|\ 9$$

$$\frac{9\,x^4}{4.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13} - \text{etc.} \ldots$$

$$\frac{x^4}{3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13} - \text{etc.} \ldots = -x^2\, p^{VI}$$

$$p^{VI} = \frac{1}{3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11} - \text{etc.} \ldots \quad \Big|\ 11$$

$$\text{etc.} \ldots$$

$$\text{etc.} \ldots = -x^2\, p^{VII}$$

Table VII.

$$p^{I} = 1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4.5} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6.7} + \frac{x^8}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \text{etc.}$$

$$\begin{array}{l|l} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \frac{x^8}{2.3.4.5.6.7.8} - \frac{x^{10}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10} + \text{etc.} & 1 \\ 1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4.5} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6.7} + \frac{x^8}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \frac{x^{10}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11} + \text{etc.} & \\ \hline - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{2.3.5} - \frac{x^6}{2.3.4.5.7} + \frac{x^8}{2.3.4.5.6.7.9} - \frac{x^{10}}{2.3.4.5.6.7.8.9.11} + \text{etc.} = - x^2 p^{II} & \end{array}$$

$$p^{II} = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{2.3.5} + \frac{x^4}{2.3.4.5.7} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6.7.9} + \frac{x^8}{2.3.4.5.6.7.8.9.11} - \text{etc.}$$

$$\begin{array}{l|l} 1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4.5} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6.7} + \frac{x^8}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \text{etc.} & 3 \\ 1 - \frac{3x^2}{2.3.5} + \frac{3x^4}{2.3.4.5.7} - \frac{3x^6}{2.3.4.5.6.7.9} + \frac{3x^8}{2.3.4.5.6.7.8.9.11} - \text{etc.} & \\ \hline - \frac{x^2}{3.5} + \frac{x^4}{2.3.5.8} - \frac{x^6}{2.3.4.5.7.9} + \frac{x^8}{2.3.4.5.6.7.9.11} - \text{etc.} = - x^2 p^{III} & \end{array}$$

$$p^{III} = \frac{1}{3.5} - \frac{x^2}{2.3.5.7} + \frac{x^4}{2.3.4.5.7.9} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6.7.9.11} + \text{etc.}$$

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{3} - \frac{x^2}{2.3.5} + \frac{x^4}{2.3.4.5.7} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6.7.9} + \frac{x^8}{2.3.4.5.6.7.8.9.11} - \text{etc.} & 5 \\ \frac{1}{3} - \frac{5x^2}{2.3.5.7} + \frac{5x^4}{2.3.4.5.7.9} - \frac{5x^6}{2.3.4.5.6.7.9.11} + \frac{5x^8}{2.3.4.5.6.7.8.9.11.13} - \text{etc.} & \\ \hline - \frac{x^2}{3.5.7} + \frac{x^4}{2.3.5.7.9} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6.7.9.11} + \frac{x^8}{2.3.4.5.6.7.9.11.13} - \text{etc.} = - x^2 p^{IV} & \end{array}$$

$$p^{IV} = \frac{1}{3.5.7} - \frac{x^2}{2.3.5.7.9} + \frac{x^4}{2.3.4.5.7.9.11} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6.7.9.11.13} + \text{etc.}$$

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{3.5} - \frac{7x^2}{2.3.5.7} + \frac{7x^4}{2.3.4.5.7.9} - \frac{7x^6}{2.3.4.5.6.7.9.11} + \text{etc.} & 7 \\ \frac{1}{3.5} - \frac{7x^2}{2.3.5.7.9} + \frac{7x^4}{2.3.4.5.7.9.11} - \frac{7x^6}{2.3.4.5.6.7.9.11.13} + \text{etc.} & \\ \hline - \frac{x^2}{3.5.7.9} + \frac{x^4}{2.3.5.7.9.11} - \frac{x^6}{2.3.4.5.7.9.11.13} + \text{etc.} = - x^2 p^{V} & \end{array}$$

$$p^{V} = \frac{1}{3.5.7.9} - \frac{x^2}{2.3.5.7.9.11} + \frac{x^4}{2.3.4.5.7.9.11.13} - \text{etc.} \ldots$$

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{3.5.7} - \frac{x^2}{2.3.5.7.9} + \frac{x^4}{2.3.4.5.7.9.11} - \text{etc.} \ldots & 9 \\ \frac{1}{3.5.7} - \frac{9x^2}{2.3.5.7.9.11} + \frac{9x^4}{2.3.4.5.7.9.11.13} - \text{etc.} \ldots & \\ \hline - \frac{x^2}{2.5.7.9.11} + \frac{x^4}{2.3.5.7.9.11.13} - \text{etc.} \ldots = - x^2 p^{VI} & \end{array}$$

$$p^{VI} = \frac{1}{3.5.7.9.11} - \frac{x^2}{2.3.5.7.9.11.13} + \text{etc.} \ldots$$

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{3.5.7.9} - \frac{x^2}{2.3.5.7.9.11} + \text{etc.} \ldots & 11 \\ \frac{1}{3.5.7.9} - \frac{11x^2}{2.3.5.7.9.11.13} + \text{etc.} \ldots & \\ \hline - \frac{x^2}{3.5.7.9.11.13} + \text{etc.} \ldots = - x^2 p^{VII} & \end{array}$$

et ainsi de suite.

ESSAI

D'UNE SYNTHÈSE DES ÉQUATIONS DU CINQUIÈME DÉGRÉ;

PAR

GUILLAUME THÉOPHILE FRÉDERIC BEITLER,

Professeur des Mathématiques au Collège académique de Mitau, dans le Gouvernement de Courlande.

Présenté à la Conférence le 28. Nov. 1802.

Soit $\varrho^5 = 1$, ou ϱ une des cinq valeurs différentes de $\sqrt[5]{1}$, et l'équation *universelle* du cinquième dégré

$$\odot)\quad x^5 * - 5\,B\,x^3 - 5\,C\,x^2 - 5\,D\,x - E = 0.$$

Supposons maintenant cette forme des cinq racines

$$☾)\quad x = \varrho\sqrt[5]{p^2q^3r^4a^6} + \varrho^2\sqrt[5]{p^4q^6r^3a^2} + \varrho^3\sqrt[5]{p^6q^4r^2a^3} + \varrho^4\sqrt[5]{p^3q^2r^6a^4}$$

et on trouvera par le calcul l'équation suivante du cinquième dégré :

$$♂)\quad x^5 * \left.\begin{array}{l} -5\,p\,q\,r^2\,a^2 \\ -5\,p^2\,q^2\,r\,a \end{array}\right\} x^3 \left.\begin{array}{l} -5\,p^2\,q^3\,r^2\,a^2 \\ 5\,p^2\,q^2\,r^2\,a^3 \\ -5\,p^2\,q^2\,r^3\,a^2 \\ -5\,p^3\,q^2\,r^2\,a^2 \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} +5\,B^2 \\ -15\,p^3\,q^3\,r^3\,a^3 \\ -5\,p^3\,q^2\,r^4\,a^3 \\ -5\,p^2\,q^3\,r^3\,a^4 \\ -5\,p^4\,q^3\,r^2\,a^3 \\ -5\,p^3\,q^4\,r^3\,a^2 \end{array}\right\} x \begin{array}{l} -p^2\,q^3\,r^4\,a^6 \\ -p^4\,q^6\,r^3\,a^2 \\ -p^6\,q^4\,r^2\,a^3 \\ -p^3\,q^2\,r^6\,a^4 \\ -5\,B\,C \\ +10\,C\,p^2\,q^2\,r\,a \\ -10\,p^3q^3r^3a^3(a+r)(pq-ra) \end{array} = 0$$

Il est évident 1) que cette équation ♂) est *universelle*, et ne suppose point quelque relation déterminée entre les coefficiens; 2) que ses coefficiens seront toujours *réels* et *rationnels*, pourvu qu'on suppose pour p, q, r et a des valeurs quelconques *réelles*

et

et *rationnelles.* 3) Que l'équation radicale (☾) du premier dégré, à cause des cinq valeurs differentes de ϱ, nous fournit exactement les mêmes cinq racines que l'équation (♂) du cinquième Degré.

Exemple I.

Mettons $p = q = r = a = 1$ nous aurons en substituant ces valeurs

$$x = \varrho\sqrt[5]{1} + \varrho^2\sqrt[5]{1} + \varrho^3\sqrt[5]{1} + \varrho^4\sqrt[5]{1} = \varrho + \varrho^2 + \varrho^3 + \varrho^4$$

et $x^5 * - 10\,x^3 - 20\,x^2 - 15\,x - 4 = 0$

ou $x^5 * - 5.2\,x^3 - 5.4\,x^2 - 5.3\,x - 4 = (x-4)(x+1)^4 = 0.$

En effet, quand on mèt $\varrho = \sqrt[5]{1} = 1$ on aura $x = 1+1+1+1 = 4.$ Supposant au contraire dans l'équation $x = \varrho + \varrho^2 + \varrho^3 + \varrho^4$ une des quatre valeurs imaginaires de ϱ, telle qu'on voudra choisir, on aura $x = \frac{\varrho - {}^{5}\varrho}{\varrho - 1} = \frac{1-\varrho}{\varrho-1} = -1.$ L'équation du premier dégré nous donne donc toutes les cinq racines *réelles* de l'équation du cinquième dégré, en substituant successivement pour ϱ ses cinq valeurs differentes.

Exemple II.

Soit $p = +1$; $q = -1$; $r = +2$; $a = +3$; nous aurons les deux équations

☾) $x = \varrho\sqrt[5]{72} + 2\varrho^2\sqrt[5]{162} - 3\varrho^3\sqrt[5]{48} + \varrho^4\sqrt[5]{108}$

♂) $x^5 * + 150\,x^3 - 900\,x^2 + 9000\,x - 31500 = 0.$

Pour vérifier la seule racine réelle, qui a lieu dans notre exemple, je me suis servi des logarithmes, qui me donnerent

+

$$+\sqrt[5]{72} = + 2{,}352158;\quad + 2\sqrt[5]{162} = + 5{,}532647;$$
$$+\sqrt[5]{108} = 2{,}550849;\quad - 3\sqrt[5]{48} = - 6{,}506830.$$

On aura donc en mettant $\varrho = 1$ la dite racine réelle

$$x = + 10{,}435654 - 6{,}506830 = + 3{,}928824 \ldots$$

Or $x^5 =$	$+ 936{,}07$
$+ 150\ x^3 =$	$+ 9096{,}56$
$+ 9000\ x =$	$+ 35359{,}36$
	$+ 45391{,}99$
$- 31500 =$	$- 31500{,}00$
$- 900\ x^2 =$	$- 13892{,}05$
	$- 45392{,}05$

Différence $=$ — 0,06 qu'on doit regarder ici comme $= 0$.

et puisque la quantité ϱ de l'équation radicale ☾) s'évanouit dans l'equation ♂) il est évident, que les quatre racines imaginaires, indiquées par la dite équation radicale, quand on y substitue successivement les quatre valeurs imaginaires de ϱ, satisferont également à l'équation du cinquième degré, comme la racine réelle, qui suppose $\varrho = 1$. La formule ☾) de l'équation radicale peut être variée d'une infinité de manières. Pour donner quelqu'exemple d'une telle variation, je me proposerai ici le problême suivant: Trouver les racines de l'équation numerique $x^5 * * * - 5\,D\,x - E = 0$, pour le cas, quand dans l'équation radicale $x = \varrho\sqrt[5]{\alpha} + \varrho^2\sqrt[5]{\beta} + \varrho^3\sqrt[5]{\gamma} + \varrho^4\sqrt[5]{\delta}$ les quantités α, β, γ, δ, sont des nombres rationnels et entiers. Le cas des valeurs rationnelles mais fractionnaires de ces quantités n'est guères plus difficile.

Supposons la racine cherchée

$$x = -p_{5}\sqrt[5]{\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 a} + p_{5}^{2}\sqrt[5]{\left(\frac{a-1}{a+1}\right) a^2} - p_{5}^{3}\sqrt[5]{\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^4 a^3} - p_{5}^{4}\sqrt[5]{\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 a^4}$$

il en résultera l'équation à coefficiens réels et rationnels

$$x^5 * * * - \frac{5p^4 a(a-1)(a^4 - 5a^3 * + ?a - 1)}{(a+1)^3} x$$
$$+ \frac{p^5 a(a-1)(a^2+1)(a^4 + 22a^3 - 6a^2 - 22a + 1)}{(a+1)^4} = 0.$$

On obtiendra premièrement

$$♀)\ p = \frac{-E(a+1)(a-1)(a^3 - 4a^2 - 4a - 1)}{D(a^2+1)(a^4 + 22a^3 - 6a^2 - 22a + 1)} \text{ et } p^4 = \frac{D(a+1)^3}{a(a-1)^2(a^3 - 4a^2 - 4a - 1)}$$

et ensuite

$$♃)\ E^4 a(a+1)(a-1)^6 (a^3 - 4a^2 - 4a - 1)^5$$
$$= D^5 (a^2+1)^4 (a^4 + 22a^3 - 6a^2 - 22a + 1)^4.$$

Quoique cette dernière équation monte au 24me dégré, la forme sous laquelle elle est présentée facilite le moyen de trouver aisément la valeur de a, quand elle s'exprime par un nombre entier, ou au moins rationnel; et puisque, comme l'on voit, a et p sont nécessairement des facteurs de D et de E, il n'y aura que ces mêmes facteurs dont on fera l'essai, pour examiner s'ils satisfont à l'équation ♃.

Exemple III.

Soit l'équation numérique proposée à resoudre $x^5 * * * + 330x + 4170 = 0$. Puisque $D = -66 = -3.2.11$ et $E = -3.2.5.139$ nous remarquons premièrement, que ces deux quantités ont en effet des facteurs communs, savoir les nombres 2 et 3. En mettant donc pour premier essai $a =$ au facteur 3, commun à D et à E, l'equation ♃ se change en cette égalité

$$-3^4.2^4.5^4.139^4.4.2^6.22^5.3 = -3^5.2^5.11^5.10^4.556^4.$$

ou

ou puisque $556 = 4 . 139$

$$2^{17} . 3^5 . 5^4 . 11^5 . 139^4 = 2^{17} . 3^5 . 5^4 . 11^5 . 139^4 .$$

ce qui nous montre, que la valeur de a est en effet $= + 3$. En substituant maintenant cette valeur trouvée dans l'équation ♀, on obtient

$$p = \frac{3 . 2 . 5 . 139 . 4 . 2 . 22}{3 . 2 . 11 . 10 . 4 . 139} = + 2 ;$$

Les racines cherchées de l'équation proposée seront donc exprimées par

$$x = - 2 \varrho \sqrt[5]{(\tfrac{2}{4})^3 3} + 2 \varrho^2 \sqrt[5]{\tfrac{2}{4} . 9} - 2 \varrho^3 \sqrt[5]{(\tfrac{2}{4})^4 . 27} - 2 \varrho^4 \sqrt[5]{(\tfrac{2}{4})^2 81}$$

ou $x = - \varrho \sqrt[5]{2^2 . 3} + \varrho^2 \sqrt[5]{2^4 . 3^2} - \varrho^3 \sqrt[5]{2 . 3^3} - \varrho^4 \sqrt[5]{2^3 . 3^4}$

ou enfin $x = - \varrho \sqrt[5]{12} + \varrho^2 \sqrt[5]{144} - \varrho^3 \sqrt[5]{54} - \varrho^4 \sqrt[5]{648}$

en mettant $\varrho = + 1$, on trouvera la racine réelle, qu'on vérifiera aisément moyennant les logarithmes, qui nous donnent

$$\begin{aligned} - \sqrt[5]{12} &= - 1,643751 \\ - \sqrt[5]{54} &= - 2,220643 \\ - \sqrt[5]{648} &= - 3,650186 \\ \hline &\; - 7,514580 \\ + \sqrt[5]{144} &= + 2,701920 \\ \hline x &= - 4,812660 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } x^5 &= - 2581,820 \\ + 330\, x &= - 1588,178 \\ \hline &\; - 4169,998 \\ + 4170 &= + 4170,000 \\ \hline \text{Differ.} &= \quad + 0,002 \end{aligned}$$

On pourroit encore démander, pourquoi je n'ai pas supposé cette forme des racines

$$x = \varrho \sqrt[5]{p^4 q^2 r^3 a} + \varrho^2 \sqrt[5]{p^3 q^4 r a^2} + \varrho^3 \sqrt[5]{p^2 q r^4 a^3} + \varrho^4 \sqrt[5]{p q^3 r^2 a^4}$$

qui paroît plus simple que celle, que j'ai adoptée au commen-

ce-

cement de ce mémoire sous la marque ☾. Mais on observera, que ces quatre termes sont en progression geometrique, et que par conséquent les quatre quantités inconnues p, q, r, a, ne sauroient être determinées par les quatre quantites B, C, D, E, qu'on connoît par les coefficiens de l'équation à resoudre. En effet, cette supposition conduit à une équation seulement particulière du cinquième dégré, et à une relation entre les coefficiens, qui s'exprime par l'égalité suivante

$$C^4 + 25 B^3 C^2 + 6 B^2 CE + BE^2 - (7 BC^2 + CE)(D + 5 B^2)$$
$$- 4 B^2 (D + 5 B^2)^2 + (D + 5 B^2)^3 = 0$$

en supposant, que l'équation numérique à résoudre soit exprimée ainsi

$$x^5 * - 10 B x^3 - 5 C x^2 - 5 D x - E = 0.$$

On a dans ce cas les quatre équations

$$1)\ pqra = B;\quad 2)\ (q + r)(p + a) = \tfrac{C}{B};$$
$$3)\ qr(a^2 + p^2) + pa(q^2 + r^2) = \tfrac{D + B^2}{B};$$
$$4)\ qr(p^3 r + q a^3) + pa(p q^3 + r^3 a) = \tfrac{E}{B};$$

qui à cause de la relation trouvée entre les coefficiens sont réduites a trois seulement. On pourra donc au dit cas particulier supposer la somme $p + a$ égale à une valeur quelconque arbitrairement choisie, par exemple $p + a = b$, ou b represente tel nombre qu'on voudra excepté le zero. Par l'équation

$$B^3 (p + a)^4 + C^2 p^2 a^2 = B (D + 5 B^2)(p + a)^2 pa \text{ ou}$$
$$B^3 b^4 + C^2 p^2 a^2 = B (D + 5 B^2) b^2 \cdot pa$$

qui se déduit aisément des précedentes, on détermine le produit pa, d'ou nous tirons ensuite moyennant une équation qua-

dra-

dratique les valeurs de p et a. Enfin par les équations 1. et 2. on parviendra de même aux valeurs des quantités q et r, et en substituant ces valeurs trouvées dans l'équation radicale supposée, on aura toutes les racines de l'équation particulière du cinquième dégré, ou la rélation supposée entre les coefficiens avoit lieu.

J'ai examiné, si outre les équations connues, que *de Moivre* a résolues, il y en avoit d'autres du cinquième dégré, dont les racines puissent être représentées par deux termes seulement. La methode dont je fis usage me prouva, qu'il y avoit en effet *un seul autre cas*, et que c'étoit celui de l'équation $x^5 * * - 5\,C\,x^2 - 5\,D\,x = \frac{C^4 + D^3}{CD}$ dont les cinq racines sont exprimées par

$$x = \varrho \sqrt[5]{\frac{D^2}{C}} + \varrho^2 \sqrt[5]{\frac{C^3}{D}}$$

Exemple. Soit l'équation numérique $x^5 * * - 20\,x^2 + 25\,x + \frac{131}{20} = 0.$ Nous aurons $C = +4$; $D = -5$; et $x = \varrho \sqrt[5]{\frac{25}{2}} - \varrho^2 \sqrt[5]{\frac{64}{5}}$. La racine réelle exprimée en parties décimales sera donc

$$x = +1{,}44270 - 1{,}66511 = -0{,}22241$$

$$\begin{array}{rl}
\text{et } x^5 = & -\ 0{,}0005 \\
-\ 20\,x^2 = & -\ 0{,}9893 \\
+\ 25\,x = & -\ 5{,}5602 \\
\hline
 & \quad 6{,}5500 \\
+\ \frac{131}{20} = & +\ 6{,}5500 \\
\hline
\text{Differ.} = & \ 0{,}0000.
\end{array}$$

La

La formule pour le cas particulier publié par *de Moivre* répré-sentera aussi toutes les cinq racines, en y introduisant la quantité ϱ. Mais il faudra l'exprimer ainsi $x = \varrho \sqrt[5]{\alpha} + \varrho^4 \sqrt[5]{\beta}$, ou aussi $x = \varrho^2 \sqrt[5]{\alpha} + \varrho^3 \sqrt[5]{\beta}$ mais nullement $x = \varrho \sqrt[5]{\alpha} + \varrho^2 \sqrt[5]{\beta}$, laquelle expression ne convient qu'au cas que nous venons de resoudre.

L'illustre Coryphée des Géomètres du siècle passé, s'occupa deja en 1738 du calcul, qui fait l'objet principal de ce petit Essai. Dans le Tome VI. *Comment. Acad. Scient. Imp. Petrop.* il dit page 230. dans un de ses Mémoires:

„ Suspicor autem posito $x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B} + \sqrt[5]{C} + \sqrt[5]{D}$
„ aequationem rationalem posse concinnari, in qua x plu-
„ res quam quinque non habeat dimensiones, *etiamsi hoc*
„ *fere impossibile videatur.* — Aliis autem, quos hujus-
„ modi occupationes juvant, hanc rem perficiendam, vel
„ mihi ad aliud tempus, relinquo; hoc solo nunc contentus,
„ me fortasse idoneam atque genuinam viam ostendisse etc."

Je ne connois point de Géomètre, qui depuis ce temps la ait rien publié à ce sujet, et puisque l'idée, que j'ai eu d'introduire la quantité ϱ dans l'expression de la racine, me paroît non seulement nouvelle, mais aussi propre à répandre beaucoup de jour sur la théorie génerale des équations et de leurs racines; j'ai cru pouvoir préalablement communiquer cet essai, quoiqu'encore très imparfait, à l'Academie Impériale des Sciences. Je me reserve, qu'aussitôt que les occupations différentes et multipliées, dont je suis surchargé depuis quelques années, me laisseront quelque loisir, je reprenne le fil de ces recherches.

En

En suivant quelques traces, qui m'ont deja conduit à des résolutions des équations cubiques et biquadratiques, différentes de celles qu'on a jusqu'à présent connues, et plus générales, j'ai quelque lieu d'espérer, que ma peine ne sera pas tout à fait perdue, et que j'en retirerai au moins quelques fruits utiles pour l'Analyse des équations, qui passent le quatrième dégré, et dont la Théorie n'est encore rien moins, que dans un état de perfection, tel qu'on pourroit le souhaiter. En attendant je me contente d'avoir démontré, que l'équation radicale $x = \varrho \sqrt[5]{\alpha} + \varrho^2 \sqrt[5]{\beta} + \varrho^3 \sqrt[5]{\gamma} + \varrho^4 \sqrt[5]{\delta}$ modifiée comme on a vu ci-dessus, et qui sans cette modification représenteroit la racine d'une équation *particulière* du 5^4me ou 625me dégré, exprime en effet toutes les cinq racines de l'équation *universelle* du cinquième dégré, comme le célèbre savant, que je viens de citer, l'a conjecturé, quoiqu'il déclarât en même temps comme prèsqu' impossible le calcul, dont je suis pourtant heureusement venu à bout. Il ne faut désespérer de rien en fait d'Analyse, et ne point se rébuter, quand les premiers succès ne répondent pas à notre attente.

DE CURVA LOXODROMICA
IN CORPORE QUOVIS ROTUNDO DESCRIPTA

AUCTORE

F. T. SCHUBERT.

Conventui exhibita die 9. Martii 1803.

§ 1.

Curvae *Loxodromicae*, quae in arte praesertim nautica maximi est momenti, natura in eo consistit, quod omnes solidi Meridianos sub angulo secat constante. Supponit itaque *Meridianos* h. e. *Polum* atque centrum vel axem corporis, quippe plani per duo ista puncta sive per axem corporis quomodocunque positi cum solidi superficie intersectio Meridianum gignit. Omne vero corpus, in quo axem assignare potes, tanquam ortum e rotatione circa hunc axem considerare licet, unde non nisi in corpore *rotundo* concipi posse *Loxodromiam* sequitur; corpus autem hinc excludi nullum, dummodo sit rotundum, sive uno sive pluribus praeditum sit polis, cujuscunque denique indolis fuerit curva generatrix seu Meridianus, facile patet. Quamobrem curvam Loxodromicam examini subjicere sic generali, propositum mihi est, quo absoluto aequatio, quae redundabit, generalis ad quemvis casum specialem absque difficultate poterit adplicari: id quod in curvis nonnullis notabilioribus, in primis Conisectionibus, ostendisse juvabit.

§ 2.

§. 2. Revoluta curva quapiam PMD (Fig. I.) circa lineam PC tanquam axem, orietur solidum rotundum, cujus in superficie descripta sit curva Loxodromica LMX, quae itaque Meridianos PL, PM, PX, sub angulo secat constante PMX, quem ponamus $= \alpha$. Per quodpiam ejus punctum M, aliudque eidem infinite propinquum m ducantur Meridiani PMD, Pmd, et per aliud quodcunque punctum L ponatur planum LCD ad axem PC normale. Posito insuper per punctum M plano MNn priori LCD parallelo, quod secet superficiem solidi in Mn, erit per naturam rotundorum tam LDd quam Mn arcus circularis, qualiscunque sit figura curvae PMD. E punctis denique M, m, n, demittantur perpendicula MB, mb, nc, in planum LCD, quae lineis CD, Cd, Nn, normaliter occurrere constat; appelletur denique angulus LCD $= \Phi$, CB $=$ NM $= u$, PN $= v$, BM $= z$, atque linea data CL $=$ CD $= c$, PC $= a$. Quibus praemissis erit Tab. II. Fig. 1.

$$\text{MN}n = \text{DC}d = \partial\Phi,\ \text{M}n = u\partial\Phi,\ \text{C}c = \text{N}n = u,$$
$$bc = n\mu = -\partial u,\ m\mu = \partial z = -\partial v,$$
$$mn = \sqrt{(\partial u^2 + \partial z^2)} = \sqrt{(\partial u^2 + \partial v^2)},$$

atque ob angulum PMX $= \alpha$, aequatio ad Loxodromiam generalis erit:

$$mn = \text{M}n \cot.\ \alpha,\ \text{h. e. I.}\ \sqrt{(\partial u^2 + \partial z^2)} = u\partial\Phi \cot.\ \alpha.$$

§ 3. Qualiscunque jam sit curvae PMD natura, semper eam exprimere licet aequatione inter coordinatas orthogonales PN $= a - z = v$, et NM $= u$. Est igitur u functio ipsius z data, quam ponamus $= Z$; atque sic ope ejusdem aequationis ad curvam PMD, differentiando reperitur $\partial u = \mathfrak{Z}\partial z$, ubi qui-

 dem

dem $\mathfrak{Z}$ iterum est functio ipsius z: quibus substitutis hanc nanciscimur aequationem Loxodromiae naturam generaliter definientem

$$\partial\Phi = \frac{\partial z \,\text{tang.}\, \alpha \sqrt{(1+\mathfrak{Z}^2)}}{z}, \text{ sive II. } \Phi = \text{tang.}\, \alpha \int \frac{\partial z \sqrt{(1+\mathfrak{Z}^2)}}{z}$$

ubi variabiles jam sunt separatae. Quomodo hinc Loxodromiae natura atque constructio innotescat, facile patet. Ponamus, C esse solidi centrum aut aliud quodvis punctum in axe datum, ut itaque planum LCD veluti basin seu *Aequatorem* solidi considerare liceat, unde angulus MCB idem erit, quod in globo terraqueo *latitudinem* dicere consuevimus. Pari modo Meridianum PL *primum* statuere licet, quo angulus LCD $= \Phi$ analogice dici possit *longitudo*. Quibus suppositis puncti M latitudinem determinat linea z, cognita nempe natura curvae PMD seu functione Z: est enim tang. MCB $= \frac{MB}{CB} = \frac{z}{Z}$. Quamobrem formulae nostrae integralis II. solutio, pro quacunque latitudine puncti M in curva Loxodromica, ejusdem puncti praebet longitudinem $\Phi =$ LCD, et vice versa: unde curvae hujus natura atque constructio liquet. Data nempe differentia longitudinum γ et latitudinum β binorum locorum L, M, computetur z ope aequationis tang. $\beta = \frac{z}{Z}$, et cot. $\alpha = \frac{1}{\gamma} \int \frac{\partial z \sqrt{(1+\mathfrak{Z}^2)}}{z}$, quo angulo α integra curva determinatur. Assumto scilicet arbitrarie angulo LCD $= \Phi$, computetur z ope aequationis

$$\int \frac{\partial z \sqrt{(1+\mathfrak{Z}^2)}}{z} = \Phi \text{ cot. } \alpha,$$

tumque capto angulo DCM $=$ Arc. tang. $\frac{z}{Z}$, atque prolongata CM donec superficiei in M occurrat, erit punctum M in curva Loxodromica.

§ 4.

§ 4. Posito arcu Loxodromiae LM $= s$, erit

III. $\partial s = Mm = Mn \text{ cosec. } \alpha = mn \text{ sec. } \alpha = \frac{Z \partial \Phi}{\sin. \alpha} = \frac{\partial z \sqrt{(1 + \mathfrak{z}^2)}}{\cos. \alpha}$:

quare cum sit *mn* elementum curvae DM, integrando oritur LM $= s =$ DM sec. α, qualiscunque sit curvae DM natura, quae est proprietas Loxodromiae notatu maxime digna. In quovis enim corpore rotundo si curvam descripseris Loxodromicam, ea ibi idem fere est quod recta in plano ducta. Quod si enim triangulum LMD ceu rectilineum consideraveris, pariter erit LM $=$ DM sec. α: unde facilis resultat methodus mappas construendi Loxodromicas seu nauticas. Nil enim opus est nisi ut triangulum orthogonale LDM lineis rectis repraesentetur, quod obtinetur, si Meridiani MD et Paralleli LD fuerint rectae sibi invicem normales, et angulus M eidem angulo α in solidi superficie aequetur. Quapropter si gradibus latitudinis ad gradus longitudinis eadem in mappis tribuitur relatio quae in solido obtinet, h. e. si $Mv : vm$ est in mappa qualis est in solido, erit angulus M utrobique aequalis, ob tang. M $= \frac{mv}{Mv}$, et LM $=$ DM sec. M $=$ DM sec. α: unde cursum et distantiam navis ejusmodi mappis rite repraesentari perspicimus.

Hinc simul patet, *rectificationem* curvae loxodromicae in omni corpore rotundo pendere a rectificatione curvae Meridiani seu generatricis, ideoque in Sphaera a rectificatione seu quadratura circuli, in sphaeroide elliptica a rectificatione ellipseos, et sic porro; quoniam arcus loxodromicus LM semper est arcui Meridiani DM proportionalis.

§ 5. Ad *quadraturam* denique Loxodromiae, h. e. superficiei LMD quod attinet, methodo hic nobis est utendum adeo generali, quae ad inveniendam superficiem in corpore quovis

vis rotundo quomodocunque descriptam sufficiat, quae proinde in pluribus aliis casibus usu haud erit destituta. Ponamus igitur aream LMD $= S$, ejusque incrementum evanescens DM$md = \partial S$, quod erit $=$ DMnd, quoniam triangulum elementare Mmn, ob utramque ejus dimensionem Mn et nm infinite parvam, ratione elementi DMnd, cujus una duntaxat dimensio Mn seu Dd est infinite parva, evanescit. Ducto jam circulo mv priori Mn parallelo ac infinite propinquo, areolam Mnmv pro rectangulo rectilineo areolaeque DMnd elemento habere licet, unde nanciscimur

$$\partial\partial S = Mn \,.\, mn = u\partial\Phi \sqrt{(\partial u^2 + \partial z^2)} \ (\S\ 2.)$$
$$= Z\partial\Phi\partial z \sqrt{(1 + \mathfrak{Z}^2)} \ (\S\ 3.).$$

Qua formula sic integrata, ut non nisi z ponatur variabilis, ac integrale casu $z = 0$ evanescat, nanciscimur aream

$$DMnd = \partial S = \partial\Phi \int Z\partial z \sqrt{(1 + \mathfrak{Z}^2)}.$$

Qua integratione peracta si etiam Φ sumitur variabilis atque denuo integratur, erit

$$S = \int\partial\Phi \int Z\partial z \sqrt{(1 + \mathfrak{Z}^2)}.$$

En expressionem areae MLD maxime generalem, quae adhiberi potest, quaecunque demum sit figura Meridiani DM et curvae LM, ideoque pro quibuscunque curvis in sphaera vel alio quovis solido rotundo descriptis. Quare cum in priore integratione, qua reperitur ∂S, functiones ipsius z, puta Z et $\mathfrak{Z}$ solius curvae DM determinentur natura, hoc elementum ∂S minime a natura curvae LM, sed a natura tantum corporis rotundi dependere liquet. In secunda autem integratione elementum $\partial\Phi$ per z exprimere oportet, quod quidem fieri nequit, nisi curvae LM natura fuerit cognita. Perspicimus itaque, quomodo curvatura

tura a natura solidi curvaeque LM simul pendeat, quemadmodum requiritur. Pro Loxodromia, ubi est

$$\partial\Phi = \frac{\partial z\ \text{tang.}\ \alpha \sqrt{(1+\mathfrak{z}^2)}}{Z}\ (\S\ 3.),\ \text{habemus}$$

$$\text{IV.}\ S = \text{tang}\ \alpha \int \frac{\partial z \sqrt{(1+\mathfrak{z}^2)}}{Z} \int Z\, \partial z \sqrt{(1+\mathfrak{z}^2)}.$$

§ 6. Priusquam ulterius progrediamur, formulae hujus usum in exemplo satis obvio ostendisse haud inutile videtur. Sit nempe solidum PDL sphaera, cujus centrum C, radius CD $= c$: eritque $CB^2 + BM^2 = c^2 = u^2 + z^2$, proinde

$$u = Z = \sqrt{(c^2 - z^2)},\ \text{et}\ \partial u = \mathfrak{z}\,\partial z = \frac{-z\,\partial z}{\sqrt{(c^2 - z^2)}}.$$

Habemus itaque

$$\sqrt{(1+\mathfrak{z}^2)} = \frac{c}{\sqrt{(c^2 - z^2)}},\ \text{et} \int Z\,\partial z \sqrt{(1+\mathfrak{z}^2)} = cz,$$

consequenter S seu aream LMD $= c\int z\,\partial\Phi$, quaecunque sit curva LM. Sit jam LM circulus maximus, ut LDM fiat triangulum sphaericum rectangulum, sitque P polus unius catheti LD, cui alter cathetus DM prolongatus occurret. Ducto insuper arcu Pd priori PD infinite propinquo, erit DM$m\partial$ elementum trianguli sphaerici, si hoc ita crescere assumitur, ut anguli L et D $= 90°$ sint constantes: quod quidem elementum modo invenimus esse

$$\partial S = cz\,\partial\Phi = c\ \text{sin. DCM} \,.\, \partial \,.\, \text{LD}.$$

Est autem per regulas trigonometriae notissimas

$$\text{sin. DCM} = \frac{\text{sin. L sin. LCD}}{\text{sin. M}},\ \text{ideoque}\ \partial S = \frac{cc\ \text{sin. L sin. LCD}}{\text{sin. M}}\, \partial \,.\, \text{LCD}.$$

Praeterea regulae trigonometricae praebent $\text{cos. LCD} = \frac{\text{cos. M}}{\text{sin. L}}$, et differentiando

$$\partial \,.\, \text{LCD} \,.\, \text{sin. LCD} = \frac{\partial M\ \text{sin. M}}{\text{sin. L}},$$

ob

ob angulum L constantem: quibus valoribus substitutis nanciscimur

$$\partial S = cc\partial M, \text{ et } S = ccM + \text{Const.}$$

Quo constans adjicienda determinetur, fingamus, triangulum eodem modo porro crescere, ut nempe cathetus MD magis magisque a vertice L recedat, donec LD sit quadranti aequalis, quo casu, ob $D = 90^\circ$, erit L polus circuli DM, ideoque et $M = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$, et $DCM = L$. Eodem vero casu area LDM est hemisphaerii pars, quae ad integrum hemisphaerium est ut $DM = c \cdot L$ ad peripheriam circuli maximi, unde isto casu esse oportet $S = DM \cdot CD = ccL$. Habemus itaque

$$ccL = \tfrac{1}{2}cc\pi + \text{Const. et Const.} = cc\,(L - \tfrac{\pi}{2}),$$

unde area trianguli sphaerici rectanguli reperitur

$$= cc\,(L + M - \tfrac{\pi}{2}) = cc\,(L + M + D - \pi).$$

Tab. II Fig. 2 Dato jam quovis triangulo sphaerico non rectangulo ABC e quopiam angulo C ducatur arcus circuli maximi CD normalis ad AB, unde duo orientur triangula rectangula U et V, eritque per modo demonstrata $U = cc\,(A + ACD - \frac{\pi}{2})$ et $V = cc\,(B + BCD - \frac{\pi}{2})$, proinde

$$S = U + V = cc\,(A + B + C - \pi),$$

quae est regula notissima pro area triangulorum sphaericorum invenienda.

§ 7. Redeamus jam ad Loxodromiam (*Fig. 1.*), et quae hucusque in genere sunt demonstrata, applicemus ad casus quosdam speciales, pro diversis Meridiani PD figuris. Ordiamur a casu, quo PMD est linea recta, seu solidum *Conus*

rectus

rectus circa axem PC. Quocirca ut supra appellatis PC $= a$, NM $= u$, BM $=$ CN $= z$, et angulo quo latera coni ad axem inclinantur MPN $= \beta$, habemus MN $=$ PN tang. β, sive

$$u = (a - z)\,\text{tang.}\,\beta = Z,\ \partial u = Z\partial z = -\partial z\,\text{tang.}\,\beta,$$

atque aequatio ad Loxodromiam (§ 3. II.) abit in hanc:

$$\Phi = \text{tang.}\,\alpha \int \frac{\partial z \sqrt{(1 + \text{tang.}^2 \beta)}}{(a - z)\,\text{tang.}\,\beta} = \frac{\text{tang.}\,\alpha}{\text{sin.}\,\beta} \int \frac{\partial z}{a - z},$$

consequenter $\Phi = \frac{\text{tang}\ \alpha}{\text{sin.}\ \beta} \log. \frac{a}{a - z}$, constante scilicet ita determinata, ut Φ evanescat casu $z = o$, h. e. arcubus LD ab ipso initio L computatis. Sin autem pro quavis longitudine LD $= \Phi$ distantiam a polo P seu lineam PN $= a - z = v$ habere malimus, reperitur $v = ae^{-\Phi\,.\,\text{cot.}\,\alpha\,\text{sin.}\,\beta}$, ubi est e numerus, cujus logarithmus naturalis $= 1$. In priore aequatione, quando z valorem induit negativum, erit log. $\frac{a}{a + z}$ negativus, ideoque et arcus $\Phi =$ Ll negativus, quando punctum λ cadit infra l, quod figura docet.

Datis binis locis in coni superficie L et M, pro quibus est PC $= a$, PN $= b$, (quae quidem quantitates locorum latitudines vel potius distantias a polo determinant) longitudinumque differentia $\Phi =$ LCD $= \gamma$, quaeritur angulus Rhombi α, sub quo Meridianos secare debet Loxodromia, ut binis punctis L, M, occurrat: quod est problema in rebus nauticis maxime obvium. Habemus itaque hanc aequationem: $\gamma = \frac{\text{tang.}\ \alpha}{\text{sin.}\ \beta} \log. \frac{a}{b}$, proinde cot. $\alpha = \dfrac{\log. \frac{a}{b}}{\gamma\ \text{sin.}\ \beta}$. Si $a = b$, fit. log. $\frac{a}{b} = o$ et $\alpha = 90°$;

sin autem $\gamma = o$, reperitur cot. $\alpha = \infty$ seu $\alpha = o$: quae omnia per se patent.

Quaeri hic potest, quisnam locorum L, M, situs esse debeat, quo angulus α aequalis fiat angulo β. Esse hinc oportet cot. $\beta = \frac{\log. \frac{a}{b}}{\gamma \sin. \beta}$, h. e. cos. $\beta = \frac{1}{\gamma} \log. \frac{a}{b}$, consequenter

$$\gamma = \sec. \beta \log. \tfrac{a}{b} \text{ et } \tfrac{a}{b} = e^{\gamma \cos. \beta}:$$

unde longitudinum differentia per latitudines, ac vice versa, nec non angulus β per situm locorum determinatur, simul autem patet, idem innumeris modis obtineri posse, quia longitudines ac latitudines non simul determinantur. Quoties $\gamma = \log. \frac{a}{b}$ seu $a = be^{\gamma}$, est tang. $\alpha = \sin. \beta$, ideoque angulus α semirecto minor.

§ 8. Recta PM est $= v$ sec. β. Posito itaque PM $= r$, habemus $v = r$ cos. β, et aequatio nostra abit in hanc:

$$\Phi = \frac{\tan g. \alpha}{\sin. \beta} \log. \frac{a \sec \beta}{r}, \text{ et } r = a \sec. \beta \,.\, e^{-\Phi \cot. \alpha \sin. \beta}.$$

Coni superficie in planum evoluta, arcus LD, qui in cono fuerat radio CD descriptus, abit in arcum radio PD descriptum, qui autem eandem servat longitudinem absolutam LD. Pro quovis igitur arcu loxodromico LM habemus in cono

$$LD = CD \,.\, LCD = \Phi \,.\, PD \sin. \beta,$$

in coni autem evolutione LD $=$ PD . LPD; quibus valoribus
Tab. II. aequatis nanciscimur LPD $= \Phi$ sin. β. Repraesentante itaque
Fig. 3. *Figura tertia* conum in planum evolutum, dicatur angulus LPD, qui

qui angulo Φ respondet, ψ, ut sit $\psi = \Phi$ sin. β, dum lineae PL, PM, eandem servant longitudinem. Quo valore in aequatione inter Φ et r inventa substituto, hanc adipiscimur aequationem ad coni evolutionem, inter angulum ψ et radium vectorem PM $= r$:

$$\psi = \text{tang.}\ \alpha\ \log. \frac{a \sec \beta}{r},\ \text{et}\ r = a\ \sec.\ \beta e^{-\psi \cot. \alpha}$$

Posito PN $= x$, NM $= y$, erit tang. $\psi = \frac{y}{x}$, et $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$; quibus valoribus substitutis, hanc nanciscimur aequationem pro evolutione Loxodromiae maxime transcendentem inter coordinatas x et y:

$$\text{Arc. tang.}\ \frac{y}{x} = \text{tang.}\ \alpha \log. \frac{a \sec \beta}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}.$$

Caeterum notari meretur, in coni evolutione Loxodromiam eundem cum Meridianis angulum facere constantem, ac in ipsa coni superficie.

Est enim tang. PMX $= \frac{mv}{Mv} = \frac{r \partial \psi}{-\partial r}$.

Quare cum sit $\psi = $ tang. α (log a sec. β — log. r), habemus $\partial\psi = -\frac{\partial r}{r}$ tang. α, proinde tang. PMX $=$ tang. α.

§ 9. Longitudo arcus loxodromici in cono (*Fig. 1.*) est $=$ DMsec. α (§ 4.) $=$ (PD $- r$) sec. $\alpha = a$ sec. β sec. α $(1 - e^{-\Phi \cot. \alpha \sin. \beta})$: unde ejus rectificatio a logarithmis seu quadratura hyperbolae dependet. Datis nempe punctis in cono L, M, dantur quidem PC $= a$, et PN sive PM $= r =$ PN sec. β, estque arcus LM $= (a$ sec. $\beta - r)$ sec. α, quae expressio videtur algebraica; verum e data longitudinum differentia γ, angulus α expressionem istam ingressus non nisi formula transcendente

$\cot.\alpha = \frac{\log.\frac{a}{b}}{\gamma \sin.\beta}$ (§ 7.) reperitur. Idem quoque valor est arcus loxodromici evoluti LM. Tab. II. *Fig.* 3.

§ 10. Pro quadratura Loxodromiae invenimus formulam (§ 5. IV.), quae autem longe fit concinnior, si aequationem curvae PMD ad axem PC relatae in usum vocamus, in qua sit abscissa PN $= v$, applicata NM $= u$, arcus PM vel DM $= \sigma$, ideoque

$$\partial z \surd(1 + \mathfrak{Z}^2) = \surd(\partial z^2 + \partial u^2) = \partial\sigma,$$

$$\text{et } S = \text{tang.}\,\alpha \int \frac{\partial\sigma}{u} \int u\partial\sigma \quad (\S\ 5.\ \text{IV.}).$$

In cono est $\sigma =$ PM $= u \operatorname{cosec.}\beta$, proinde

$$S = \text{tang.}\,\alpha \operatorname{cosec.}^2\beta \int \frac{\partial u}{u} \int u\partial u.$$

Quare cum per primam integrationem reperiatur area

$$\text{DM}md = \frac{\text{tang.}\,\alpha}{\sin.\beta} \cdot \frac{\partial u}{u} \int u\partial u \ (\S\ 5.),$$

quae casu $u = \text{CD} = a \text{ tang.}\,\beta$ evanescere debet, sequitur

$$\int u\partial u = \tfrac{1}{2}(u^2 - a^2 \text{ tang.}^2\beta),$$

$$\text{et } \int \frac{\partial u}{u} \int u\partial u = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}u^2 - a^2 \text{ tang.}^2\beta \log. u) + \text{Const.}$$

quae constans inde est determinanda, quod integrale S etiam evanescit casu $u = a \text{ tang.}\,\beta$, unde nanciscimur

$$S = \tfrac{1}{4}\text{tang.}\,\alpha \operatorname{cosec.}^2\beta\,(u^2 - a^2 \text{ tang.}^2\beta + 2a^2 \text{ tang.}^2\beta \,.\, \log.\frac{a \text{ tang.}\,\beta}{u}),$$

$$\text{sive } S = \tfrac{1}{4}\text{tg.}\,\alpha\,(r^2 - a^2 \sec.^2\beta) + \tfrac{1}{2}a^2 \text{ tg.}\,\alpha \sec.^2\beta \log.\frac{a}{r \cos.\beta},$$

ob $r = u \operatorname{cosec.}\beta$,

$$\text{et } S = \tfrac{1}{4}\text{tg.}\,\alpha\,(r^2 - a^2 \sec.^2\beta) + \tfrac{\Phi}{2}a^2 \text{ tg.}\,\beta \sec.\beta,$$

$$\text{ob tg.}\,\alpha = \frac{\Phi \sin.\beta}{\log.\frac{a}{r\cos.\beta}} \ (\S\ 7.),$$

quae

quae expressiones ob angulum α ingressum iterum sunt transcendentes.

In curva loxodromica evoluta (*Fig. 3.*) areae LPM elementum est $\partial S' = MPm = \frac{1}{2} rr\partial\psi$, unde ob $\partial\psi = -\frac{\partial r \, tang. \, \alpha}{r}$ (§ 8.) resultat

$$S' = \frac{1}{4} \text{tang.} \, \alpha \, (a^2 \sec.^2 \beta - r^2),$$

expressio pariter transcendens, qua non minus valor areae coni LPM definitur, siquidem evolutione quantitas ejus mutari nequit. Sequitur hinc, $S + S'$ areae coni LPD aequalem esse oportere. Reperitur quoque $S + S' = \frac{\Phi}{2} a^2 \text{tg.} \, \beta \sec. \beta = \frac{\Phi}{2} CD . PD = \frac{PD . LD}{2} =$ areae coni LPD. Superficiem itaque coni LPD, cujus quadratura a circuli quadratura dependet, Loxodromia LM in duas partes dispescit, quarum neutra quadrari potest, nisi concessa hyperbolae quadratura, quia angulum α, ideoque logarithmos utraque involuit. Concessa vero Loxodromiae constructione, rectificatio ejus per circuli quadraturam obtinetur. Ducto nempe per quodpiam ejus punctum E latere coni EF, et e centro baseos C radiis CL, CF, habemus

$$\text{tang.} \, \alpha = \frac{LF}{EF} = \frac{a \, tang. \, \beta}{EF} LCF,$$

ubi mensura rectae EF in potestate est, anguli vero LCF expressio in partibus radii quadraturam circuli supponit. Invento sic angulo α reperitur arcus et area, ope aequationum supra exhibitarum. Arcus quoque mechanice reperitur, si arcus LF tam exiguus sumitur, ut LE tanquam rectae mensura capi possit. Cum enim sit $LM = DM \sec. \alpha$, ideoque $LE = EF \sec. \alpha$, habemus $LM = \frac{LE}{EF} DM$.

§ 11. Si supponimus, punctum M in P cadere, h. e. Loxodromiam ipsi polo occurrere, fit $z = a$, ideoque per aequationem (§ 7.) $\Phi = \frac{tang.\ \alpha}{sin\ \beta} \log. \frac{a}{a-z} = \infty$, quod indicio est, curvam loxodromicam instar *spiralis* innumeras circa polum facere revolutiones, ad eumque nunquam pervenire, nisi quoque sit $\alpha = 0$, quo casu Loxodromia cum Meridiano coincidit. Observari adhuc meretur, vel post innumeras revolutiones spirales, ubi angulus Φ fit infinitus, tamen arcum loxodromicum esse finitum et assignabilem $=$ DP sec. α (§ 4.) $= a$ sec. α sec. β. Hic itaque valor $s = a$ sec. α sec. β limes est, ad quem arcus continuo propius accedit, nec tamen unquam pervenit. Insignis haec affinitas Loxodromiae cum Spirali logarithmica, quod nempe innumeris demum peractis revolutionibus polo occurrunt, at nihilo tamen minus arcus vel tunc finitae sunt quantitatis, omni profecto attentione est digna.

§ 12. Cum *Cylindrus* sit etiam corpus rotundum, et quasi conus cujus axis in infinitum abit, pauca de eo dicere hic non e re esse videtur. Repraesentet itaque *Figura quarta* Cylindrum rectum, in cujus superficie descripta sit Loxodromia
Tab. II. Fig. 4. LMX, atque posito lCD $= \Phi$, MD $= z$, mM$n = \alpha$, CD $= c$, L$l = b$, habemus $mn =$ Mn tang. α, h. e. $c\partial\Phi = \partial z$ tang. α, consequenter $c\Phi = (z - b)$ tang. α. Hinc datis binis punctis L, M, seu eorum latitudinibus b et z, longitudinumque differentia lCD $= \Phi$, invenimus angulum Rhombi, videlicet tang. $\alpha = \frac{c\Phi}{z-b}$.

Arcus

Arcus loxodromicus reperitur $LM = (z - b)$ sec. α.

Areae LMN elementum est $N\nu mn = (z - b)\partial z$ tang. α, ideoque

$$LMN. = \text{tang.}\ \alpha\ (\tfrac{1}{2}z^2 - bz + \tfrac{1}{2}b^2) = \tfrac{\text{tang.}\ \alpha}{2}(z - b)^2:$$

ut itaque cum rectificatio tum quadratura Loxodromiae in Cylindro descriptae a circuli quadratura dependeat, siquidem angulum α utraque involvit, isque detur aequatione tang. $\alpha = \frac{c\,\Phi}{z - b}$, quae arcum Φ partibus radii expressum, h. e. circuli quadraturam supponit.

Posito axe $Cc = a$, erit areae loxodromiae $LM\mu\lambda$ elementum $= M\mu \cdot mn = (a - z)\partial z$ tang. α, ergo area

$$LM\mu\lambda = \text{tang.}\ \alpha\ (az - \tfrac{1}{2}z^2 - ab + \tfrac{1}{2}b^2) = \text{tang.}\ \alpha\ (z - b)(a - \tfrac{z + b}{2}),$$

constante nempe ita determinata, ut integrale casu $z = b$ evanescat. Binae istae areae in summam collectae aequales esse debent superficiei Cylindri $LN\mu\lambda$, quam constat esse $= LN \cdot L\lambda = c\Phi\,(a - b)$. Quare cum sit $c\Phi = (z - b)$ tang. α, superficies cylindri reperitur $= (a - b)\ (z - b)$ tang. α, atque arearum Loxodromiae summa

$$= \text{tang.}\ \alpha\ (\tfrac{1}{2}(z - b)^2 + (z - b)\ (a - \tfrac{z + b}{2}))$$

$$= \text{tg.}\ \alpha\ (z - b)\ (\tfrac{1}{2}(z - b) + a - \tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{2}b) = (a - b)\ (z - b)\ \text{tg.}\ \alpha,$$

uti requiritur. Unde perspicimus, Loxodromiam in cylindro descriptam tanquam circuli quadraticem posse considerari. Concessa enim ejus constructione, habetur angulus α, et pro quovis baseos puncto D linea $DM = z$, unde reperitur arcus lD seu

$$c\Phi = (z - b)\ \text{tang.}\ \alpha = NM\ \text{tang.}\ \alpha,$$

et

et superficies cylindri

$$LN\mu\lambda = (a - b)(z - b) \text{ tang. } \alpha = L\lambda \,.\, NM \,.\, \text{tg. } \alpha.$$

Quae omnia immediate habentur, si triangulum MNL tanquam rectilineum construitur.

§ 13. Sit jam curva PMD (*Fig. 1.*) *Ellipsis* rotata circa axem transversum $= 2A$; sit praeterea axis conjugatus $= 2B$, $PC = a$, $MB = CN = z$, $PN = v$, $NM = u = Z$, $LCD = \Phi$; estque aequatio ad ellipsin,

$$u^2 = \frac{B^2}{A^2}(2Av - v^2) = \frac{B^2}{A^2}(2Aa - a^2 - 2(A - a)z - z^2).$$

Ponatur $A - a = m$, $A^2 - B^2 = n^2$, et abscissa a centro computata $m + z = A - v = x$, ut sit

$$u = \frac{B}{A}\sqrt{(A^2 - x^2)}, \text{ ac } \partial u = \mathfrak{z}\,\partial z = \frac{-Bx\,\partial z}{A\sqrt{(A^2 - x^2)}}, \text{ unde oritur}$$

$$1 + \mathfrak{z}^2 = \frac{A^4 - n^2x^2}{A^2(A^2 - x^2)}, \text{ et } \frac{\partial z\sqrt{(1 + \mathfrak{z}^2)}}{Z} = \frac{\partial x\sqrt{(A^4 - n^2x^2)}}{B(A^2 - x^2)},$$

ad cujus integrale inveniendum ponamus $x^2 = \frac{A^4}{p^2 + n^2}$, ut fiat $A^2 - x^2 = \frac{A^2(p^2 - B^2)}{p^2 + n^2}$, $\sqrt{(A^4 - n^2x^2)} = px$, et $x\partial x = \frac{-A^4p\,\partial p}{(p^2 + n^2)^2}$, quibus valoribus substitutis nanciscimur

$$\frac{\partial z\sqrt{(1 - \mathfrak{z}^2)}}{Z} = \frac{-A^2p^2\,\partial p}{B(p^2 + n^2)(p^2 - B^2)}.$$

Quocirca integrando obtinetur (§ 3. II.)

$$\Phi \text{ cot. } \alpha = \log. \sqrt{\frac{p + B}{p - B}} - \frac{n}{B} \text{ Arc. tang. } \frac{p}{n}.$$

Est autem $p = \frac{\sqrt{(A^4 - n^2x^2)}}{x}$, unde fit

$$\Phi \text{ cot. } \alpha = \log. \frac{\sqrt{(A^4 - n^2x^2)} + Bx}{A\sqrt{(A^2 - x^2)}} - \frac{n}{B} \text{ Arc. tg. } \frac{\sqrt{(A^4 - n^2x^2)}}{nx}, \text{ sive}$$

$$\Phi \text{ cot. } \alpha = \log. \frac{A\sqrt{(A^2 - x^2)}}{\sqrt{(A^4 - n^2x^2)} - Bx} - \frac{n}{B} \text{ Arc. cos. } \frac{nx}{A^2}.$$

Quare

Quare cum angulus Φ casu $z = o$ seu $x = m$ evanescere debeat, constans sic erit determinanda, ut sit

$$\Phi \cot. \alpha = \log. \frac{(\sqrt{(A^4 - n^2 x^2)} + Bx)\sqrt{(A^2 - m^2)}}{(\sqrt{(A^4 - m^2 n^2)} + Bm)\sqrt{(A^2 - x^2)}}$$
$$+ \frac{n}{B}\left(\text{Arc. cos. } \frac{mn}{A^2} - \text{Arc. cos. } \frac{nx}{A^2}\right),$$

ubi sunt x, m, abscissae punctorum M, L, in axe transverso a centro captae, sive distantiae eorum ab Aequatore sphaeroidis ellipticae, n autem distantia focorum a centro ellipseos. Hinc data punctorum L, M, differentia longitudinum Φ, latitudinibusque per m et x vel z expressis, ope hujusce aequationis reperimus cot. α seu angulum Rhombi.

§ 14. Jam vero assumamus, *sphaeroidem ellipticam* repraesentare tellurem, cujus polus P, ut itaque PC sit axis minor seu conjugatus, formulae nostrae huic casui accommodantur, si in iis ubique loco A substituimus B, et A loco B, unde n^2 valorem induit negativum, atque nanciscimur

$$\frac{\partial z \sqrt{(1 + \mathfrak{z}^2)}}{Z} = \frac{-Bp^2 \partial p}{A(p^2 - n^2)(p^2 - A^2)}, \text{ ubi est}$$

$$p^2 = \frac{B^4 + n^2 x^2}{x^2},\ n^2 = A^2 - B^2, \text{ et } x = B - v = B - a + z.$$

Hinc integrale, ob factores in denominatore a prioribus diversos, per solos logarithmos exprimitur, atque hanc induit formam:

$$\Phi \cot. \alpha = \log. \sqrt{\frac{p + A}{p - A}} - \frac{n}{A} \log. \sqrt{\frac{p + n}{p - n}},$$

ubi substituto $p = \frac{\sqrt{(B^4 + n^2 x^2)}}{x}$, et constante ita determinata, ut integrale Φ casu $z = o$ seu $x = B - a = m$ evanescat, resultat

$$\text{V. } \phi \cot.\alpha = \log.\frac{(\sqrt{(B^4+n^2x^2)}+Ax)\sqrt{(B^2-m^2)}}{(\sqrt{(B^4+n^2m^2)}+Am)\sqrt{(B^2-x^2)}} - \frac{n}{A}\log.\frac{\sqrt{(B^4+n^2x^2)}+nx}{\sqrt{(B^4+n^2m^2)}+nm}.$$

Datis itaque binorum punctorum L, M, latitudinibus atque Meridianorum differentia ϕ, aequatio V. praebet angulum α: quo semel determinato, eadem aequatio inservit cujuscunque puncti in Loxodromia longitudini ϕ inveniendae, cognita ejusdem latitudine seu z.

Posito z negativo, et quidem ita, ut punctum M in ipso Aequatore situm sit, esse oportet $z = -(B-a)$ seu $x = 0$, angulusque ϕ hocce casu reperitur

$$\phi = \text{tang.}\,\alpha \log.\frac{B\sqrt{(B^2-m^2)}}{\sqrt{(B^4+n^2m^2)}+Am} + \frac{n}{A}\log.\frac{\sqrt{(B^4+n^2m^2)}+nm}{B^2}.$$

Datis itaque punctis quibuscunque L, M, determinetur angulus rhombi α, tum quaeratur $\phi = LCl$ pro casu $x = o$, sicque reperto puncto λ in Aequatore, quia distantia puncti l ab Aequatore $= B - a$ datur, punctum λ jam pro initio curvae loxodromicae assumatur, unde aequationes longe fient simpliciores.

Tab. II. § 15. Quod si hic loco rectarum z et a latitudines geographicas introducere volumus, sit (*Fig. 5.*) A centrum, AP axis conjugatus ellipseos PM, quam si in puncto M tangit recta Mp axi in p occurrens, observetur, esse in sphaeroide angulum MpN elevationem poli seu latitudinem geographicam loci M, quae si ponitur $= \mu$, MN $= u$, ut ante, et AN $= B - a + z = x$, habemus per ellipsis naturam, $\text{tang.}\,\mu = -\frac{\partial u}{\partial x}$. Quare cum sit $u^2 = \frac{A^2}{B^2}(B^2 - x^2)$, nanciscimur

$$\text{tg. }\mu = \frac{Ax}{B\sqrt{(B^2-x^2)}},\ \text{et } x = \frac{B^2 \text{ tang } \mu}{\sqrt{(A^2+B^2\text{tang.}^2\mu)}} = \frac{B^2}{\sqrt{(A^2\cot.^2\mu+B^2)}}.$$

Quem-

Quemadmodum erat x puncti M, sic est $B - a = m$ puncti L (*Fig. 1*) distantia ab Aequatore, cujus puncti latitudine poſita $= \lambda$, eodem modo fiet $m = \frac{B^2}{\sqrt{(A^2 \cot.^2 \lambda + B^2)}}$. Quibus valoribus ubique substitutis, prior quantitas logarithmica (§ 14. V.) transformabitur in hanc:

$$\frac{\left[B^2 \sqrt{\left(1 + \frac{n^2}{A^2 \cot.^2 \mu + B^2}\right)} + \frac{A B^2}{\sqrt{(A^2 \cot.^2 \mu + B^2)}}\right] B \sqrt{\left(1 - \frac{B^2}{A^2 \cot.^2 \lambda + B^2}\right)}}{\left[B^2 \sqrt{\left(1 + \frac{n^2}{A^2 \cot.^2 \lambda + B^2}\right)} + \frac{A B^2}{\sqrt{(A^2 \cot.^2 \lambda + B^2)}}\right] B \sqrt{\left(1 - \frac{B^2}{A^2 \cot.^2 \mu + B^2}\right)}}$$

quae formula ob $B^2 + n^2 = A^2$ abit in hanc: $\frac{(1 + \mathrm{cosec.}\, \mu) \cot.\, \lambda}{(1 + \mathrm{cosec.}\, \lambda) \cot.\, \mu}$. Haec expressio calculo logarithmico magis adaptari potest. Cum enim sit

$$1 + \mathrm{cosec.}\, \mu = \frac{1 + \sin.\, \mu}{\sin.\, \mu} = \frac{2 \cos.^2 (45^\circ - \frac{1}{2} \mu)}{\sin.\, \mu},$$

expressio ista hanc induit formam

$$\frac{\cos.\, \lambda \cos.^2 (45^\circ - \frac{1}{2} \mu)}{\cos.\, \mu \cos.^2 (45^\circ - \frac{1}{2} \lambda)}.$$

Eodem prorsus modo altera pars logarithmica (§ 14. V.) fit $\frac{(A\, \mathrm{cosec.}\, \mu + n) \sqrt{(A^2 \cot.^2 \lambda + B^2)}}{(A\, \mathrm{cosec.}\, \lambda + n) \sqrt{(A^2 \cot.^2 \mu + B^2)}}$.

Est autem $A^2 \cot.^2 \lambda + B^2 = A^2 \mathrm{cosec.}^2 \lambda - n^2$
$= (A\, \mathrm{cosec.}\, \lambda + n)(A\, \mathrm{cosec.}\, \lambda - n)$,

unde haec pars fit $= \sqrt{\frac{(A\, \mathrm{cosec.}\, \mu + n)(A\, \mathrm{cosec.}\, \lambda - n)}{(A\, \mathrm{cosec.}\, \mu - n)(A\, \mathrm{cosec.}\, \lambda + n)}}$, atque angulus Φ per hanc definitur aequationem:

$$\text{VI. } \Phi = \mathrm{tg.}\, \alpha \,.\, \log.\, \frac{\cos.\, \lambda \cos.^2 (45^\circ - \frac{1}{2} \mu)}{\cos.\, \mu \cos.^2 (45^\circ - \frac{1}{2} \lambda)}$$

$$+ \frac{n \,\mathrm{tang.}\, \alpha}{2A} \log.\, \frac{(A - n \sin.\, \mu)(A + n \sin.\, \lambda)}{(A + n \sin.\, \mu)(A - n \sin.\, \lambda)}.$$

 Supra

Supra (§ 14.) ostendimus, quo pacto punctum concursus Loxodromiae cum Aequatore reperiri possit. Jam igitur assumere licebit, punctum L in ipso Aequatore situm esse, unde ponendum est $\lambda = 0$, quo facto erit

$$\text{VII.}\ \phi = \text{tg.}\,\alpha\,.\,\log.\,\frac{2\cos.^2(45^0 - \frac{1}{2}\mu)}{\cos.\,\mu} + \frac{n\,\text{tang.}\,\alpha}{2A}\log.\,\frac{A - n\sin.\,\mu}{A + n\sin.\,\mu}.$$

§ 16. Arcus Loxodromiae LM cum semper sit $=$ DM sec. α, ideoque hic ellipseos rectificationi innitatur, plura de eo dicere non opus esse videtur.

Area LMD seu S generatim est (§ 5. IV.)

$$S = \text{tang.}\ \alpha \int \frac{\partial z \sqrt{(1 + \mathfrak{z}^2)}}{Z} \int Z \partial z \sqrt{(1 + \mathfrak{z}^2)}.$$

Loco z linea x nunc introducta, erit $x = B - a + z$, $\partial x = \partial z$,

$$Z = u = \frac{A}{B}\sqrt{(B^2 - x^2)},\ \partial u = \mathfrak{z}\partial x = \frac{-Ax\partial x}{B\sqrt{(B^2 - x^2)}}),$$

$$\sqrt{(1 + \mathfrak{z}^2)} = \frac{\sqrt{(B^4 + n^2x^2)}}{B\sqrt{(B^2 - x^2)}},\ \text{proinde}\ \frac{\partial z\sqrt{(1 + \mathfrak{z}^2)}}{Z} = \frac{\partial x\sqrt{(B^4 + n^2x^2)}}{A(B^2 - x^2)},$$

et $Z\partial z \sqrt{(1 + \mathfrak{z}^2)} = \frac{A\partial x\sqrt{(B^4 + n^2x^2)}}{B^2}$. Posito jam $x^2 = \frac{B^4}{p^2 - n^2}$, nanciscimur $Z\partial z\sqrt{(1 + \mathfrak{z}^2)} = -\frac{AB^2p^2\partial p}{(p^2 - n^2)^2}$, et

$$\int Z\partial z\sqrt{(1 + \mathfrak{z}^2)} = \frac{AB^2}{4n}(\log.\,\frac{p + n}{p - n} + \frac{2np}{p^2 - n^2}),$$

quod integrale evanescere debet, quando $x = 0$ seu $p = \infty$, unde constans adjicitur nulla. Sin autem hoc integrale ducitur in $\frac{\partial z\sqrt{(1 + \mathfrak{z}^2)}}{Z} = \frac{-B^2p^2\partial p}{A(p^2 - A^2)(p^2 - n^2)}$, hujusmodi orientur expressiones, $\frac{\partial p\log.(p + n)}{p \pm A}$, quae non nisi per series integrari possunt. Quare cum sit

$$\tfrac{1}{2}\log.\,\frac{p + n}{p - n} = \frac{n}{p} + \frac{n^3}{3p^3} + \text{etc.} = \frac{n}{p}(1 + \frac{n^2}{3p^2} + \frac{n^4}{5p^4} + \frac{n^6}{7p^6} + \text{etc.})$$

et $p = \frac{\sqrt{(B^4 + n^2x^2)}}{x}$, erit

$\int Z \partial z$

$$\int Z \partial z \sqrt{(1+\mathfrak{Z}^2)} = \frac{AB^2}{2p}\left(1 + \frac{n^2}{3p^2} + \frac{n^4}{5p^4} + \ldots\ldots\right) + \frac{AB^2 p}{2(p^2 - n^2)} \text{: et}$$

$$\frac{\partial z \sqrt{(1+\mathfrak{Z}^2)}}{Z} \int Z \partial z \sqrt{(1+\mathfrak{Z}^2)} = \frac{B^2 x \partial x}{2(B^2 - x^2)}\left(1 + \frac{n^2 x^2}{3(B^4 + n^2 x^2)} + \frac{n^4 x^4}{5(B^4 + n^2 x^2)^2} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{(B^4 + n^2 x^2) x \partial x}{2 B^2 (B^2 - x^2)}$$

$$= \frac{B^2 x \partial x}{2(B^2 - x^2)}\left(2 + \frac{n^2 x^2}{B^4} + \frac{n^2 x^2}{3(B^4 + n^2 x^2)} + \frac{n^4 x^4}{5(B^4 + n^2 x^2)^2} + \text{etc.}\right).$$

Quae series semper valde convergit, nisi n in infinitum abeat, vel ellipsis sit infinite oblonga; et vel tum series nostra erit $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \text{etc.}$ Plerisque vero casibus, inprimis autem, quando sphaerois elliptica tellurem repraesentat, ubi eccentricitas n est admodum exigua, prioribus tribus terminis acquiescere possumus. Ponamus adhuc $B^2 - x^2 = q^2$, ut sit $B^4 + n^2 x^2 = A^2 B^2 - n^2 q^2$, tunc series nostra hanc induet formam: $-\frac{B^2 \partial q}{2q}\left(2 + \frac{n^2 (B^2 - q^2)}{B^4} + \frac{n^2 (B^2 - q^2)}{3(A^2 B^2 - n^2 q^2)} + \text{etc.}\right) =$
$-\frac{B^2 \partial q}{q} - \frac{n^2 \partial q}{2q} + \frac{n^2 q \partial q}{2B^2} - \frac{n^2 B^4 \partial q}{6q(A^2 B^2 - n^2 q^2)} + \frac{n^2 B^2 q \partial q}{6(A^2 B^2 - n^2 q^2)} + \text{etc.}$
Quare cum sit $\int \frac{\partial q}{q(A^2 B^2 - n^2 q^2)} = \frac{1}{A^2 B^2} \log. \frac{q}{\sqrt{(A^2 B^2 - n^2 q^2)}}$, series nostra integrata praebet:

$$\text{Const.} - \frac{A^2 + B^2}{2} \log. q + \frac{n^2 q^2}{4 B^2} + \frac{n^2 B^2}{6 A^2} \log. \frac{\sqrt{(A^2 B^2 - n^2 q^2)}}{q}$$

$$- \frac{B^2}{12} \log. (A^2 B^2 - n^2 q^2).$$

Quoniam area evanescit quando $x = o$ seu $q = B$, integrale completum est

$$\frac{A^2 + B^2}{2} \log. \frac{B}{q} - \frac{n^2 (B^2 - q^2)}{4 B^2} + \frac{n^2 B^2}{6 A^2} \log. \frac{\sqrt{(A^2 B^2 - n^2 q^2)}}{B q} - \frac{B^2}{12} \log. \frac{A^2 B^2 - n^2 q^2}{B^4}.$$

Restituto nunc valore $q = \sqrt{(B^2 - x^2)}$, reperitur area LMD $= S = \frac{A^2 + B^2}{2} \log. \frac{B}{\sqrt{(B^2 - x^2)}} - \frac{B^2}{12} \log. \frac{B^4 + n^2 x^2}{B^4} + \frac{n^2}{2}\left[\frac{B^2}{3A^2} \log. \frac{\sqrt{(B^4 + n^2 x^2)}}{B\sqrt{(B^2 - x^2)}} - \frac{x^2}{2 B^2}\right]$, quae formula adhuc est per tangentem anguli α multiplicanda.

§ 17.

§ 17. Introducto jam valore (§ 15.) $x = \frac{B^2}{\sqrt{(A^2 \cot.^2 \mu + B^2)}}$, erit

$$S \cot. \alpha = \frac{A^2 + B^2}{2} \log. \frac{\sqrt{(A^2 \cot.^2 \mu + B^2)}}{A \cot. \mu} - \frac{B^2}{12} \log. \frac{A^2 \operatorname{cosec}.^2 \mu}{A^2 \cot.^2 \mu + B^2}$$
$$+ \frac{n^2}{2} \left[\frac{B^2}{3 A^2} \log. \frac{\operatorname{cosec} \mu}{\cot. \mu} - \frac{B^2}{2 (A^2 \cot.^2 \mu + B^2)}\right].$$

Ubi si ponimus $B = mA$, transformatur haec expressio in sequentem:

$$\frac{A^2 (1 + m^2)}{2} \log. \sqrt{(1 + m^2 \text{tg.}^2 \mu)} - \frac{m^2 A^2}{6} \log. \frac{\sec. \mu}{\sqrt{(1 + m^2 \text{tang.}^2 \mu)}}$$
$$+ \frac{m^2 A^2 (1 - m^2)}{2} \left(\tfrac{1}{2} \log. \sec. \mu - \frac{1}{2 (m^2 + \cot.^2 \mu)}\right),$$

unde tandem reperitur area LMD sive

$$\text{VIII.} \quad S = \frac{A^2 \text{tg.} \alpha}{2} \left[\frac{3 + 4 m^2}{6} \log. (1 + m^2 \text{tg.}^2 \mu) + \frac{m^4}{3} \log. \cos. \mu - \frac{m^2 (1 - m^2)}{2 (m^2 + \cot.^2 \mu)}\right],$$

§ 18. Ope formulae nostrae $DMmd = \partial\Phi \int Z \partial z \sqrt{(1 + \mathfrak{Z}^2)}$, ipsa etiam area sphaeroidis ellipticae facile reperitur. Ea enim ita integrata, ut casu $x = o$ evanescat, nanciscimur (§ 16.)

$$DMmd = \frac{AB^2 \partial\Phi}{2n} \left(\log. \sqrt{\frac{p + n}{p - n}} + \frac{np}{p^2 - n^2}\right).$$

Ubi si ponitur $x = B$ seu $p = A$, erit

$$DPd = \left[\frac{AB^2}{2n} \log. \sqrt{\frac{A + n}{A - n}} + \frac{A^2}{2}\right] \partial\Phi,$$

cui expressioni cum non nisi Φ insit variabilis, integrando oritur superficies elliptica

$$LPD = \left(\frac{AB^2}{2n} \log. \sqrt{\frac{A + n}{A - n}} + \frac{A^2}{2}\right) LCD,$$

adeoque integrum hemisphaerium ellipticum

$$\text{IX.} \quad H = \pi \left(\frac{AB^2}{n} \log. \sqrt{\frac{A + n}{A - n}} + A^2\right).$$

Si

Si in formula supra inventa (§ 15. VII.), quae longitudinem Φ per latitudinem μ exprimit, substituitur $\mu = 90°$, ut punctum M in polum cadat, fit

$$\Phi = \text{tang. } \alpha \log. \tfrac{1}{0} + \tfrac{n \text{ tang. } \alpha}{2A} \log. \tfrac{A - n}{A + n} = \text{tg. } \alpha \log. \infty,$$

unde perspicimus, Loxodromiam post innumeros demum ambitus polo occurrere, nisi sit tang. $\alpha = o$, quo casu habemus $\Phi = 0 . \log. \infty = 0$, quia Loxodromia cum meridiano coincidit.

§ 19. Formulae VII, VIII, IX, (§ 15. 17. 18.) *sphaerae* facile accommodantur, ponendo radium sphaerae $= A = B$, ideoque $n = o$, et $m = \frac{B}{A} = 1$. Hinc resultat

$$\text{VII. } \Phi = \text{tg. } \alpha \log. \frac{2 \cos.^2 (45^0 - \frac{1}{2} \mu)}{\cos. \mu} = \text{tg. } \alpha \log. \frac{1 + \sin. \mu}{\cos. \mu} \ (\S\ 15.)$$

$$\text{et VI. } \Phi = \text{tg. } \alpha \log. \frac{\cos. \lambda \cos.^2 (45^0 - \frac{1}{2} \mu)}{\cos. \mu \cos.^2 (45^0 - \frac{1}{2} \lambda)} = \text{tg. } \alpha \log. \frac{(1 + \sin. \mu) \cos. \lambda}{(1 + \sin. \lambda) \cos. \mu},$$

unde datis binorum locorum in tellure sphaerica latitudinibus λ, μ, atque differentia longitudinum Φ, invenitur angulus rhombi α per aequationem

$$\cot. \alpha = \frac{1}{\Phi} \log. \frac{(1 + \sin. \mu) \cos. \lambda}{(1 + \sin. \lambda) \cos. \mu}.$$

Area Loxodromica in sphaera reperitur (§. 17.)

$$\text{VIII. } S = \frac{A^2 \text{ tang. } \alpha}{6} (\tfrac{7}{2} \log. \sec.^2 \mu + \log. \cos. \mu) = A^2 \text{tg. } \alpha \log. \sec. \mu$$

ideoque si punctum L non in Aequatorem cadit, area

$$\text{LMD} = A^2 \text{ tg. } \alpha (\log. \sec. \mu - \log. \sec. \lambda) = A^2 \text{ tg. } \alpha \log. \frac{\cos. \lambda}{\cos. \mu}.$$

Est denique (§ 18.) area sphaerica

$$\text{LPD} = \tfrac{\Phi}{2} A^2 (1 + \tfrac{A}{2n} \log. \tfrac{A + n}{A - n}), \text{ ac integrum hemisphaerium}$$

$$\text{IX. H} = \pi . A^2 (1 + \tfrac{A}{2n} \log. \tfrac{A + n}{A - n}).$$

Poste-

Poſterioris termini valor casu $n = o$ quo definiatur, differentiemus fractionis $\frac{1}{2} A . \frac{\log.(A+n) - \log.(A-n)}{n}$ numeratorem ac denominatorem, atque reperiemus $\left(\frac{1}{A+n} + \frac{1}{A-n}\right) \frac{A}{2} = \frac{A^2}{A^2 - n^2} = 1$, unde fit area LPD $= A^2 . \Phi$, et $H = 2 \pi A^2$, ut eſſe debet. Videmus itaque, ſphaerae ſuperficiem, quae circuli quadratura innititur, curva loxodromica non ſecus ac ſuperficiem coni (§ 10.) in duas partes diſpeſci, quae a quadratura hyperbolae dependent.

CONTI-

CONTINUATIO DISSERTATIONIS
DE CURVA LOXODROMICA
IN CORPORE QUOVIS ROTUNDO DESCRIPTA:

AUCTORE

F. T. SCHUBERT.

Conventui exhibita die 16. Nov. 1803.

§. 20.

Dissertationem de curva loxodromica Academiae scientiarum offerens, ulterius me diffundere nolui, veritus ne auditorum patientiam nimis defatigarem. Quum autem paullo postea meditationes illas ad alias plures curvas extenderem, insignes animadverti proprietates, quae in solido rotundo e revolutione Parabolae aliusque curvae transcendentis orto locum habent, quamobrem constitui, naturam Loxodromiae ejusmodi solidis descriptae investigare e formulisque in priore Dissertatione evolutis deducere.

§. 21. Sit itaque (*Fig. 1*) Loxodromia LMX descripta in solido e rotatione *Parabolae* PMD circa axem transversum PC orto; atque posito latere recto $= b$, $PC = a$, $PN = v$, $NM = u$, $CN = z$, habemus $u^2 = bv = b(a - z)$, $\partial v = -\partial z = \frac{2u\partial u}{b}$, $\partial u = 3\partial z = -\frac{1}{2}\partial z \sqrt{\frac{b}{v}}$, $\sqrt{(1 + 3^2)} = \frac{\sqrt{(b + 4v)}}{2\sqrt{v}} = \frac{\sqrt{(bb + 4u^2)}}{2u}$. Hinc nanciscimur (§. 3. II.). Tab. II.

$$\partial \Phi \cot. \alpha = \frac{\partial z \sqrt{(1+\mathfrak{z}^2)}}{u} = -\frac{\partial v}{2v} \sqrt{\frac{b+4v}{b}}$$, cujus integrale est

$$\Phi \cot. \alpha = \text{Const.} - \sqrt{\frac{b+4v}{b}} + \log. \frac{\sqrt{(b+4v)} + \sqrt{b}}{\sqrt{v}},$$

quod cum evanescere debeat casu $v = a$, nanciscimur

$$\Phi \cot. \alpha = \sqrt{\frac{b+4a}{b}} - \sqrt{\frac{b+4v}{b}} + \log. \frac{(\sqrt{(b+4v)} + \sqrt{b})\sqrt{a}}{(\sqrt{(b+4a)} + \sqrt{b})\sqrt{v}},$$

sive $\Phi \cot. \alpha = \frac{\sqrt{(bb+4ab)}}{b} - \frac{\sqrt{(b^2+4u^2)}}{b} + \log. \frac{(\sqrt{(b^2+4u^2)}+b)\sqrt{a}}{u(\sqrt{(b+4a)}+\sqrt{b})}$.

§. 22. Arcus loxodromicus L M aequalis est arcui parabolico D M in sec. α ducto. Est autem arcus PM elementum

$$\partial \sigma = \sqrt{(\partial u^2 + \partial v^2)} = \partial v (1 + \frac{b}{4v}) = \frac{\partial v \sqrt{(b+4v)}}{2\sqrt{v}},$$

cujus integrale reperitur

$$\text{P M} = \sigma = \frac{b}{4} \log. \frac{\sqrt{(b+4v)} + 2\sqrt{v}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{(b+4v)}}{2} \sqrt{v}.$$

Ubi si substituitur $v = \text{P C} = a$, nascitur arcus parabolicus

$$\text{P D} = \frac{b}{4} \log. \frac{\sqrt{(b+4a)} + 2\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{(b+4a)}}{2} \sqrt{a}.$$

Unde sequitur, esse P D — P M, seu arcum parabolicum

$$\text{D M} = \frac{b}{4} \log. \frac{\sqrt{(b+4a)} + 2\sqrt{a}}{\sqrt{(b+4v)} + 2\sqrt{v}} + \frac{1}{2} \sqrt{(ab+4aa)} - \frac{1}{2} \sqrt{(bv+4vv)}.$$

Quae expressio in sec. α ducta praebet arcum loxodromicum L M $= s$ per latus rectum Parabolae b, angulum rhombi α, atque rectas P C $= a$, P N $= v$, quibus locorum L, M, situs determinatur.

§. 23. Pro area invenienda habemus (§. 21. 5.)

$$Z \partial z \sqrt{(1+\mathfrak{z}^2)} = -\partial v \sqrt{(bb+4bv)},$$

cujus integrale ita determinatum, ut casu $v = a$ evanescat, reperitur $= \frac{(b+4a)^{\frac{3}{2}} - (\sqrt{b+4v})}{12} \sqrt{b}$.

Quo

Quo per $\partial\Phi = -\frac{\partial v}{2v}\,\text{tang.}\,\alpha\,\sqrt{\frac{b+4v}{b}}$ (§. 21.) multiplicato nanciscimur aream L M D, seu

$$S = \frac{\text{tang.}\,\alpha}{24}\int\left(\frac{\partial v\,(b+4v)^2}{v} - \frac{\partial v\,(b+4a)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(b+4v)}}{v}\right)$$

$$= \frac{\text{tang.}\,\alpha}{3}\,(v-a)\,(v+a+b) + \frac{bb}{24}\,\text{tg.}\,\alpha\,\log.\frac{v}{a}$$

$$+ \frac{(b+4a)^{\frac{3}{2}}\sqrt{b}}{12}\,\text{tang.}\,\alpha\left[\log.\frac{(\sqrt{(b+4v)}+\sqrt{b})\sqrt{a}}{(\sqrt{(b+4a)}+\sqrt{b})\sqrt{v}}\right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{b+4a}{b}} - \sqrt{\frac{b+4v}{b}}\right].$$

quae casu $v = a$ evanescit.

Quando C est parabolae focus, fit $a = \frac{b}{4}$, et area L M D $= \frac{\text{tang.}\,\alpha}{48}\,(4v-b)\,(4v+5b) + \frac{bb}{24}\,\text{tang.}\,\alpha\,\log.\frac{4v}{b}$

$$+ \frac{bb\,\text{tang.}\,\alpha}{3\sqrt{2}}\left[\log.\frac{\sqrt{(b+4v)}+\sqrt{b}}{2(\sqrt{2}+1)\sqrt{v}} + \sqrt{2} - \sqrt{\frac{b+4v}{b}}\right].$$

§. 24. Fingamus, Loxodromiam X M L (*Fig. 1.*) esse canalem fixum, in quo corpus grave e vertice P cadens descendere cogatur. Momento quo corpus in puncto m haeret, urgetur juxta verticalem $m\,b$ vi constante P ponderi suo aequali, unde oritur vis V juxta arcum loxodromicum m M, quae erit $=$ P cos. $b\,m$ M $=$ V, alteraque normalis ad arcum $=$ P sin. $b\,m$ M, quae canalem premit, nihil autem ad motus accelerationem vel retardationem contribuit. Concipiamus triangulum sphaericum elementare circa centrum m, ad $m\,n$ rectangulum (quia superficies rotunda circumvolutione meridiani parabolici $m\,n$ oritur), cujusque catheti sunt anguli $n\,m$ M $= \alpha$, $n\,m\,b = \eta$, hypothe-

 nusa

nusa $bmM = \psi$, ideoque cos. ψ = cos. α cos. η: unde habemus $V = P \cos. \alpha \cos. \eta$. Est autem tg. $\eta = \frac{\partial u}{\partial v} = \frac{b}{2u}$ (§. 21.), proinde $\cos. \eta = \frac{2u}{\sqrt{(b^2 + 4u^2)}}$, et $V = \frac{2Pu \cos. \alpha}{\sqrt{(b^2 + 4u^2)}}$.

Nuncupata itaque velocitate juxta $mM = w$, et arcu $mM = \partial s$, per leges Dynamices habemus

$$w \partial w = \frac{2gV}{P} \partial s = \frac{4gu \partial s \cos. \alpha}{\sqrt{(b^2 + 4u^2)}},$$

posito nempe spatio, quod gravia primo minuto secundo percurrunt, $= g$. Quare cum sit $\partial s = mn$ sec. α, et $mn = \sqrt{(\partial u^2 + \partial v^2)} = \frac{\partial u \sqrt{(b^2 + 4u^2)}}{b}$, fit $w \partial w = \frac{4gu \partial u}{b}$, ideoque $w^2 = \frac{4gu^2}{b}$, et $w = 2u\sqrt{\frac{g}{b}}$. Posito jam elemento temporis $= \partial t$, habemus $w = \frac{\partial s}{\partial t}$, et

$\partial s = nM$ cosec. $\alpha = u \partial \Phi$ cosec. α, ubi substituto valore $u = \frac{w\sqrt{b}}{2\sqrt{g}}$, resultat $w \partial t = \partial s = \frac{w \partial \Phi \text{ cosec. } \alpha \sqrt{b}}{2\sqrt{g}}$, h. e.

$2 \partial t \sin. \alpha \sqrt{\frac{g}{b}} = \partial \Phi$: unde sequitur, angulos $\partial \Phi$ et Φ temporibus, quibus describuntur esse proportionales.

Ex hac insigni proprietate sequitur, quodcunque grave per canalem loxodromicum in superficie solidi rotundi parabolici descriptum descendens, iisdem semper temporibus circuitum spiralis loxodromicae *a b c*, *c d e*, *(Fig. 6.)* percurrere, unde si pluria gravia descendentia *a*, *c*, *e*, semel fuerint in eodem Meridiano *p a c e*, eadem perpetuo fore in uno Meridiano seu plano verticali. Hacce theoria nititur machina, quam elapso seculo *P. Sebastianus* Academiae Scientiarum Parisiensi obtulit, quaque leges motus gravium a *Galileo* detectas ante oculos posuit *): unde non inutile duxi, machinae hujus theoriam hic de-

Tab. II.

*) V. *Hist. de l'Acad. Roy. des Sc. Année* 1699. *pag.* 116.

demonstrare, idque eo magis, quod ejus descriptio in Historia Academiae indicare videtur, motum uniformem, quo anguli Φ seu ambitus spirales percurruntur, casum maxime specialem supponere, quando nempe horum ambituum distantiae seu diametri sunt in ratione numerorum imparium 1, 3, 5, 7, etc. Hic autem demonstravimus, motum illum uniformem locum habere, quomodocunque spiralis loxodromica ad Meridianos parabolicos vel ad horizontem inclinetur, dummodo angulus sit constans, sub quo spiralis omnes meridianos secat.

§. 25. Sit P M D (Fig. 1.) ejusmodi curva, cujus natura hac aequatione definiatur:

$$2\,a\,v = u\,\surd\,(u^2 - a^2) - a^2.\ \log.\ \frac{u + \surd\,(u^2 - a^2)}{a},$$

ubi v evanescit casu $u = a$; unde pro initio abscissarum P N $= v$, h. e. in polo P ponendum est $u = a$. Curvae hujus differentiale reperitur $a\,\partial v = \partial u\,\surd\,(u^2 - a^2)$, unde posito arcu curvae $= \sigma$, fit $\partial\sigma = mn = \surd\,(\partial u^2 + \partial v^2) = \frac{u\,\partial u}{a}$. Habemus itaque (§. 2. I.) $\partial\Phi\ \cot.\ \alpha = -\frac{\partial\sigma}{u} = -\frac{\partial u}{a}$, siquidem crescente angulo Φ, arcus P M $= \sigma$, lineaeque v, u, decrescunt: unde sequitur $\Phi\ \cot.\ \alpha = \frac{b - u}{a}$, posito nempe C L $= b$, et angulo Φ capto super linea L C.

§. 26. Aequationem $\partial\sigma = \frac{u\,\partial u}{a}$ integrando reperitur arcus P M $= \frac{u^2 - a^2}{2a}$, quoniam casu $v = 0$ seu $u = a$ evanescit; ideoque arcus P D $=$ P L $= \frac{b^2 - a^2}{2a}$, atque D M $= \frac{b^2 - u^2}{2a}$, unde resultat arcus loxodromicus L M $= s =$ D M sec. $\alpha = \frac{b^2 - u^2}{2a\ \cos.\ \alpha}$.

§. 27.

§. 27. Pro area L P M $=$ S′ invenienda habemus $mn = \frac{u \partial u}{a}$, M $n = u \partial \Phi$, proinde M $n\, m\, v = \partial \partial S' = \frac{u^2 \partial u \partial \Phi}{a}$, et M P $m = \partial S' = \frac{(u^3 - a^3) \partial \Phi}{3a} = \frac{(a^3 - u^3) \partial u}{3aa}$ tang. α, qua formula sic integrata, ut casu $u = b$ evanescat, nanciscimur aream

$$\text{L P M} = S' = \frac{tang. \alpha}{3aa} \left(\frac{b^4 - u^4}{4} - a^3 (b - u)\right).$$

Sin autem area L D M $=$ S desideratur, areolam D M $m\, d = \partial$ S loco elementi M P m investigare oportet, quem in finem differentiale M $n\, m\, v = \partial \partial S = \frac{u^2 \partial u \partial \Phi}{a}$ sic est integrandum, ut casu $u = b$ evanescat, praetereaque negative accipiendum, quoniam crescente u area D M $m\, d$ decrescit. Habemus itaque

$$\text{D M } m\, d = \partial S = \frac{(b^3 - u^3) \partial \Phi}{3a} = \frac{(u^3 - b^3) \partial u}{3aa} \text{ tang. } \alpha,$$

cujus integrale cum casu $u = b$ evanescere debeat, reperitur

$$\text{L M D} = S = \frac{tang. \alpha}{3aa} \left(b^3 (b - u) - \frac{b^4 - u^4}{4}\right).$$

Duabus his areis S, S′, in summam redactis, resultat area solidi

$$\text{L P D} = \frac{tang. \alpha}{3aa} (b - u) (b^3 \quad a^3) = \frac{b^3 - a^3}{3a} \Phi;$$

ideoque posito $\Phi = 2\pi$, integra solidi superficies $= \frac{2\pi}{3a}(b^3 - a^3)$, ubi est b radius basis. Quare cum sit area sectoris L C D $= \frac{b^2 \Phi}{2} = $ P, area basis $= b^2 \pi = $ Q, erit area L P D $= \frac{2(b^3 - a^3)}{3ab^2}$ P, integrique area solidi $= \frac{2(b^3 - a^3)}{3ab^2}$ Q.

Area itaque solidi, quod e revolutione curvae hujus circum axem nascitur, a quadratura circuli dependet. Rectificatio vero curvae et Loxodromiae in solido descriptae, non minus quam quadratura algebraice assignari potest, concessa scilicet ejus constructione vel dato angulo constante α.

§. 28. Notatu non videtur indignum, curvam hanc maxime transcendentem ita tamen esse comparatam, ut ejus arcus, area, corpus ex ejus revolutione ortum, immo vel arcus et area Loxodromiae in hujusmodi corpore descriptae, quam simplicissime exprimantur. Unde hoc exemplum hic proposuisse, atque nonnulla adhuc de curvae hujus natura dicere non inutile esse arbitror. Aequatio ad curvam nostram erat

$$2\,a\,v = u\sqrt{(u^2 - a^2)} - a^2 \log. \frac{u + \sqrt{(u^2 - a^2)}}{a}$$
$$= u\sqrt{(u^2 - a^2)} + a^2 \log. \frac{u - \sqrt{(u^2 - a^2)}}{a},$$

unde ob signorum radicalium ambiguitatem, duplicem obtinemus expressionem:

$$2\,a\,v = + u\sqrt{(u^2 - a^2)} + a^2 \log. \frac{u - \sqrt{(u^2 - a^2)}}{a},$$
$$\text{et } 2\,a\,v = - u\sqrt{(u^2 - a^2)} + a^2 \log. \frac{u + \sqrt{(u^2 - a^2)}}{a},$$

quarum utraque, ob $u + \sqrt{(u^2 - a^2)} = \frac{a^2}{u^2 - \sqrt{(u^2 - a^2)}}$, sic generatim exprimi potest:

$$2\,a\,v = \pm\left(u\sqrt{(u^2 - a^2)} + a^2 \log. \frac{u - \sqrt{(u^2 - a^2)}}{a}\right):$$

unde patet, pro quocunque ipsius u valore ordinatam v binos recipere valores oppositos at aequales. Posito autem $u = a$, v evanescit, et quoties $u < a$, valor ipsius v est impossibilis. E quibus conjunctis perspicimus, curvae figuram talem fore qualem *Figura septima* repraesentat, ubi est $PA = a$, $PQ = NM = u$, Tab. II.
$PN = QM = QM' = v$. Cum autem vertex P esse debeat solidi rotundi polus, atque litera v abscissas in axe, u autem ordinatas denotet, solidum e revolutione curvae $M'AM$ circa axem PN oritur, unde videmus, meridianos AM versus axem esse convexos, in corporisque parte interiore esse vacuum, cylindrum scilicet cujus radius $PA = a$.

§. 29.

§. 29. Jam quoque spatii plani A M Q area, sive curvae quadratura in potestate erit. Habemus nempe differentiale areae P N M A $= u\,\partial v = \frac{u\,\partial u\,\sqrt{(u^2-a^2)}}{a}$, quo sic integrato, ut casu $v = 0$ seu $u = a$ evanescat, invenimus aream A R M $= \frac{\sqrt{(u^2-a^2)^3}}{3a}$. Areae autem A Q M differentiale est $=$

$$v\,\partial u = \frac{u\,\partial u\,\sqrt{(u^2-a^2)}}{a} + \frac{a}{2}\,\partial u \,.\, \log.\,\frac{u-\sqrt{(u^2-a^2)}}{a}.$$

Posterius autem integrale logarithmicum reperitur $=$

$$\frac{au}{2}\,\log.\,\frac{u-\sqrt{(u^2-a^2)}}{a} - \frac{a}{2}\cdot\frac{u^2-u\sqrt{(u^2-a^2)}-a^2}{u-\sqrt{(u^2-a^2)}},$$

ubi si substituitur

$$a\,\log.\,\frac{u-\sqrt{(u^2-a^2)}}{a} = 2v - \frac{u}{a}\sqrt{u^2-a^2}),$$

idem integrale nanciscitur formam

$$uv - \frac{u^3\sqrt{(u^2-a^2)} - u^4 + 2a^2u^2 - a^2u\sqrt{(u^2-a^2)} - a^4}{2a(u-\sqrt{(u^2-a^2)})}$$

$$= uv - \frac{u(u^2-a^2)\sqrt{(u^2-a^2)} - (u^2-a^2)^2}{2a(u-\sqrt{(u^2-a^2)})} = uv - \frac{(u^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{2a}.$$

Quamobrem ob $\int\frac{u\,\partial u\,\sqrt{(u^2-a^2)}}{2a} = \frac{(u^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{6a}$, obtinemus aream

$$A\,Q\,M = uv - \frac{(u^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{3a} - av$$

unde resultat summa A R M + A Q M $= (u-a)\,v =$ rectangulo A Q M R.

§. 30. Spatium solidum, vel volumen corporis, quod e revolutione curvae A M circum axem P N oritur, etiam algebraice exprimere licet. Repraesentante etenim P A M N sectionem solidi per axem, basis illius circulus erit radio N M $= u$ descriptus, ideoque basis area $= u^2\pi$. Elementum itaque solidi tanquam cylindrum considerare licet, cujus basis $= u^2\pi$, altitudo $= \partial v$, unde reperitur hoc elementum $= \frac{\pi u^2\,\partial u}{a}\sqrt{(u^2-a^2)}$,

cu-

cujus integrale est

$$= \frac{\pi u (2u^2 - a^2) \sqrt{(u^2 - a^2)}}{8a} + \frac{a^3 \pi}{3} \log. \frac{u - \sqrt{(u^2 - a^2)}}{a},$$

quod ob $a^2 \log. \frac{u - \sqrt{(u^2 - a^2)}}{a} = 2av - u\sqrt{(u^2 - a^2)}$ (§. 28.) etiam sic exprimi potest

$$\frac{\pi}{4} \left(\frac{u}{a} (u^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} + a^2 v \right),$$

quod est solidum A M R, quoniam casu $u = a$ vel $v = 0$ evanescit.

Si aream $ARM = S$ ponimus et cylindrum $PARN = C$, habemus $\frac{(u^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{a} = 3S$ (§. 29.), et $C = \pi a^2 v$, unde fit solidum $AMR = \frac{3\pi u S + C}{4}$, et addito cylindro C, solidum $PAMN = \frac{3\pi u S + 5C}{4}$.

§. 31. Cum Loxodromia instar *spiralis* innumeros circa polum corporis rotundi ambitus facit, facile quidem praevidere licet, omnium curvarum loxodromicarum projectiones in planum generaliter fore spirales, in specie vero diversas pro diversa solidi natura, in cujus superficie Loxodromia fuit descripta. Si Loxodromia L M X (*Fig. 1.*) in planum L C D, cui axis solidi normaliter insistit, ortographice projicitur, aequatio projectionem definiens resultabit, si in aequatione ad Loxodromiam inter Φ, u, v, variabilis v exterminatur: quo facto punctum quodvis B in projectione dabitur per aequationem inter angulum $\Phi = LCB$ et radium vectorem $u = CB$. Cum enim curva meridiani seu generatrix PMD data sit, oportet ut sit $NM = u$ functio ipsius $MB = z$, et vice versa, unde erit $z = U$, quo valore in aequatione (§. 2. I.) $u\,\partial\Phi \cot. \alpha = \sqrt{(u^2 + z^2)}$ substituto, obtinemus aequationem inter Φ et u, quae est ad projectionem Loxodromiae.

§. 32. Si solidum est *conus* rectus habemus (§. 7.) $u = (a - z)$ tg. β, $\partial z = - \partial u$ cot. β, proinde

$$\sqrt{(\partial u^2 + \partial z^2)} = - \partial u \text{ cosec. } \beta,$$

unde fit aequatio ad projectionem

$$u \, \partial \Phi \text{ cot. } \alpha = - \partial u \text{ cosec. } \beta, \text{ h. e. } \frac{\partial u}{u} = - \partial \Phi \text{ cot. } \alpha \text{ sin. } \beta,$$

atque integrando

$$\log. \frac{b}{u} = \Phi \text{ cot. } \alpha \text{ sin. } \beta, \text{ posito } CL = b.$$

Perspicimus hinc, quod bene notari meretur, projectionem Loxodromiae in Cono descriptae esse *spiralem logisticam*. Quae cum perfecte sit cognita, plura de ea dicere superfluum foret.

§. 33. Quando solidum est *sphaera*, ejusque centrum C, radius $CL = CM = b$, est

$$z = \sqrt{(b^2 - u^2)}, \ \partial z = \frac{-u \, \partial u}{\sqrt{(b^2 - u^2)}}, \ \sqrt{(\partial u^2 + \partial z^2)} = \frac{-b \, \partial u}{\sqrt{(b^2 - u^2)}},$$

unde nanciscimur aequationem

$$\partial \Phi \text{ cot. } \alpha = \frac{-b \, \partial u}{u \sqrt{(b^2 - u^2)}},$$

cujus integrale est

$$\Phi \text{ cot. } \alpha = \log. \frac{b + \sqrt{(b^2 - u^2)}}{u},$$

ubi decrescente u angulus Φ in infinitum crescit, et casu $u = 0$
Tab. II. fit $\Phi = \text{tang. } \alpha. \log. \frac{b}{0} = \infty$. Sit itaque LB (*Fig. 8.*) spiralis aequatione ista definita, sintque puncta C, L, B, eadem quae in *Figura prima* hisce literis fuere designata: erit itaque $LC = b$, $CB = u$, $LCB = \Phi$, et $\partial \Phi = \frac{-b \, \partial u \text{ tang. } \alpha}{u \sqrt{(b^2 - u^2)}}$. Ducta jam recta DBT tangente curvam in puncto B, ac elemento circuli Bb radio CB descripti, habemus $Bb = u \, \partial \Phi = - \frac{b \, \partial u \text{ tang. } \alpha}{\sqrt{(b^2 - u^2)}}$. Quare si in tangentem agatur normalis CD, erit $bB\beta = BCD$, et

Bb :

$Bb : b\beta = CD : BD$, sive $CD : BD = u\,\partial\Phi : -\partial u$, unde reperitur tnag. $CBD = \frac{CD}{BD} = \frac{b\,tang.\alpha}{\sqrt{(b^2 - u^2)}}$. Ubi si substituitur $u = b$, fit tnag. $CBD = \infty$, quod indicat, curvam in puncto L esse normalem ad radium vectorem CL. Posito autem $u = o$, fit tang. $CBD =$ tang. α: idemque generaliter concludere licet, in omnibus hisce spiralibus angulum tangentis cum radio vectore in polo seu vertice C angulo constanti α fieri aequalem, sub quo Meridianos secat ipsa Loxodromia.

Areae BCL elementum est
$BCc = \frac{1}{2} BC \cdot Bb = \frac{1}{2} u^2 \partial\Phi = -\frac{bu\,\partial u\,tang.\alpha}{2\sqrt{(b^2 - u^2)}}$, ideoque area $BCL = \frac{1}{2} b$ tang. $\alpha \sqrt{(b^2 - u^2)}$, quae casu $u = b$ evanescit. Posito vero $u = o$, area fit $= \frac{1}{2} bb$ tg. α. Capto angulo $LCM = \alpha$, ac producto crure CM, donec perpendiculo LM ad CL in M occurrerit, triangulum CLM erit $= \frac{1}{2} CL \cdot LM = \frac{1}{2} bb$ tang. α. Hoc itaque triangulum limes est vel area ultima, quam innumerae revolutiones circa polum C peractae includunt.

§. 34. Projectio curvae transcendentis, quam supra (§. 25.) contemplati sumus, per hanc aequationem ibidem inventam definitur:

$$\Phi = \frac{b-u}{a}\ \text{tg.}\ \alpha \quad \text{sive} \quad u = b - a\Phi\ \text{cot.}\ \alpha;$$

unde patet, curvam hanc non sensu stricto esse spiralem, si quidem Φ non in infinitum crescit.

Areola CBc est $= \frac{1}{2} u^2 \partial\Phi = -\frac{u^2\,\partial u}{2a}$ tang. α, unde integrando obtinetur

$$\text{area } LCB = \frac{(b^3 - u^3)\,tang.\alpha}{}.$$

 Prae-

Praeterea reperitur tang. CBD $= \frac{u \partial \Phi}{-\partial u}$ (§. 33.) $= \frac{u \, tang. \, \alpha}{a}$, ideoque C B D $= \alpha$ casu $u = a$. Angulus itaque C B D hic non in polo C, sed in puncto quod vertici A (*Fig.* 7.) curvae A M respondet, aequalis fit angulo α, sub quo Meridianos in solidi superficie secat Loxodromia.

ME-

MÉMOIRE

Sur les tables de Population des Etablissemens Impériaux pour les Mines de Cathérinebourg, présentées à l'Académie par S. E. Mr. Hermann, Capitaine en Chef des Mines.

PAR

Mr. KRAFFT.

Les tables qui servent de base à ce Mémoire, sont faites avec beaucoup de soin et d'après un plan à qui le Chef de ces Mines a donné plus d'étendue qu'on n'en donne à l'ordinaire à ces sortes de tables. Etant les premières sous ce point de vue, qu' on ait pour quelque contrée de la Russie, il seroit à souhaiter qu'elles donnassent l'occasion à l'établissement d'un Bureau *Impérial* des tables de population de l'Empire de Russie. Mr. de Hermann a fait construire deux espéces de tables. 1) Tables de population. 2) Tables de productions. Je ne m'occupe dans ce Mémoire, que des prémieres, pour les rediger et les présenter dans leurs résultats principaux.

I. Table générale des nombres annuels des Mariages, des Naissances et des Morts.

Mariages.	Naissances.	Morts.
177	818	423

II)

II. Table specielle des nombres annuels des Mariages.

Mariages.	entre
A . . 143	des Garçons et des Filles.
B . . . 9	des Veufs et des Filles.
C . . . 7	des Garçons et des Veuves.
D . . . 18	des Veufs et des Veuves.
Somme 177	

III. Table specielle des nombres annuels des Naissances.

Naissances.			Dans ce nombre Enfans nés-morts.		
Males.	Femelles.	Somme.	M.	F.	S.
401	417	818	1	0	1

IV. Table specielle des nombres annuels des Morts.

Morts.			Dans ce nombre Corps trouvés morts.		
M.	F.	Somme.	M.	F.	S.
225	198	423	0	0	0

V.

V. Table specielle des nombres annuels des Morts rangés selon l'âge.

Age des morts.	M.	F.	Sommes.
Enfans nes-morts.	1	0	1
Entre 0 — 1 ans.	92	86	178
1 — 5	38	39	77
5 — 10	4	6	10
10 — 15	6	3	9
15 — 20	7	8	15
20 — 30	9	8	17
30 — 40	14	15	29
40 — 50	12	8	20
50 — 60	13	6	19
60 — 70	17	13	30
70 — 80	9	3	12
80 — 90	2	3	5
dessûs 90	1	0	1
Sommes.	225	198	423

VI. Table reduite des Morts rangés selon l'âge.

Age des morts.	Parmi 1000 morts M. il y a	F.	Personnes.
Enfans nés-morts.	4,4	0,0	2,4
Entre 0 — 1 ans.	408,9	434,3	420,8
1 — 5 —	168,8	196,9	182,0
5 — 10 —	17,8	30,3	23,6
10 — 15 —	26,7	15,1	21,3
15 — 20 —	31,1	40,4	35,5
20 — 30 —	40,0	40,4	40,2
30 — 40 —	62,2	75,7	68,5
40 — 50 —	53,3	40,4	47,3
50 — 60 —	57,8	30,3	44,9
60 — 70 —	75,5	65,6	70,9
70 — 80 —	40,0	15,1	28,4
80 — 90 —	8,9	15,1	11,8
dessûs 90 —	4,4	0,0	2,4

VII.

VII. Table de la vitalité des habitans.

Age qu' ils accomplissent.	De 1000 nouveaux-nés,		
	Garçons.	Filles.	Enfans.
Viennent vivans au monde	995,4	999,6	997,6
accomplissent la 1 ann.	586,5	565,3	576,8
5 —	417,7	368,4	394,8
10 —	399,9	338,1	371,2
15 —	373,2	323,0	349,9
20 —	341,1	282,6	314,4
30 —	302,1	242,2	274,2
40 —	239,9	166,5	205,7
50 —	186,6	126,1	158,4
60 —	128,8	95,8	113,5
70 —	53,3	30,2	42,6
80 —	13,3	15,1	14,2
90 —	4,4	0,0	2,4

VIII. Table ſpecielle des nombres annuels des Morts rangés ſelon les mois.

Mois.	M.	F.	Sommes.
Janvier. .	11	10	21
Fevrier. .	19	13	32
Mars. . .	14	15	29
Avril. . .	16	15	31
Mai. . . .	16	12	28
Juin. . . .	20	15	35
Juillet . .	29	21	50
Août. . . .	34	30	64
Septembre.	17	21	38
Octobre. .	13	8	21
Novembre.	18	21	39
Decembre.	18	17	35
Total.	225	198	423

Les Tables précédentes nous fourniſſent d' abord les ſuivans

Re-

Resultats généraux.

L'an 1802, parmi 16816 habitans des établissemens pour les mines de Catherinebourg et pour celles qui y appartiennent:

1) Il se fit 177 mariages par an.

2) Il y naquit 818 enfans, dont 401 garçons et 417 filles.

3) Il y mourut 423 personnes, dont 225 mâles et 198 femelles.

4) Il y eut un excédant annuel des naissances sur les morts de 395 personnes.

Pour présenter avec ordre les resultats detaillés qui derivent de ces mémes Tables, je les range sous les mêmes titres, que j'ai cru pouvoir fixer dans mes Mémoires precedans et inserés aux Actes de l'Académie, pour servir de regle dans la rédaction de pareilles Tables dans un Bureau des Tables de population de l'Empire de Russie.

I. Nombre des hommes que ces Tables embrassent selon le sexe et l'âge.

Entre	M.	F.	S.
0 — 1 ans.	301	273	574
1 — 10 —	2011	1995	4006
10 — 20 —	1562	1303	2865
20 — 40 —	2851	2708	5559
40 — 60 —	1555	1288	2843
60 80 —	407	500	907
80 — 100 —	32	27	59
dessus 100 —	1	2	3
Total.	8720	8096	16816

Pour avoir un terme de comparaison, je trouve que cette population approche beaucoup de celle de la ville de Jobolsk, de la quelle on peut supposer le nombre des habitans à 18000.

Dans la totalité de cette population de 16816 personnes il y a par rapport à leur genre de vie.

De l' état	M.	F.	S.
— des Mines et de la guerre.	6778	6724	13502
— civil	231	195	426
— du Clergé	25	31	56
Particuliers	881	236	1117
Sous la Capitation . .	805	910	1715
Total	8720	8096	16816

Cette population, relativement aux différentes contrées de sa demeure, se partage, selon les Tables de Mr. Hermann, en 5 sections: qui sont 1) la ville de Catherinebourg (C); 2) Les mines de Béresov, Pischminsk et Ouchtousk (D); 3) Les mines de Nischno-Isetsk N); 4) Les mines de Kamensk (K) et 5) celles de Miaesk (M).

Ceci supposé, on a la distribution suivante de la population:

(C) .. 5024; (D) .. 6907; (N) .. 751; (K) .. 2016; (M) .. 2118

II.

II Fécondité intentionelle.

1) Le nombre annuel des mariages a été $= 177$; j'en tire la mesure de la fecondité intentionelle ou le rapport entre le nombre annuel des mariages et celui de la population $= \frac{1}{95}$. c. à. d. qu' entre 95 personnes il se fit un mariage par an. Cette mesure est considerablement plus petite, que celle qui a lieu pour Tobolsk où elle est $= \frac{1}{75}$; mais elle surpasse de beaucoup celle de Petersbourg $= \frac{1}{126}$.

2) Il merite d'être remarqué et n'échappera pas à l'attention du Chef, que, considerant la population entiere pour la quelle nous venons de trouver cette mesure $= \frac{1}{95}$, dans chacune des cinq sections individuellement, on rencontre dans cette mesure de très-grandes différences; car elle est

pour C $= \frac{1}{98}$	elle est donc
— D $= \frac{1}{89}$	la plus petite, et bien petite, pour les mines de Kamensk et Miaesk.
— N $= \frac{1}{58}$	la plus grande, et bien forte, dans les mines de Nischno-Isetsk.
— K $= \frac{1}{112}$	moyenne, et encore mediocre, dans la ville de Catherinebourg et les autres trois mines.
— M $= \frac{1}{119}$	

J'ai

J'ai remarqué dans mon premier Mémoire (*), que cette mesure, qui influe immediatement sur les progres de la population, est sujette à de grandes differences pour des endroits différens, et à des changemens bien sensibles pour un même endroit en différentes circonstances, et que les causes physiques, morales et civiles d'où resultent ces differences et ces changemens, sont en grande partie du ressort du Gouvernement.

3) J'y ai exposé aussi, sous quel point de vu il seroit interessant, qu'on marquat dans les tables l'âge des personnes qui se marient, sur tout si ces tables s'etendoient sur des Gouvernemens entiers de l'Empire. Mr. Hermann en a tenu compte dans ses tables:

Age des personnes qui se sont mariées.

entre.	M.	F.	S.
15 — 20 ans.	70	95	165
20 — 40 —	96	77	173
40 — 80 —	11	5	16
Total.	177	177	354

4)

*) Acta Acad. Scient. Imper. Petrop. pro anno 1782. Pars prior pag. 1.

4) Il est interessant aussi pour le Gouvernement, d'avoir la classification de la population relativement à leur état par rapport aux mariages. Mr. Hermann en a tenu compte aussi:

La population entiere de 16815 personnes consiste en

	Garçons et Filles.			Mariés.			Veufs et Veuves.		
Age.	M.	F.	S.	M.	F.	S	M.	F.	S.
dessous 15 ans.	2622	2728	5350						
15 — 50 —	1342	735	2077	2831	3005	5836	584	297	881
dessus 50 —	47	27	74	1029	872	1901	265	432	697
Total.	4011	3490	7501	3860 *	877	7737	849	729	1578

Pour tirer des conclusions de cette table, il faudroit que les limites des âges qui lui servent de base, fussent plus resserrées.

III. Fécondité réelle

1) Le nombre annuel des naissances a été = 818, d'où derive la mesure de la fécondité réelle ou le

*) Il y avoit 17 maris d'absens en d'autres commandemens pendant toute l'année 1801, à la quelle ces tables se rapportent.

le rapport entre le nombre annuel des naissances et celui des mariages = 4, 6. c. à. d. qu' on comptoit 46 naissances sur 10 mariages. Cette fécondité n' est ordinairement que 4; pour Petersbourg elle est 3, 7 et pour Tobolsk elle n' est même que 3.

2) En examinant cette mesure sur les cinq sections individuellement qui composent la population entiere, j' ai cru avoir observé une disparité digne d' être remarquée; car j' ai trouvé cette mesure

pour C = 4,7	elle est donc
— D = 4,4	la plus petite, et même bien petite, dans les mines de Nischno-Isetsk.
— N = 2,9	la plus grande, et même extraordinairemeut grande, dans celles de Miaesk.
— K = 3,6	moyenne à Catherinebourg et dans les autres quatre mines.
— M = 7,5	

Il est digne d' attention, que la mesure de la fécondité réelle est la plus petite dans le même endroit où celle de la mesure intentionelle a été trouvée la plus grande, et que la mesure de la fécondité réelle est la plus grande dans un des deux endroits où celle de la fécondité intentionelle a été trouvée la plus petite. J' ai remarqué dans mon Mémoire cité cy-dessûs, qu' il importe à l' état de connoitre la mesure de la fecondité réelle de ses pro-

provinces, parceque, quoique considerée généralement elle soit en tout tems et par tout presque la même, cependant elle est sujette à des différences et des changemens, qui sont causés par des mariages ou tardifs ou prématurés ou qui tiennent à des causes morales, oeconomiques ou politiques qui sont un objet du Gouvernement.

3) Dans la totalité de 818 naissances il y a eu 401 garçons et 417 filles. Le nombre des naissances mâles a été inferieur à celui des naissances femelles dans le rapport de 96 à 100. Il est donc arrivé ici le contraire de ce, qui, dans toute quantité considerable des naissances arrive par tout et en tout temps, savoir que le nombre des naissances mâles surpasse celui des naissances femelles dans le rapport de 105 à 100. Mais sans doute, ici le nombre des naissances est trop petit, pour qu' on puisse y entrevoir cette loi ailleurs constante de la Nature.

IV. Fécondité générale.

1) Le nombre annuel des naissances a été = 818, ce qui donne la mesure de la fecondité generale ou le rapport entre le nombre annuel des naissances et celui de la population = $\frac{1}{20}$, c. a. d. qu' on comptoit une naissance par an sur 20 habitans; à Tobolsk elle n' est que $\frac{1}{24}$ et à Petersbourg seulement $\frac{1}{31}$.

2) Cette mesure, examinée pour les cinq sections mentionnées cy-dessus qui composent la population entiere que ces tables embrassent, offre aussi de sensibles différences; elle est:

pour C $= \frac{1}{21}$	elle est donc
— D $= \frac{1}{20}$	la plus petite pour les mines de Kamensk.
— N $= \frac{1}{20}$	la plus grande, et même bien forte, pour celles de Miaesk.
— K $= \frac{1}{30}$	la moyenne pour la ville de Cathérinebourg
— M $= \frac{1}{16}$	et les autres trois mines.

3) Pour tirer toute l'utilité de tels paralleles, le Gouvernement ne se doit pas borner à connoitre, pour ces différentes provinces la seule mesure de la fécondité générale; elle est le produit des deux mesures précédentes et peut par conséquant paroitre satisfaisante, quoique l'un et l'autre de ses deux facteurs, s'écartent, en sens opposé, des justes valeurs qu'ils devroient avoir. La mesure de la fecondité générale pour N, qui a été trouvée $= \frac{1}{20}$, est sans doute satisfaisante; là à Nischno-Isetsk on compte une naissance sur 20 habitans; cependant cet endroit est par rapport à la fecondité réelle bien en arriere vis-à-vis des autres, car on n'y compte que 29 naissances sur 10 mariages, et il ne s'éléve au niveau des autres en apparence, que par le plus grand nombre des mariages, quoique peu feconds, car on y compte un mariage

mariage sur 58 habitans. Au contraire les mines de Miaesk ont une forte fecondité générale; on y compte une naissance sur 16 habitans, malgré le petit nombre des mariages, car on n' y en compte qu' un sur 119 habitans, mais la fecondité reelle y est toute particuliere, car on y compte 75 naissances sur 10 Mariages. Les unes et les autres de ces circonstances qu' on n' aperçevroit peut-être pas même, sans le secours de pareilles tables, meritent l' attention du Gouvernement et des recherches ulterieures.

V. Mortalité générale.

1) Le nombre annuel des morts a été = 423; j' en tire la mesure de la mortalité génerale ou le rapport entre le nombre annuel des morts et celui de la population = $\frac{1}{40}$, c. a. d. que de 40 Personnes il en meurt une par an. Elle est bien plus petite, que celle de Tobolsk ou Petersbourg, qui est $\frac{1}{32}$ ou $\frac{1}{35}$.

2) Cette Mesure se trouve individuellement

pour C = $\frac{1}{52}$	elle est donc
— D = $\frac{1}{32}$	la plus petite pour la ville de Cathérinebourg, et les Mines de Nischno-Isetsk et Kamensk.
— N = $\frac{1}{54}$	
— K = $\frac{1}{54}$	la plus grande pour celles de Miaesk et les trois autres.
— M = $\frac{1}{33}$	

Ii 2 Une

Une si petite mortalité, comme en C, N et K est presque sans exemple; de 1000 vivans il se fait une perte annuelle à la campagne de 25; dans les grandes villes de 42; dans les petites de 31 personnes; mais à Cathérinebourg, à Nischno-Isetsk, à Kamensk seulement de 19. Même les mines de Miaesk n' en perdent annuellement que 31, et égalent à cet égard encore le sort des petites villes.

Avec tout cela il est digne de recherches, d' où il derive, qu' en deux de ces cinq sections la mortalité surpasse de $\frac{7}{10}$ celle des autres.

3) Le nombre annuel des hommes morts est superieur à celui des femmes mortes en raison de 114 à 100, c' est à peu près le même rapport que celui des habitans de l'un et de l'autre sexe, qui est 107 à 100. On peut en conclure, qu' il n' y a gueres des maladies considerablement plus funestes à un sexe qu' à l' autre.

5) Le nombre annuel des naissances surpasse celui des morts en raison de 195 à 100; il est presque le double de celui-cy. L' excédant total des naissances sur les morts est 395, et nommément

pour C = 145	il est donc
— D = 126	le plus petit pour Nischno-Isetsk et Kamensk.
— N = 23	
— K = 79	
— M = 72	le plus grand pour Cathérinebourg.

Mais

Mais pour en tirer des conclusions sur la vigeur interne de la population dans ces cinq sections, il faut comparer ces excédans à leurs populations respectives, et on trouve

pour C = $\frac{1}{34}$	elle est donc
— D = $\frac{1}{55}$	la plus petite dans les mines de Kamensk, Beresov etc.
— N = $\frac{1}{35}$	la plus grande dans celles de Miacsk.
— K = $\frac{1}{69}$	la moyenne à Cathcrinebourg et Nischno-Isetsk.
— M = $\frac{1}{49}$	

La différence qui à cet égard a lieu entre K et M, malgré l'égalité fort approchante de leurs populations, merite de l'attention et s'explique immediatement par ce qui a èté dit cy-dessus.

VI. Mortalité specielle des âges.

1) Nombre des Enfans nés-morts.

Dans la totalité de 818 naissances il n'y a eu, qu'un seul enfant né-mort; il y en auroit donc eu 12 sur 10000 naissances, au lieu qu'à Pétersbourg il y en a 70 sur autant. De 818 mêres en couche il n'en est morte dans les travaaux de l'enfantement que 5; c'est 6 sur 1000. Les tables de Petersbourg ont fait voir le même rapport pour les mêres russes en couches, au lieu qu'il en meurt 15 chez les habitans étrangers de la ville.

2)

2) Mortalité des enfans nouveaux-nés.

La mesure de la mortalité specielle pour la premiere année de l'âge de la vie est telle que de 1000 enfans nouveaux-nés il y a eu 423 d'enlevés avant que d'accomplir la premiere année; c'est $\frac{2}{5}$ de la totalité des naissances. La moitié de toutes les naissances y est au tombeau avant l'âge de 5 ans, au lieu que même à Petersbourg elle atteint l'âge au de là de 20 ans.

Cette prodigieuse mortalité des enfans nouveau-nés merite toute l'attention du Gouvernement.

Mr. Hermann ne donne dans ces tables l'âge des morts que pour la totalité de la population, de façon qu'on n'en peut point conclure la mesure de la mortalité specielle des âges pour chacune des cinq sections séparement, ce qui seroit à desirer pour en faire le parallele, c'est pourquoi les remarques qui suivent, ne sont que generales.

3) Mortalité de l'Enfance.

1) De 1000 enfans tous âgés d'un an il y a 393 d'enlevés avant que d'accomplir la 15me année; même à Petersbourg il n'y en a que 215.

2) Dans cette periode la mortalité des garçons est inferieure à celle des filles en raison de 100 à 118. Dans la premiere année elle l'a été en raison de 100 à 104.

4) Mortalité du moyen âge et de la vieillesse.

1) La mesure de la mortalité specielle de la periode de 20 à 60 ans a été telle, que de 1000 personnes toutes âgées de 20 ans il y a eu 640 d'enlevés par la mort durant cette belle periode de la vie. Il n'en devroit mourir selon le cours ordinaire de la nature qu'environ 500; à Pétersbourg il en meurt au de là de 800. Dans cette periode la mortalité des hommes est inferieure à celle des femmes en raison de 100 à 106.

2) Il n'est pas sans intérêt de remarquer, que dans les établissemens aux quels ces tables se rapportent, la mortalité des hommes est dans tous les âges inferieur à celle de l'autre sexe, au lieu qu'à Pétersbourg, elle est inferieure à celle des femmes dans l'enfance, et l'emporte tout à coup et considerablement dès l'entrée de la 20me année.

3) De 1000 enfans nouveaux-nés il n'y a que 2 qui accomplissent la 90 année, au lieu que 9 y devroient atteindre.

VII. Force des Maladies.

1) De toutes les maladies consignées dans les tables, celles qui ont causé le plus de mortalité, sont les fievres chaudes, les Dissenteries et la Consomption.

Maladies

Maladies.	Morts.		
	M.	F.	S.
Fievr. chaud.	38	41	79
Dissenter.	26	25	51
Consompt.	21	5	26
Total	85	71	156

La force de ces trois maladies est donc telle, qu'ensemble elles contribuent pour presqu' un tiers à la totalité des morts.

2) Au nombre des maladies d'enfans celles qui ont fait le plus de ravage, sont les convulsions qui ont emporté 44, et la petite verole naturelle qui a emporté 47 enfans; l'ensemble 91 est $\frac{1}{9}$ de toutes les naissances. La petite verole en enleve ordinairement $\frac{1}{14}$; ici elle n'en a enlevé qu' $\frac{1}{17}$; mais à Petersbourg seulement $\frac{1}{31}$, même avant l'epoque de l'inoculation.

3) Les tables nous laissent dans l'incertitude, si l'Inoculation y est en vogue ou non?

4) Il n'y a eu que 9 personnes qui ont peri par différens accidens, dont 5 noyes.

RECHER-

RECHERCHES
SUR LES INTÉGRALES PREMIERES DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES DU SECOND DEGRÉ ET DU TROISIÈME À TROIS VARIABLES

PAR

Mr. *JEAN TREMBLEY.*

Présenté à la Conférence le 21. Sept. 1803.

Lorsque la composition des équations aux différences partielles du second degré est telle que les différentielles ne sont pas linéaires, ces équations paraissent peu traitables, et les Géomètres s'en sont peu occupés jusqu'ici. Une recherche plus simple que l'analyse générale est de chercher les Intégrales premières de ces sortes d'équations, c'est-à-dire les équations différentielles du premier degré, de la différentiation desquelles elles résultent. Mr. le Commandeur de Nieuport dans les Mélanges mathématiques imprimés à Bruxelles en 1794, a traité ce sujet très-savamment. Mais cet habile Mathématicien a régardé les solutions générales comme impossibles, à cause de certaines difficultés d'Analyse, qui ne paraissaient pas aisées à surmonter. C'est pourquoi il a eu recours à des méthodes particulières très ingénieuses. Mon but dans ce mémoire est de traiter la chose généralement, et de faire voir comment en peut

lever les difficultés dont parle Mr. de Nieuport. Je traiterai d'abord des équations à trois variables qui offrent des résultats plus simples et plus satisfaisans. Je jetterai ensuite un coup d'oeil sur les équations à quatre et à cinq variables, parceque malgré la complication de leurs résultats, elles fournissent quelques propositions qui m'ont paru mériter l'attention des Geomètres.

§. 1. Soit $\psi = F : \Phi$, ψ, Φ étant des fonctions de x, y, z, p, q, et ayant $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$, ensorte que $p = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $q = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, et par conséquent $\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial y}\right) = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial \partial z}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)$, on fera pour abrêger, $n = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)$, $n' = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$; $m = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)$, $m' = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$. On aura maintenant, en différentiant successivement suivant x, y,

$$n + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) = \left(n' + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\right) F' : \Phi$$

$$m + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right) = \left(m' + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\right) F' : \Phi.$$

Prenant maintenant l'équation

$$n + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) + \alpha\left(m + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\right) = 0,$$

on aura l'équation de condition

$$n' + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) + \alpha\left(m' + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\right) = 0.$$

Donc $$\alpha = -\frac{\left(n' + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\right)}{m' + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)}$$

$$= -\frac{\left(n + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\right)}{m + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)}$$

Donc

Donc $(n + (\frac{\partial\psi}{\partial p})(\frac{\partial p}{\partial x}) + (\frac{\partial\psi}{\partial q})(\frac{\partial q}{\partial x}))(m' + (\frac{\partial\Phi}{\partial p})(\frac{\partial p}{\partial y}) + (\frac{\partial\Phi}{\partial q})(\frac{\partial q}{\partial y}))$
$- (n' + (\frac{\partial\Phi}{\partial p})(\frac{\partial p}{\partial x}) + (\frac{\partial\Phi}{\partial q})(\frac{\partial q}{\partial x}))\ (m + (\frac{\partial\psi}{\partial p})(\frac{\partial p}{\partial y}) + (\frac{\partial\psi}{\partial q})(\frac{\partial q}{\partial y})) = 0,$
ou en développant cette équation,

$$((\frac{\partial\psi}{\partial p})(\frac{\partial\Phi}{\partial q}) - (\frac{\partial\psi}{\partial q})(\frac{\partial\Phi}{\partial p}))((\frac{\partial\partial z}{\partial x^2})(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}) - (\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y})^2)$$
$$+ (m'(\frac{\partial\psi}{\partial p}) - m(\frac{\partial\Phi}{\partial p}))(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2})$$
$$+ (m'(\frac{\partial\psi}{\partial q}) - m(\frac{\partial\Phi}{\partial q}) - n'(\frac{\partial\psi}{\partial p}) + n(\frac{\partial\Phi}{\partial p}))(\frac{\partial\partial z}{\partial y\partial x})$$
$$+ n((\frac{\partial\Phi}{\partial q}) - n'(\frac{\partial\psi}{\partial q}))(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2})$$

$- n'm + nm' = 0.$ Soit donc proposée l'équation,

$$N((\frac{\partial\partial z}{\partial x^2})(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}) - (\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y})^2) + \alpha(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}) + \beta(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}) + \gamma(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}) + \theta = 0,$$

on aura $\frac{\alpha}{N} = \frac{m'(\frac{\partial\psi}{\partial p}) - m(\frac{\partial\Phi}{\partial p})}{(\frac{\partial\psi}{\partial p})(\frac{\partial\Phi}{\partial q}) - (\frac{\partial\psi}{\partial q})(\frac{\partial\Phi}{\partial p})};$

$$\frac{\beta}{N} = \frac{m'(\frac{\partial\psi}{\partial q}) - m(\frac{\partial\Phi}{\partial q}) - n'(\frac{\partial\psi}{\partial p}) + n(\frac{\partial\Phi}{\partial p})}{(\frac{\partial\psi}{\partial p})(\frac{\partial\Phi}{\partial q}) - (\frac{\partial\Phi}{\partial q})(\frac{\partial\Phi}{\partial p})};$$

$$\frac{\gamma}{N} = \frac{n(\frac{\partial\Phi}{\partial q}) - n'(\frac{\partial\psi}{\partial q})}{(\frac{\partial\psi}{\partial p})(\frac{\partial\Phi}{\partial q}) - (\frac{\partial\psi}{\partial q})(\frac{\partial\Phi}{\partial p})};$$

$$\frac{\theta}{N} = \frac{m'n - mn'}{(\frac{\partial\psi}{\partial p})(\frac{\partial\Phi}{\partial q}) - (\frac{\partial\psi}{\partial q})(\frac{\partial\Phi}{\partial p})}.$$

On tire de là les deux équations suivantes, comme il est aisé de le voir par la substitution des valeurs:

$$\frac{\alpha}{N}(\frac{\partial\psi}{\partial q})^2 - \frac{\beta}{N}(\frac{\partial\psi}{\partial p})(\frac{\partial\psi}{\partial q}) + \frac{\gamma}{N}(\frac{\partial\psi}{\partial p})^2 - (n(\frac{\partial\psi}{\partial p}) + m(\frac{\partial\psi}{\partial q})) = 0,$$
$$\frac{\alpha n}{N}(\frac{\partial\psi}{\partial q}) + \frac{\gamma m}{N}(\frac{\partial\psi}{\partial p}) - \frac{\theta}{N}(\frac{\partial\psi}{\partial p})(\frac{\partial\psi}{\partial q}) - mn = 0. \quad (a)$$

 Mul-

Multipliant la première équation par m et la retranchant de la seconde multipliée par $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$, on obtient en divisant par $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$,

$$m^2+\frac{\beta}{N}m\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-\frac{\alpha m}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+\frac{\alpha n}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-\frac{\theta}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2=0.$$

Multipliant la première équation par $\frac{\alpha}{N}$ et l'ajoutant à cette dernière, on a

$$m^2\ \frac{\beta m}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-\frac{2\alpha m}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+\frac{\alpha^2}{N^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2-\frac{\alpha\beta}{N^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$$
$$+\frac{\alpha\gamma}{N^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2-\frac{\theta}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2=0.$$

Donc $m=\frac{\alpha}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-\frac{\beta}{2N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\pm\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2}-\frac{\alpha\gamma}{N^2}+\frac{\theta}{N}}$,

$$n=\frac{\gamma}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-\frac{\beta}{2N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\mp\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2}-\frac{\alpha\gamma}{N^2}+\frac{\theta}{N}}.$$

On a donc les deux équations:

$$m-\frac{\alpha}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+\left(\frac{\beta}{2N}\mp\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2}-\frac{\alpha\gamma}{N^2}+\frac{\theta}{N}}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)=0,$$
$$n-\frac{\gamma}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+\left(\frac{\beta}{2N}\pm\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2}-\frac{\alpha\gamma}{N^2}+\frac{\theta}{N}}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0,$$

ou en remettant pour m et n leurs valeurs,

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+q\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)-\frac{\alpha}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+\left(\frac{\beta}{2N}\mp\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2}-\frac{\alpha\gamma}{N^2}+\frac{\theta}{N}}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)=0,\\&\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+p\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)-\frac{\gamma}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+\left(\frac{\beta}{2N}\pm\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2}-\frac{\alpha\gamma}{N^2}+\frac{\theta}{N}}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0.\end{aligned}\right\}\quad(b)$$

On observera que $\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2}-\frac{\alpha\gamma}{N^2}+\frac{\theta}{N}}$ est toujours une quantité rationnelle, et égale à $\dfrac{\frac{m'}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-\frac{m}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right)+\frac{n'}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-\frac{n}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)}$, ce qui simplifie la forme des équations qu'il s'agit d'intégrer.

§. 2. Si N $=$ o, on a $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right) = 0$, et les équations (a) du §. précédent seront dans ce cas, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + \frac{\gamma}{\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2 = 0$; $n\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + \frac{m\gamma}{\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - \frac{\theta}{\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0$. La première équation donne $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = \left(\frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}\right)}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$. Substituant cette valeur dans la seconde équation et divisant par $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$, on a

$$\left(\frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}}\right) n + \frac{m\gamma}{\alpha} - \frac{\theta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0,$$

ou en remettant les valeurs de m et n,

$$\left(\frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\gamma}{\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\beta p}{2\alpha} + \frac{q\gamma}{\alpha} \pm p\sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$
$$- \frac{\theta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0.$$

§. 3. Il est évident par la nature de ces équations, que l'on trouvera pour Φ les mêmes équations que pour ψ, ensorte qu'en intégrant l'équation en ψ, on trouvera toujours deux valeurs l'une en ψ, l'autre en Φ, et toute la difficulté se réduit à intégrer une équation linéaire du premier degré aux différences partielles à deux variables. Car on peut regarder dans cette intégration p et q comme deux variables distinctes de x, y, z. Nous avons traité en detail de ces équations dans un Mémoire particulier. On observera que la solution précédente fait évanouir la difficulté que Mr. de Nieuport regarde comme impossible à lever en général, et qui consiste en ce que, ayant $\theta = \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \zeta = \delta p + \varepsilon q + \zeta$, on ne peut distinguer les coëfficiens de ces trois termes; car cela n'est point nécessaire par notre méthode.

§. 4.

§. 4. Les équations (*b*) du §. I. peuvent être présentées sous une autre forme. On a

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \left(\frac{\beta}{2N} \mp \sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}{\frac{\alpha}{N}}$$

$$= - \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - p\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \frac{\gamma}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}{\frac{\beta}{2N} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}}}.$$

On a donc, en développant et réduisant,

$$\frac{\alpha}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\beta}{2N} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$
$$+ \left(\frac{\alpha}{N}p + \frac{\beta}{2N}q \pm q\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - \frac{\theta}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{\beta}{2N} \mp \sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\gamma}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$
$$+ \left(q\frac{\gamma}{N} + \frac{\beta}{2N}p \mp p\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - \frac{\theta}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0.$$

Retranchant la seconde équation de la première, on a

$$\left(\frac{\alpha}{N} - \frac{\beta}{2N} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$
$$+ \left(\frac{\beta}{2N} - \frac{\gamma}{N} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$
$$+ \left(\left(\frac{\alpha}{N} - \frac{\beta}{2N}\right)p + \left(\frac{\beta}{2N} - \frac{\gamma}{N}\right)q \pm (q+p)\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$
$$- \frac{\theta}{N}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\right) = 0. \quad (d)$$

On peut traiter cette dernière équation comme une équation du premier degré à six variables, et l'intégrer par la méthode générale que nous avons proposée. Il restera des constantes dans l'intégrale, qu'on déterminera par les deux équations (*c*). Ces équations ne renfermant point la quantité ψ, ni aucun terme exemt de différences partielles, seront plus aisées à intégrer, et il

il se présentera le plus souvent des méthodes particulières qui dispenseront des longueurs de la méthode générale. L'équation (d) a cela de particulier qu'on peut y considérer $p+q$ comme constant. Car soit l'équation $P\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+R\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+S\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+T\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0$, on aura, comme on sait, les équations $P\,\partial y-Q\,\partial x=0$, $P\,\partial z-R\,\partial x=0$, $P\,\partial p-S\,\partial x=0$, $P\,\partial q-T\,\partial x=0$. Or si, comme dans ce cas-ci, l'on a $T=-S$, les équations $P\,\partial p-S\,\partial x=0$, $P\,\partial q-T\,\partial x=0$, deviendront $P\,\partial p-S\,\partial x=0$, $P\,\partial q+S\,\partial x=0$, donc $P(\partial p+\partial q)=0$, $\partial p+\partial q=0$, $p+q=$ Const. Cette remarque peut être utile dans certains cas.

§. 5. Si $\theta=0$, les équations (c) du §. précédent se réduisent à une seule,

$$\frac{\alpha}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\beta}{2N}\pm\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2}-\frac{\alpha\gamma}{N^2}}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$
$$+\left(\frac{\alpha}{N}p+\frac{\beta}{2N}q\pm q\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2}-\frac{\alpha\gamma}{N^2}}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=0,$$

et l'on pourra se servir de cette équation combinée avec les équations (b), ou s'en tenir simplement aux équations (b).

§. 6. Si $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)=0$, les valeurs du §. 1. deviendront,

$$\frac{\alpha}{N}=\frac{m'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)};\quad \frac{\beta}{N}=\frac{-m\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right)-n'\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right)};$$

$$\frac{\gamma}{N}=\frac{n\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right)};\quad \frac{\theta}{N}=\frac{m'n-mn'}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right)}$$

Les

Les valeurs de $\frac{\gamma}{N}$ et de $\frac{\alpha}{N}$ donnent les équations, $\frac{\gamma}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - n = 0$, $\frac{\alpha}{N}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right) - m' = 0$. Les valeurs de $\frac{\alpha}{N}$ et de $\frac{\beta}{N}$ donnent $m' = \frac{\alpha}{N}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right)$, $n' = -\frac{\frac{\beta}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right) - m\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}$. Substituant ces valeurs dans celle de $\frac{\theta}{N}$, et divisant par $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right)$, on aura $\frac{\alpha n}{N} + \frac{m\beta}{N} + \frac{m^2}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)} = \frac{\theta}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$, ou $m^2 = -\frac{\beta m}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - \frac{\alpha n}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + \frac{\theta}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2 =$ (en mettant pour n sa valeur $\frac{\gamma}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$)

$-\frac{\beta m}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - \frac{\alpha\gamma}{N^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2 + \frac{\theta}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2$. Donc $m = -\frac{\beta}{2N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) \pm \left(\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$, ou $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \frac{\beta}{2N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) \mp \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}} = 0$, équation qu'on combinera avec celle-ci: $\frac{\gamma}{N}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - p\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0$. On trouvera de même, en éliminant m et n au lieu de m' et n'.

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) + \frac{\beta}{2N}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right) \mp \left(\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right)\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}} = 0,$$

équation qu'on combinera avec celle-ci: $\frac{\alpha}{N}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) - q\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = 0$. Au reste il faut observer que l'ambiguité des signes ne veut pas dire que les deux équations puissent avoir lieu en même tems, il n'y en a qu'une qui ait lieu dans chaque cas, et la méthode des indéterminées indiquera, par la nature des conditions, quel est le signe qui doit avoir lieu.

§. 7. Soit l'équation $a^2\left(\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)^2\right)$

$+ a\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)$

+

$$- 2a \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \left(\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial y}\right)$$

$$+ a \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \left(\frac{\partial \partial z}{\partial y^2}\right)$$

$$+ \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)^2 = 0,$$

que traite Mr. Monge, Memoires de Turin 1784.

On a $\frac{\alpha}{N} = \frac{(1+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}}{a}$, $\frac{\beta}{N} = -\frac{2pq\sqrt{1+p^2+q^2}}{a}$,

$\frac{\gamma}{N} = \left(\frac{1+p^2}{a}\right)\sqrt{1+p^2+q^2}$, $\frac{\theta}{N} = \frac{(1+p^2+q^2)^2}{a^2}$.

Donc $\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}} = 0$, et les équations (c) donneront, en divisant tous les termes par $\sqrt{(1+p^2+q^2)}$,

$$\left(\frac{1+q^2}{a}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - \frac{pq}{a}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \frac{p}{a}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - \frac{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0,$$

$$-\frac{pq}{a}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{(1+p^2)}{a}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \frac{q}{a}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - \frac{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0.$$

Il seroit aisé d'appliquer à ces équations la méthode du §. cité, en faisant entrer dans la valeur de l'integrale particulière, les termes Ax, By, Cz, A, B, C étant des constantes. Mais puisque x, y et z manquent dans les coefficiens de cette équation, on peut proceder plus brièvement. Car tirant des deux dernières équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$ et $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$, on aura

$$\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial q$$

$$= \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\left(\partial x + \frac{a(1+q^2)\partial p}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{apq\partial q}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$+ \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\left(\partial y + \frac{a(1+p^2)\partial q}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{apq\partial p}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\partial z+\frac{a\,p\,\partial p}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{a\,q\,\partial q}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$=\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)\left(\partial x+\partial\,\tfrac{a\,p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)\left(\partial y+\partial.\,\tfrac{a\,q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)$$

$$+\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\partial z-\partial.\,\tfrac{a}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right).$$

Il est évident qu'on peut faire $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=A$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=B$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=C$, et l'on aura $\psi = A\left(x+\frac{a\,p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+B\left(y+\frac{a\,q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)$

$$+\,C\left(z-\frac{a}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right).$$

Comme les constantes A, B, C sont arbitraires, il est clair, que la quantité ψ est susceptible de trois valeurs différentes indépendantes les unes des autres, ensorte que l'intégrale sera

$$z-\frac{a}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=F:\left(x+\frac{a\,p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right),\ \left(y+\frac{a\,q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right).$$

L'intégrale que trouve Mr. Monge

$$x+\frac{a\,p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=F:\left(y+\frac{a\,q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)$$

est une intégrale particulière de cette équation.

§. 8. Soit l'équation $(q-p)\left(\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)^2\right)$ $+(q-z+q^2x-qx)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)+(1+py-qz-qy+p-z)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)$ $+(1-pz+py-p^2x)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)+(x-yz)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ $+(y-xz)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+1-zz=0.$ On a $\frac{\alpha}{N}=\frac{q-z+q^2x-qy}{q-p}$, $\frac{\beta}{N}=\frac{1+py-qz-qy+p-z}{q-p}$, $\frac{\gamma}{N}=\frac{1-pz+py-p^2x}{q-p}$, $\frac{\theta}{N}=\frac{qx-qyz+py-pxz+1-zz}{q-p}$. On tire de là $\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2}-\frac{\alpha\gamma}{N^2}+\frac{\theta}{N}}=\frac{1+py-qz+qy-p+z-2pqx}{2(q-p)}$.

On a donc $\frac{\beta}{2N}+\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2}-\frac{\alpha\gamma}{N^2}+\frac{\theta}{N}}=\frac{1+py-qz-pqx}{q-p}$,

$$\frac{\beta}{2N}-\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2}-\frac{\alpha\gamma}{N^2}+\frac{\theta}{N}}=\frac{p-z-qy+pqx}{q-p}.$$

Les

Les équations (c) deviendront donc,

$$(q - z + q^2 x - qy)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + (1 + py - qz - pqx)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$
$$+ (q+pq-pz-q^2 z)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - (qx-qyz+py-pxz+1-zz)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0,$$
$$(p - z - qy + pqx)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + (1 - pz + py - p^2 x)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$
$$+ (q-pz+p^2-pqz)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - (qx-qyz+py-pxz+1-zz)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0.$$

Je tire de ces deux équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$ et $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$, et j'ai

$$\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial q$$
$$= \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\left(\partial x + \frac{(q-z+q^2x-qy)\partial p + (p-z-qy+pqx)\partial q}{1-zz+qx+py-pxz-qyz}\right)$$
$$+ \left(\partial y + \frac{(1+py-qz-pqx)\partial p + (1-pz+py-p^2x)\partial q}{1-zz+qx+py-pxz-qyz}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\partial z + \frac{(q+pq-pz-q^2z)\partial p + (q-pz+p^2-pqz)\partial q}{1-zz+qx+py-pxz-qyz}\right)$$
$$= \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z$$
$$+ (q\partial p + p\partial q)\frac{\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + qx\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - z\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \mp px\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + p\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - qz\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)}{1 - zz + qx + py - pxz - qyz}$$
$$+ (\partial p + \partial q)\frac{\left(-z\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - qy\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + py\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - pz\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + q\left(\frac{\psi}{\partial z}\right)\right)}{1 - zz + qx + py - pxz - qyz}.$$

Or en faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = z$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = y$, le coefficient de $p\,\partial q + q\,\partial p$ devient 1, et celui de $\partial p + \partial q$ devient nul, ce qui donne $\partial\psi = \partial x + z\,\partial x + y\,\partial z + p\,\partial q + q\,\partial p$, et $\psi = x + zy + pq$. En faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = z$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = x$, on a $\partial\psi = z\,\partial x + \partial y + x\,\partial z + \partial p + \partial q$ et $\psi = xz + y + p + q$. L'intégrale est donc $x + yz + pq = \mathrm{F}:(xz + y + p + q)$.

 §. 9.

§. 9. Soit l'équation $(p^2 - q^2)\left(\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\right)^2\right)$ $+ (2pqz - qy)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + (2q^2 z - 2p^2 z - py)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\right)$ $- 2pqz\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - 2pyz = 0$, que traite Mr. de Nieuport p. 164. On a $\frac{\alpha}{N} = \frac{2pqz - qy}{p^2 - q^2}$, $\frac{\beta}{N} = \frac{2q^2 z - 2p^2 z - py}{p^2 - q^2}$, $\frac{\gamma}{N} = \frac{-2pqz}{p^2 - q^2}$, $\frac{\theta}{N} = \frac{-2pyz}{p^2 - q^2}$. Donc $\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}} = \frac{q^2 z + p^2 z - \frac{py}{2}}{p^2 - q^2}$, $\frac{\beta}{2N} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}} = \frac{2q^2 z - py}{p^2 - q^2}$, $\frac{\beta}{2N} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}} = \frac{2p^2 z}{p^2 - q^2}$. Les équations (c) deviennent donc,

$$(2pqz - qy)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - 2p^2 z\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - pqy\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + 2pyz\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0,$$
$$(2q^2 z - py)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - 2pqz\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - p^2 y\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + 2pyz\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0.$$

Je tire de ces deux équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$ et $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$ et j'ai: $\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z$

$$+ (q\partial p + p\partial q)\frac{\left(y\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + py\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)}{2pyz}$$
$$+ (p\partial p + q\partial q)\frac{\left(-2qz\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + 2pz\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right)}{2pyz}.$$

Or en faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 2z$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0$, le coëfficient de $q\partial p + p\partial q$ devient 1, et le coefficient de $p\partial p + q\partial q$ devient nul, ce qui donne $\partial\psi = 2z\partial z + q\partial p + p\partial q$ et $\psi = zz + pq$. En faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = y$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0$, le coefficient de $q\partial p + p\partial q$ devient nul, et celui de $p\partial p + q\partial q$ devient 1, ce qui donne $\partial\psi = y\partial y + p\partial p + q\partial q$ et

$\psi =$

$\psi = yy + pp + qq$. L'intégrale est donc $zz + pq = F:(p^2 + q^2 + y^2)$, comme le trouve Mr. de Nieuport.

§. 10. Soit l'équation $(q - p)\left(\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)^2\right)$ $+ (q - z + q^2 - qy)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + (p - z + py - qy)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)$ $+ (py - pp)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + (y - z)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$. On a ici,

$\frac{\alpha}{N} = \frac{q - z + q^2 - qy}{q - p}$, $\frac{\beta}{N} = \frac{p - z + py - qy}{q - p}$, $\frac{\gamma}{N} = \frac{py - pp}{q - p}$, $\frac{\theta}{N} = \frac{py - pz}{q - p}$.

Donc $\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}} = \frac{\frac{p}{z} - \frac{z}{z} - \frac{py}{z} - \frac{qy}{z} + pq}{q - p}$,

$$\frac{\beta}{2N} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}} = \frac{p - z - qy + pq}{q - q},$$

$$\frac{\beta}{2N} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}} = \frac{py - pq}{q - p}.$$

Les équations (ϵ) deviennent donc,

$$(q - z + q^2 - qy)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + (py - pq)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + (pq - pz)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - (py - pz)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0,$$

$$(p - z - qy + pq)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + (py - pp)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + (pp - pz)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - (py - pz)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0.$$

Je tire de ces deux équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$ et de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$, et j'ai

$$\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z$$
$$+ (q\partial p + p\partial q)\frac{\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + q\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - p\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + p\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)}{py - pz}$$
$$+ (\partial p + \partial q)\frac{\left(-z\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - qy\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + py\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - pz\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)}{py - pz}.$$

Or

Or en faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = z$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = y$, le coëfficient de $q\,\partial p + p\,\partial q$ devient 1, et celui de $\partial p + \partial q$ devient nul, ce qui donne $\partial\psi = z\partial y + y\partial z + q\partial p + p\partial q$ et $\psi = yz + pq$. En faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 1$, le coefficient de $q\,\partial p + p\,\partial q$ devient nul, et celui de $\partial p + \partial q$ devient 1, ce qui donne $\partial\psi = \partial y + \partial z + \partial p + \partial q$ et $\psi = y + z + p + q$. L'intégrale est donc $pq + yz = \mathrm{F} : (p + q + y + z)$.

§. 11. Soit l'équation $(pq + yz - 2p^2 - py - pz)\left(\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)^2\right)$ $+ (2pq + 2pq^2 - 2pz - qz - z^2 - 2pqy - q^2y - qy^2)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)$ $+ 2p^2y + py^2 + p^2 - p^2q - pz)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right) + (p^2y - p^3)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)$ $+ p^2y - p^2z = 0$. On a ici,

$$\frac{\alpha}{\mathrm{N}} = \frac{2pq + 2pq^2 - 2pz - qz - z^2 - 2pqy - q^2y - qy^2}{pq + yz - 2p^2 - py - pz},$$

$$\frac{\beta}{\mathrm{N}} = \frac{2p^2y + py^2 + p^2 - p^2q - pz}{pq + yz - 2p^2 - py - pz},$$

$$\frac{\gamma}{\mathrm{N}} = \frac{p^2y - p^3}{pq + yz - 2p^2 - py - pz},$$

$$\frac{\theta}{\mathrm{N}} = \frac{p^2y - p^2z}{pq + yz - 2p^2 - py - pz}.$$

Donc $\sqrt{\frac{\beta^2}{4\mathrm{N}^2} - \frac{\alpha\gamma}{\mathrm{N}^2} + \frac{\theta}{\mathrm{N}}} = \dfrac{p^2y + \frac{py^2}{2} - \frac{p^2}{2} - \frac{3p^2q}{2} + \frac{pz}{2} + pqy}{pq + yz - 2p^2 - py - pz}$;

$$\frac{\beta}{2\mathrm{N}} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4\mathrm{N}^2} - \frac{\gamma}{\mathrm{N}^2} + \frac{\theta}{\mathrm{N}}} = \frac{2p^2y + py^2 - 2p^2q + pqy}{pq + yz - 2p^2 - py - pz};$$

$$\frac{\beta}{2\mathrm{N}} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4\mathrm{N}^2} - \frac{\alpha\gamma}{\mathrm{N}^2} + \frac{\theta}{\mathrm{N}}} = \frac{p^2 + p^2q - pz - pqy}{pq + yz - 2p^2 - py - pz}.$$

Les équations (c) deviennent donc

$$(2pq + 2pq^2 - 2pz - qz - z^2 - 2pqy - q^2y - qy^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$

+

$$+ (2p^2y+py^2-2p^2q+pqy)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + (2p^2q-2p^2z-pqz-pz^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$
$$-(p^2y-p^2z)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0,$$

$$(p^2+p^2q-pz-pqy)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + (p^2y-p^3)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$
$$+ (p^3-p^2z)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - (p^2y-p^2z)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0.$$

Je tire de ces deux équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$ et $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$, et j'ai

$$\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z$$
$$+ (2pq\,\partial p + p^2\,\partial q)\,\frac{\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + q\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - p\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + p\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)}{p^2y-p^2z}$$
$$+ 2p\,\partial p\,\frac{\left(-2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - qy\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + py\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - pz\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)}{p^2y-p^2z}$$
$$+ (q\,\partial p + p\,\partial q)\,\frac{\left(-z\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - qy\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + py\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - pz\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)}{p^2y-p^2z}$$
$$+ \partial p\,\frac{\left(-z^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - qy^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + py^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + z^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)}{p^2y-p^2z}.$$

En faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = pz$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = py$, on a $\partial\psi = pz\,\partial y + py\,\partial z + 2pq\,\partial p + p^2\,\partial q + yz\,\partial p$, et $\psi = pyz + p^2q$. En faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = p$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = p$, on aura

$$\partial\psi = p\,\partial y + p\,\partial z + 2p\,\partial p + q\,\partial p + p\,\partial q + (y+z)\,\partial p,$$

et $\psi = py + pz + p^2 + pq$.

L'intégrale est donc $p^2q + pyz = \mathrm{F} : (p^2 + pq + py + pz)$.

§. 12. Soit l'équation $(q-p)\left(\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)^2\right)$ $+ (q-x)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + (y-q+p-x)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right) + (y-p)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + y - x = 0.$

On

On a ici $\frac{\alpha}{N} = \frac{q-x}{q-p}$, $\frac{\beta}{N} = \frac{y-q+p-x}{q-p}$, $\frac{\gamma}{N} = \frac{y-p}{q-p}$, $\frac{\theta}{N} = \frac{y-x}{q-p}$.

Donc $\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}} = \frac{\frac{y}{2} - \frac{q}{2} - \frac{p}{2} - \frac{x}{2}}{q-p}$,

$\frac{\beta}{2N} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}} = \frac{y-q}{q-p}$, $\frac{\beta}{2N} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}} = \frac{p-x}{q-p}$.

Les équations (c) deviendront,

$$(q-x)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + (y-q)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + (pq - px + qy - qq)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + (x-y)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0,$$

$$(p-x)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + (y-p)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + (qy - pq + py - pp)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + (x-y)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0.$$

Je tire de ces deux équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$ et $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$, et j'ai:

$$\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z$$
$$+ (q\,\partial p + p\,\partial q)\,\frac{\left(-\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)}{x-y}$$
$$+ (\partial p + \partial q)\,\frac{\left(x\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - y\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - qy\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)}{x-y}$$
$$+ \frac{p(p\,\partial q - q\,\partial p) + px\,\partial p - py\,\partial q)}{x-y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right).$$

En faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = y$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = x$, on a

$$\partial\psi = y\,\partial x + x\,\partial y + q\,\partial p + p\,\partial q \text{ et } \psi = xy + pq.$$

En faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 1$, on a

$$\partial\psi = \partial x + \partial y + p + q \text{ et } \psi = x + y + p + q.$$

L'intégrale est donc $pq + xy = F:(p + q + x + y)$.

§. 13.

§. 13. Soit l' équation

$$(q-p)\left(\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)^2\right)+(2qx^2y+3q^2z^2-x-q)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)$$
$$+(y+p-x-q-2qxy^2+2px^2y)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)$$
$$+(p+y-2pxy^2-3p^2z^2)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)$$
$$+2pr^2y-3pxz^2+3qyz^2-2qxy^2=0.$$

On a ici $\frac{\alpha}{N}=\frac{2qx^2y+3q^2z^2-x-q}{q-p}$,
$\frac{\beta}{N}=\frac{y+p-x-q-2qxy^2+2px^2y}{q-p}$, $\frac{\gamma}{N}=\frac{p+y-2pxy^2-3p^2z^2}{q-p}$, $\frac{\theta}{N}=\frac{2px^2y-3pxz^2+3qyz^2-2qxy^2}{q-p}$.

Donc $\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2}-\frac{\alpha\gamma}{N^2}+\frac{\theta}{N}}=\frac{\frac{y}{2}+\frac{x}{2}+\frac{p}{2}+\frac{q}{2}-px^2y-qxy^2-3pqz^2}{q-p}$,

$$\frac{\beta}{2N}+\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2}-\frac{\alpha\gamma}{N^2}+\frac{\theta}{N}}=\frac{y+p-2qxy^2-3pqz^2}{q-p},$$
$$\frac{\beta}{2N}-\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2}-\frac{\alpha\gamma}{N^2}+\frac{\theta}{N}}=-\frac{x-q+2px^2y+3pqz^2}{q-p}.$$

Les équations (c) deviendront:

$$(2qx^2y+3q^2z-x-q)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+(y+p-2qxy^2-3pqz^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$
$$+(2pqx^2y+3pq^2z^2-px-pq+qy-2q^2xy^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$
$$-(2px^2y-3pxz^2+3qyz^2-2qxy^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)=0,$$
$$(-x-q+2px^2y+3pqz^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+(p+y-2pxy^2-3p^2z^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$
$$+(-px-pq+2ppx^2y+3p^2qz^2+qy-2pqxy^2-3p^2qz^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$
$$-(2px^2y-3pxz^2+3qyz^2-2qxy^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0.$$

Je tire de ces équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$ et $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$ et j' ai:

$$\partial\psi=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z$$
$$+(q\partial p+p\partial q)\frac{\left(2x^2y\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+3qz^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-2xy^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)-3pz^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+2px^2y\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)-2qxy^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)}{2px^2y-3pxz^2+3qyz^2-2qxy^2}$$
$$+(\partial p+\partial q)\frac{\left(-x\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-q\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+y\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+p\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)-px\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+qy\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)}{2px^2y-3pxz^2+3qyz^2-2qxy^2}$$

En faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=y$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=x$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=1$, on a

 $\partial\psi=$

$\partial\psi = y\partial x + x\partial y + q\partial p + p\partial q$, et $\psi = xy + pq$. En faiſant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 2xy^2$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 2x^2y$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 3z^2$, on a $\partial\psi = 2xy^2\partial x + 2x^2y\partial y + 3z^2\partial z + \partial p + \partial q$, et $\psi = x^2y^2 + z^3 + p + q$. L'intégrale eſt donc

$$pq + xy + z = F:(p + q + x^2y^2 + z^3).$$

§. 14. Soit l'équation

$$(q-p)\left(\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)^2\right) + (3qy^2 - 1 + 2q^2x^2z - qx)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)$$
$$+ (z - 2qxz^2 + 2py^2 - 1 + px - qx)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)$$
$$+ (z - 2pxz^2 - 2p^2x^2z + px)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)$$
$$+ 3pxy^2 - 2px^2z + 3y^2z - 2xz^2 = 0.$$

On a ici $\frac{\alpha}{N} = \frac{3qy^2 - 1 + 2q^2x^2z - qx}{q-p}$, $\frac{\beta}{N} = \frac{z - 2qxz^2 + 3py^2 - 1 + px - qx}{q-p}$, $\frac{\gamma}{N} = \frac{z - 2pxz^2 - 2p^2x^2z + px}{q-p}$, $\frac{\theta}{N} = \frac{3pxy^2 - 2px^2z + 3y^2z - 2xz^2}{q-p}$.

Donc $\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}} = \frac{\frac{z}{2} - qxz^2 - \frac{3}{2}py^2 + \frac{1}{2} + \frac{px}{2} + \frac{qx}{2} - 2pqx^2z}{q-p}$;

$$\frac{\beta}{2N} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}} = \frac{z - 2qxz^2 + px - 2pqx^2z}{q-p},$$
$$\frac{\beta}{2N} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}} = \frac{3py^2 - 1 - qx + 2pqx^2z}{q-p}.$$

Les équations (c) deviendront

$$(3qy^2 - 1 + 2q^2x^2z - qx)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + (z - 2qxz^2 + px - 2pqx^2z)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$
$$+ (3pqy^2 - p + qz - 2q^2xz^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$
$$- (3pxy^2 - 2px^2z + 3y^2z - 2xz^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0,$$
$$(3py^2 - 1 - qx + 2pqx^2z)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + (z - 2pxz^2 - 2p^2x^2z + px)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$
$$+ (3p^2y^2 - p + qz - 2pqxz^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$
$$- (3pxy^2 - 2px^2z + 3y^2z - 2xz^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0.$$

Je

Je tire de ces équations les valeurs $(\frac{\partial\psi}{\partial p})$ et $(\frac{\partial\psi}{\partial q})$ et j' ai:

$$\partial\psi = (\tfrac{\partial\psi}{\partial x})\,\partial x + (\tfrac{\partial\psi}{\partial y})\,\partial y + (\tfrac{\partial\psi}{\partial z})\,\partial z$$

$$+(q\partial p+p\partial q)\frac{(3y^2(\frac{\partial\psi}{\partial x}) + 2qx^2z(\frac{\partial\psi}{\partial x})-2xz^2(\frac{\partial\psi}{\partial y})-2px^2z(\frac{\partial\psi}{\partial y})+3py^2(\frac{\partial\psi}{\partial z})-2qxz^2(\frac{\partial\psi}{\partial z}))}{3pxy^2 - 2px^2z + 3y^2z - 2xz^2}$$

$$+(\partial p+\partial q)\frac{(-(\frac{\partial\psi}{\partial x})+z(\frac{\partial\psi}{\partial y})+px(\frac{\partial\psi}{\partial y})-p(\frac{\partial\psi}{\partial z})+qz(\frac{\partial\psi}{\partial z})-qx(\frac{\partial\psi}{\partial x}))}{3pxy^2 - 2px^2z + 3y^2z - 2xz}$$

En faisant $(\frac{\partial\psi}{\partial x}) = z$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}) = x$, $(\frac{\partial\psi}{\partial y}) = 1$, on a $\partial\psi = z\partial x + x\partial z + \partial y + q\partial p + p\partial q$ et $\psi = xz + y + pq$. En faisant $(\frac{\partial\psi}{\partial x}) = 2xz^2$, $(\frac{\partial\psi}{\partial z}) = 2x^2z$, $(\frac{\partial\psi}{\partial y}) = 3y^2$, on a $\partial\psi = 2xz^2\partial x + 3y^2\partial y + 2x^2z\partial z + \partial p + \partial q$ et $\psi = x^2z^2 + y^3 + p + q$. L' intégrale est donc $pq + xz + y = F:(x^2z^2 + y^3 + p + q$

§. 15. Lorsque les valeurs de ψ sont plus compliquées, la méthode générale, quoique fort longue, est plus simple et plus directe. Soit par exemple l' équation:

$$(q^2x^5y + q^2x^3y^2 + q^2x^2yz + q^2y^2z - 2pqx^5z - 2pqx^3yz$$
$$- 2pqx^2z^2 - 2pqyz^2)((\tfrac{\partial\partial z}{\partial x^2})(\tfrac{\partial\partial z}{\partial y^2}) - (\tfrac{\partial\partial z}{\partial x\partial y})^2)$$
$$+(-q^4x^2y + pq^3x^3y - q^4y^2 + pq^3x^5 + q^3x^5 + q^3x^2z + q^3x^3y$$
$$+ q^3yz + pq^2x^3z + pq^2z^2 - qx^6z - qx^4yz - qx^3z^2 - qxyz^2$$
$$+ x^4z^2 + xz^3)(\tfrac{\partial\partial z}{\partial x^2})$$
$$+(p^2q^2x^5 - pq^3x^2y + p^2q^2x^3y - pq^3y^2 + pq^2x^4z - 2pq^2xz^2$$
$$+ 2pq^2x^5 + 2pq^2x^2z + 3pq^2x^3y + 3pq^2yz + 3q^3x^4y + 3pq^2x^2yz$$
$$+ 3q^3x^2y^2 + px^6z + px^4yz + px^3z^2 + pxyz^2 - qx^6y - qx^4y^2$$
$$- qx^3yz - qxy^2z + x^3yz^2 - x^5z^2 + yz^3 - x^2z^3$$
$$+ x^4yz + xyz^2(\tfrac{\partial\partial z}{\partial x\partial y})$$

Mm 2 $+(-2p^3qx^5$

$$+ (- 2p^3qx^5 + 2p^2q^2x^2y - 2p^3qx^3y + 2p^2q^2y^2 - 2pq^2x^4y$$
$$- 2pq^2xyz + 6p^2qx^4z + 6pq^2x^4y + 6p^2qx^2yz + 6pq^2x^2y^2$$
$$+ px^6y + px^4y^2 + px^3yz + pxy^2z + x^3y^2z - x^3yz + y^2z^2$$
$$- x^2yz^2) \left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)$$
$$- 2p^2q^3x^4 + 2pq^4xy + p^3q^2x^3 - p^2q^3y - 2pq^3x^4 - 2pq^3xz$$
$$- 3p^2q^2x^2z - 3pq^3x^2y + 4pqx^3yz + pqx^6 + pqx^4y + pqx^3z$$
$$- q^2y^2z + q^2x^2yz + p^2x^4z + 2pqx^5z + 3q^2x^5y + 3q^2x^3y^2$$
$$+ qxy^3z - qx^5z + qyz^2 - qx^2z^2 - 3px^3z^2 - 3qx^3yz = 0.$$

On tirera de là les équations (c) que j'omets pour abreger, et la quantité α fournira 6 formes des termes de ψ, ensorte qu'on fera

$$\psi = (Aq^4x^2y + Bq^3x^3y + Cq^4y^2 + Dpq^3x^5 + Eq^3x^5 + Fq^3x^2z$$
$$+ Gq^3x^3y + Hq^3yz + Ipq^2x^3z + Kpq^2z^2 + Lqx^6z + Mqx^4yz$$
$$+ Nqx^3z^2 + Pqxyz^2 + Qx^4z^2 + Rxz^3,$$ on trouvera en substituant les valeurs,

1°) $C = 1$, $R = 1$, et les autres coëfficiens $= 0$, ce qui donne $\psi = z^2(pq^2 + xz)$.

2°) $I = 1$, $G = 1$, et les autres coëfficiens $= 0$, ce qui donne $\psi = q^2x^3(pz + qy)$.

3°) $E = 1$, $F = 1$, et les autres coëfficiens $= 0$, ce qui donne $\psi = q^3x^2(x^3 + z)$.

4°) $L = 1$, $M = 1$, et les autres coëfficiens $= 0$, ce qui donne $\psi = qx^4z(x^2 + y)$.

On

On fera donc $\psi = q^{m'} x^{n'} z^{p'} (pq^2 + xz)^a (pz + qy)^b$ $(x^3 + z)^c (x^2 + y)^g$, et l'on trouvera 1°) $m' = n' = p' = b = c = 0$, $a = 1$, $g = -1$, donc $\psi = \frac{pq^2 + xz}{x^2 + y}$. 2) $m' = n' = p' = a = g = 0$, $b = 1$, $c = -1$, donc $\psi = \frac{pz + qy}{x^3 + z}$. L'intégrale est donc $\frac{pq^2 + xz}{x^2 + y} = F : (\frac{pz + qy}{x^3 + z}$. Je n'ai fait qu'indiquer le calcul à cause de sa longueur, et parcequ'il ne renferme point de difficultés.

§. 16. Soit l'équation $(q + q^2 - 2pq^2xz - 2pq^3xy)(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2})$ $+ (2pq^2yz - q + p - 2p^2qxz)(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}) + (2p^2qyz - p - p^2 + 2p^3qxy(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2})$ $+ pxy - pxz + qyz - qxy + yz - xz = 0$. Si l'on multiplie les équations (c) par N et qu'on fasse ensuite $N = 0$, on aura

$$\gamma (\frac{\partial\psi}{\partial x}) + (\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma})(\frac{\partial\psi}{\partial y}) + (\alpha p + \frac{\beta}{2} q \pm q \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma})(\frac{\partial\psi}{\partial z})$$
$$- \theta (\frac{\partial\psi}{\partial p}) = 0,$$
$$(\frac{\beta}{2} \mp \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma})(\frac{\partial\psi}{\partial x}) + \gamma (\frac{\partial\psi}{\partial y})$$
$$+ (q\gamma + \frac{\beta}{2} p \mp p \sqrt{\frac{\beta^2}{4} \alpha - \alpha\gamma})(\frac{\partial\psi}{\partial z}) - \theta (\frac{\partial\psi}{\partial q}) = 0.$$

On a ici $N = 0$, $\alpha = q + q^2 - 2pq^2 - 2pq^3xy$, $\beta = 2pq^2yz - q + p - 2p^2qxz$, $\gamma = 2p^2qyz - p - p^2 + 2p^3qxy$, $\theta = pxy - pxz + qyz - qxy + yz - xz$. Donc $\sqrt{(\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma)} = pq^2yz - \frac{q}{2} - \frac{p}{2} + p^2qxz - pq + 2p^2q^2xy$, $\frac{\beta}{2} + \sqrt{(\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma)} = 2pq^2yz - q - pq + 2p^2q^2xy$; $\frac{\beta}{2} - \sqrt{(\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma)} = p - 2p^2qxz + pq - 2p^2q^2xy$. Les équations (c) deviendront donc

$(q +$

$$(q + q^2 - 2pq^2xz - 2pq^3xy)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$
$$+ (-q - pq + 2pq^2yz + 2p^2q^2xy)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$
$$+ (pq - q^2 + 2pq^3yz - 2p^2q^2xz)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$
$$-(pxy - pxz + qyz - qxy + yz - xz)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0,$$
$$(p + pq - 2p^2qxz - 2p^2q^2xy)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$
$$+ (2p^2qyz - p - p^2 + 2p^3qxy)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$
$$+ p^2 - pq - 2p^3qxz + 2p^2q^2yz)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$
$$-(pxy - pxz + qyz - qxy + yz) - xz)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0.$$

Je tire de ces deux équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$ et de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$ et j'ai

$$\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z$$
$$+ q\partial p + p\partial q)\,\frac{\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + q\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - p\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + p\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - q\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)}{pxy - pxz + qyz - qxy + yz - xz}$$
$$+ (\partial p + \partial q)\,\frac{\left(\left(2pq\left(-xz\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - qxy\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + yz\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + pxy\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + qyz\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - pxz\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)\right)\right)}{pxy - pxz + qyz - qxy + yz - xz}$$

En faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = yz$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = xz$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = xy$, on a $\partial\psi = yz\partial x + xz\partial y + xy\partial z + q\partial y + q\partial q$, et $\psi + xyz + pq$. En faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 1$, on a $\partial\psi = \partial x + \partial y + \partial z + ʒpq\,(q\partial p + p\partial q)$ et $\psi = x + y + z + p^2q^2$. L'Intégrale est donc $p^2q^2 + x + y + z = F:(qp + xyz)$.

§. 17. Soit l'équation $(2p^2qx + pqy - 4pxy + 2y^2 - pz - xz)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)$. $+ (p^2z + yz - 2p^3x - p^2y\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right) + p^3q + pqy + 2p^2y + 2y^2 - 2p^3 - p^2x = 0$, que traite Mr. de Nieuport p. 121. On

a

a ici $N = o$, $\alpha = 2p^2qx + pqy + 4pxy + 2y^2 - pz - xz$, $\beta = p^2z + yz - 2p^3x - p^2y$, $\gamma = o$, $\theta = p^3q + pqy + 2p^2y + 2y^2 - p^3 - p^2x$. Donc

$$\sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma} = \frac{\beta}{2},\quad \frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma} = \beta,\quad \frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma} = 0.$$

Les équations (c) deviendront:

$$(2p^2qx + pqy + 4pxy + 2y^2 - pz - xz)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$
$$+ (p^2z + yz - 2p^3x - p^2y)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$
$$+ (4p^2xy + 2py^2 - p^2z - pxz + p^2qz + qyz\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$
$$- (p^3q + pqy + 2p^2y + 2y^2 - p^3 - p^2x)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = o;$$

$\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0$. Tirant la valeur de ∂p de la premiere équation, j'ai

$$\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z$$
$$+ \frac{(2p^2qx + pqy + 4pxy + 2y^2 - pz - xz)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial p}{p^3q + pqy + 2p^2y + 2y^2 - p^3 - p^2x}$$
$$\frac{+(p^2z+yz-2p^3x-p^2y)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial p+(4p^2xy+2py^2-p^2z-pxz+p^2qz+qyz)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial p}{p^3q + pqy + 2p^2y + 2y^2 - p^3 - p^2x}$$

Faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = o$, pour que le coëfficient de q dans le numérateur soit un coefficient de q dans le dénominateur, je fais $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = p$, et le coëfficient de ∂p devient alors

$$\frac{(p^3qz + pqyz - p^2xz - p^3z + 2p^2y^2 + 4p^3xy)\,\partial p + (p^2z + yz - 2p^3x - p^2y)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial p}{p^3q + pqy + 2p^2y + 2y^2 - p^3 - p^2x}.$$

Il est évident qu'on a $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 2y$, donc $\partial\psi = 2y\partial y + p\partial z + z\partial p$,

et

et $\psi = y^2 + pz$. Faisant maintenant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0$, pour que le coefficient de q dans le numérateur soit un multiple du coefficient de q dans le dénominateur, je fais

$$(2p^2qx + pqy)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = m(p^3q + pqy), \text{ ou}$$
$$(2px + y)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = m(p^2 + y).$$

Je fais donc $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = p^2 + y$, et le coefficient de ∂p devient

$$\frac{\begin{array}{c}2p^4qx + p^3qy + 4p^3xy + 2p^2y^2 - p^3z - p^2xz + 2p^2qxy + pqy^2 \\ + 4pxy^2 + 2y^3 - pyz - xyz + (p^2z + yz - 2p^3x - p^2y)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\end{array}}{p^3q + pqy + 2p^2y + 2y^2 - p^3 - p^2x}$$

$$= \frac{\begin{array}{c}(2px + y)(p^3q + pqy + 2p^2y + 2y^2) - p^3z - p^2xz - pyz - xyz \\ + (p^2z + yz - 2p^3x - p^2y)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\end{array}}{p^3q + pqy + 2p^2y + 2y^2 - p^3 - p^2x}$$

Il est évident qu'on a $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = p + x$, donc $\partial\psi = p^2\partial x + y\partial x + p\partial y + x\partial y + 2px\partial p + y\partial p$, et $\psi = p^2x + py + xy$. L'intégrale est donc $p^2x + py + xy = F:(pz + y^2)$, comme le trouve Mr. de Nieuport.

§. 18. Soit l'équation $qy\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + (qz - py - y)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right) - (pz + z)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - p^2 - q^2 - p = 0$, que traite Mr. de Nieuport p. 126. On a ici $N = 0$, $\alpha = qy$, $\beta = qz - py - y$, $\gamma = -pz - z$, $\theta = -p^2 - q^2 - p$. Donc

$$\sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma} = \frac{qz}{2} + \frac{py}{2} + \frac{y}{2},$$
$$\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma} = qz,$$
$$\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \gamma\alpha} = -py - y.$$

Les

Les équations (c) deviennent,

$$qy\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - (py+y)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - qy\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + (p^2+q^2+p)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0,$$

$$qz\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - (pz+z)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - qz\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + (p^2+q^2+p)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0.$$

Je tire de ces deux équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$ et $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$, et j'ai:

$$\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z$$
$$+ \frac{\left(-qy\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + (py+y)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + qy\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)\partial p + \left(-qz\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + (pz+z)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + qz\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)\partial q}{p^2+q^2+p}$$

En faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 1$, on a $\partial\psi = \partial x + \partial z$, et $\psi = x + z$. En faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = p$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = q$, on a $\partial\psi = p\,\partial y + q\,\partial z + y\,\partial p + z\,\partial q$ et $\psi = py + qz$. L'intégrale est donc $py + qz = \mathrm{F} : (x+z)$, comme le trouve Mr. de Nieuport.

§. 19. Soit l'équation $2pq^2\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + (q + 2p^2q)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right) + p\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + 1 = 0$. On a ici $\alpha = 2pq^2$, $\beta = q + 2p^2q$, $\gamma = p$, $\theta = 1$, $\mathrm{N} = 0$. Donc $\sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma} = \frac{q}{2} - p^2q$, $\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma} = q$, $\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma} = 2p^2q$. Les équations ($c$) deviennent,

$$2pq^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + q\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + (2p^2q^2 + q^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0,$$

$$2p^2q\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + (pq + 2q^3q)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0.$$

Je tire de ces deux équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$ et $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$, et j'ai:

$$\partial\psi = \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z$$
$$+ (q\,\partial p + p\,\partial q)\left(2pq\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial y}\right) + 2p^2q\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\right) + q\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)$$

Faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0$, on a

$$\partial\psi = \partial y + q\,\partial p + p\,\partial q \text{ et } \psi = y + pq.$$

Faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0$, on a

$$\partial\psi = \partial x + 2pq\,(q\,\partial p + p\,\partial q) \text{ et } \psi = x + p^2q^2.$$

L'intégrale est donc $p^2q^2 + x = F:(pq + y)$.

§. 20. Soit l'équation $(1 + xz + 2qyz + 2qxyz^2)$
$$\left(\left(\tfrac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)\left(\tfrac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - \left(\tfrac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)^2\right) + (q^2z + q^3y + q^2xz^2 + q^3xyz)\left(\tfrac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)$$
$$- (pqx + 3pq^2xyz + pq^2y)\left(\tfrac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)$$
$$+ (pz + 2pqyz^2 + p^2x + 2p^2qxyz)\left(\tfrac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)$$
$$+ pq^2z^2 + pq^3yz + p^2q^2xz = 0.$$

Les équations du §. 6. donneront, en prenant celles qui n'ont point de radicaux: $(1 + xz + 2qyz + 2qxyz^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$
$$+ p(1 + xz + 2qyz + 2qxyx^2)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$
$$- (pz + 2pqyz^2 + p^2x + 2p^2qxyz)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0,$$
$$(1 + xz + 2qyz + 2qxyz^2)\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + q(1 + xz + 2qyz + 2qxyz^2)\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$
$$- (q^2z + q^3y + q^2xz^2 + q^3xyz)\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial q}\right) = 0.$$

Je tire de la première équation la valeur de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$, et comme $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0$, j'ai $\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z$
$$+ \frac{(1 + xz + 2qyz + 2qxyz^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial p + p(1 + xz + 2qyz + 2qxyz^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial p}{pz + 2pqyz^2 + p^2x + 2p^2qxyz}.$$

Fai-

Faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = pz$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = px$, on a

$$\partial\psi = pz\partial x + px\partial z + (1+xz)\,\partial p, \text{ et } \psi = p + pxz.$$

Je tire de la seconde équation la valeur de $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right)$, et comme $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right) = 0$, j'ai $\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z$

$$+ \frac{(1+xz+2qyz+2qxyz^2)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\partial q + q(1+xz+2qyz+2qxyz^2)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\partial q}{q^2z + q^3y + q^2xz^2 + q^3xyz}$$

Faisant $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = q^2z$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = q^2y$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) = 0$, on a

$$\partial\Phi = q^2z\partial y + q^2y\partial z + (1+2qyz)\partial q, \text{ et } \Phi = q + q^2yz.$$

L'intégrale est donc $q + q^2yz = \text{F} : p(1+xz)$.

§. 21. Soit l'équation $(p^2-q^2)\left(\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)^2\right)$ $+ pqx\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + (q^2x - p^2x - pz)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right) - (pqx + qz)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) = 0$, que traite Mr. de Nieuport p. 153. On a ici $\frac{\alpha}{\text{N}} = \frac{pqx}{p^2-q^2}$, $\frac{\beta}{\text{N}} = \frac{q^2-p^2x-pz}{p^2-q^2}$, $\frac{\gamma}{\text{N}} = \frac{-pqx-qz}{p^2-q^2}$, $\theta = 0$. Les équations (b) du §. I. deviennent,

$$(p^2-q^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + (p^2-q^2)\,q\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + q^2x\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - pqx\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0,$$

$$(p^2-q^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + (p^2-q^2)\,p\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + (pqx+qz)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - (p^2x+pz)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0.$$

Je tire de ces deux équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$ et $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$, et j'ai:

$$\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial q$$

$$+ \frac{(p^2-q^2)\,p\,\partial x\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + (pqx+qz)\,\partial x\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - (p^2x+pz)\,\partial x\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)}{q^2-p^2}$$

$$+ \frac{(p^2-q^2)\,q\,\partial y\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - q^2x\,\partial y\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - pqx\,\partial y\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)}{q^2-p^2}.$$

 Fai-

Faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = p$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = q$, on a $\partial\psi = p\partial p + q\partial q$ et $\psi = p^2 + q^2$. Faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = x$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = q$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = p$, on a $\partial\psi = x\partial z + q\partial p + p\partial q + z\partial x$, et $\psi = xz + pq$. L'intégrale est donc $p^2 + q^2 = F:(pq + xz)$, comme le trouve Mr. de Nieuport.

§. 22. Soit l'équation $(py + qx)\left(\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)^2\right)$ $-(2q^2z + pq)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) - (p^2 + q^2)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right) - (pq - 2p^2z)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) = 0$, que traite Mr. de Nieuport p. 157. On a ici

$$\frac{\alpha}{N} = -\frac{(2q^2z + pq)}{py + qx},\ \frac{\beta}{N} = -\frac{(p^2 + q^2)}{py + qx},\ \frac{\gamma}{N} = \frac{2p^2z - pq}{py + qx},\ \theta = 0.$$

Donc $\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2}} = \frac{\frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2} + 2pqz}{py + qx}$,

$$\frac{\beta}{2N} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2}} = -\frac{(p^2 + 2pqz)}{py + qx},$$

$$\frac{\beta}{2N} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2}} = \frac{2pqz - q^2}{py + qx}.$$

Les deux équations (b) deviendront:

$$(py + qx)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + q(py + qx)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + (2q^2z + pq)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$$
$$-(p^2 + 2pqz)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0,$$

$$(py + qx)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + p(py + qx)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + (pq - 2p^2z)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$$
$$-(q^2 - 2pqz)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0.$$

Je tire de ces deux équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$ et $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$, et j'ai:

$$\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial q$$
$$+\frac{(p^2 + 2pqz)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial y - (2q^2z + pq)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial y - q(py + qx)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial y}{py + qx}$$

+

$$+\frac{(q^2-2pqz)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial x+(2p^2z-pq)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial x-p(py+qx)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial x}{py+qx}.$$

$$=(q\,\partial x-p\,\partial y)\,\frac{\left(q\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-p\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\right)}{py+qx}$$

$$+(p\,\partial x+q\,\partial y)\,\frac{\left(-2qz\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)+2pz\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-py\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)-qx\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)}{py+qx}.$$

Faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=p$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)=q$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=0$, on a $\partial\psi=q\partial p+p\partial q$ et $\psi=pq$. Faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=-x$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)=y$, on a

$$\partial\psi=\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z+y\,\partial p-x\,\partial q+p\,\partial y-q\,\partial x$$

$$+\frac{2qxz+2pyz-py\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)-qx\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)}{py+qx}=\text{(en faisant } \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)=2z,\text{)}$$

$2z\partial z+y\partial p-x\partial q+p\,\partial y-q\,\partial x$ et $\psi=zz+py-qx$. L'intégrale est donc $py-qx+z^2=\mathrm{F}:pq$.

§. 23. Soit l'équation $(q-p)\left(\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)^2\right)$

$$+(2qx^2y+2qxz+2q^2xy+2q^2z-q-x)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x}\right)$$

$$+(2px^2y+2pxz-2qxy^2-2qyz+y+p-x-q)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)$$

$$+(p+y-2pxy^2-2pyz-2p^2xy-2p^2z)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)=0.$$

On a ici $\frac{\alpha}{\mathrm{N}}=\frac{2qx^2y+2qxz+2q^2xy+2q^2z-q-x}{q-p}$,

$\frac{\beta}{\mathrm{N}}=\frac{2px^2y+2pxz-2qxy^2-2qyz+y+p-x-q}{q-p}$,

$\frac{\gamma}{\mathrm{N}}=\frac{p+y-2pxy^2-2pyz-2p^2xy-2p^2z}{q-p}$, $\theta=0$.

Donc $\sqrt{\frac{\beta^2}{4\mathrm{N}^2}-\frac{\alpha\gamma}{\mathrm{N}^2}}=\frac{\frac{p}{2}+\frac{q}{2}+\frac{y}{2}+\frac{x}{2}-pxz-qyz-2pqz-px^2y-qxy^2-2pqxy}{q-p}$,

$\frac{\beta}{2\mathrm{N}}$

$$\frac{\beta}{2N}+\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2}-\frac{\alpha\gamma}{N^2}}=\frac{p+y-2qyz-2pqz-2qxy^2-2qqxy}{q-p},$$

$$\frac{\beta}{2N}-\sqrt{\frac{\beta^2}{4N^2}-\frac{\alpha\gamma}{N^2}}=-\frac{q-x+2pxz+2pqz+2px^2y+2pqxy}{q-p}.$$

Les équations (b) du §. 1. deviennent:

$$(q-p)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+q\,(q-p)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$
$$+(-q-x+2pxz+2pqz+2px^2y+2pqxy)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$$
$$-(2qx^2y+2qxz+2q^2xy+2q^2z-q-x)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0,$$
$$(q-p)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+p\,(q-p)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$
$$+(-q-y+2pxy^2+2pyz+2p^2xy+2p^2z)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$$
$$+(p+y-2qyz-2pqz-2qxy^2-2pqxy)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0.$$

Je tire de ces équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$ et $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$, et j'ai:

$$\partial\psi=\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z+\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial p+\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial q$$
$$+(q\partial y+p\partial x)\frac{\begin{pmatrix}(q-p)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+2pxy\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\\+2pz\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-2qz\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-2qxy\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\end{pmatrix}}{p-q}$$
$$+(x\partial y+y\partial x)\frac{\begin{pmatrix}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+2pxy\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+2pz\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\\+\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-2qz\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-2qxy\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\end{pmatrix}}{p-q}.$$

Faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)=1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=1$, j'ai $\partial\psi=\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z+\partial p+\partial q$ $+(q\partial y+p\partial x)\left(-\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+2xy+zz\right)+(x\partial y+y\partial x)(2xy+zz)$

$$=\left(\text{en faisant }\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=2xy+zz\right),$$

$$2(xy+z)\,\partial z+\partial p+\partial q+z(xy+z)(x\partial y+y\partial y)$$

et $\psi=p+q+(xy+z)^2$. Faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)=q$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=p$, j'ai $\partial\psi=\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z+q\partial p+p\partial q+(q\partial y+p\partial x)\left(-\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+1\right)+(x\partial y+y\partial x)$

=

$= $ (en faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 1$) $\partial z + q\,\partial p + p\,\partial q + x\,\partial y + y\,\partial x$, et $\psi = pq + xy + z$. L'intégrale est donc

$$pq + xy + z = F : (p + q + (xy + z)^2).$$

§. 24. Soit l'équation $q^2\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) - 2pq\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right) + p^2\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) = 0$, que traite Mr. de Nieuport p. 122. On a ici $N = 0$, $\alpha = q^2$, $\beta = -2pq$, $\gamma = p^2$, $\theta = 0$. Donc $\sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma} = 0$. Les équations ($b$) se reduisent à celle-ci : $p\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + q\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0$, ce qui donne $\psi = F : \frac{p}{q}$. Les équations (c) se réduisent à celle-ci : $q\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - p\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0$, équation à laquelle on satisfait en faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0$, ce qui donne $\psi = f : z$. L'intégrale est donc $\frac{p}{q} = F : z$, comme le trouve Mr. de Nieuport.

§. 25. On a donc un critère général, pour savoir si une équation du second degré à trois variables est susceptible d'une Intégrale première de la forme $\psi = F : \Phi$; car dans ce cas $\sqrt{\frac{\beta^2}{N^2} - \frac{\alpha\gamma}{N^2} + \frac{\theta}{N}}$ est une quantité rationelle. Si cette équation n'est pas rationelle, c'est une preuve que l'équation n'a point d'Intégrale première de cette forme. Soit, par exemple, l'équation, $(1 + q^2)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) - 2pq\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right) + (1 + p^2)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) = 0$. On a ici $N = 0$, $\alpha = 1 + q^2$, $\beta = -2pq$, $\gamma = 1 + p^2$, $\theta = 0$, donc $\sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma} = 2\sqrt{-1}\sqrt{1 + p^2 + q^2}$, cette quantité étant irrationelle, on en conclud que l'équation n'a point d'Intégrale première de cette forme, c'est ce que trouve Mr. de Nieuport.

§. 26. Indépendamment des cas où ces Intégrales premières peuvent conduire aux Intégrales complètes, elles fournissent aussi des moyens de trouver plus aisément des Intégrales particulières. Soit, par exemple, l'Intégrale première trouvée dans le §. 19, $p^2 q^2 + x = F : (pq + y)$. Soit $F : (pq + y) = (pq + y)^2$, on aura $x = 2pqy + y^2$, $pq = \frac{x - y^2}{2y}$. Soit $p = (\frac{\partial z}{\partial x}) = f' : y$, on aura $z = x f' : y + F : y$, donc $q = (\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{x - y^2}{2yf' : y} = \frac{x}{2yf' : y} - \int \frac{y \partial y}{2f' : y}$. Donc $f' : y = \frac{\partial y}{2yf' : x}$, $f'' : y = \frac{1}{2yf' : y}$, $2 \partial y f'' : y f' : y = \frac{\partial y}{y}$, $(f' : y)^2 = ly$, $f' : y = \sqrt{ly}$, $F : y = -\int \frac{y \partial y}{2 \sqrt{ly}}$. Donc $z = x \sqrt{ly} - \int \frac{y \partial x}{2 \sqrt{ly}}$, intégrale particulière que trouve Mr. de Nieuport.

§. 27. Soit $\psi = F : \phi$ l'intégrale première d'une équation aux différences partielles du troisième degré, ψ et ϕ étant des fonctions de $x, y, p, p, q, r, s, t, z$, où $\partial z = p \partial x + q \partial y$, $\partial \partial z = r \partial x^2 + s \partial x \partial y + t \partial y^2$, ensorte que $p = (\frac{\partial z}{\partial x})$, $q = (\frac{\partial z}{\partial y})$, $r = (\frac{\partial \partial z}{\partial x^2})$, $s = (\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial y})$, $t = (\frac{\partial \partial z}{\partial y^2})$, et par conséquent $(\frac{\partial p}{\partial y}) = (\frac{\partial q}{\partial x})$, $(\frac{\partial r}{\partial y}) = (\frac{\partial s}{\partial x})$, $(\frac{\partial s}{\partial t}) = (\frac{\partial t}{\partial x})$, on fera pour abréger,

$$m = (\frac{\partial \psi}{\partial y}) + q (\frac{\partial \psi}{\partial z}),\ n = (\frac{\partial \psi}{\partial x}) + p (\frac{\partial \psi}{\partial z}),\ \mu = s (\frac{\partial \psi}{\partial p}) + t (\frac{\partial \psi}{\partial q}),$$
$$\nu = r (\frac{\partial \psi}{\partial p}) + s (\frac{\partial \psi}{\partial q}),$$
$$m' = (\frac{\partial \phi}{\partial p}) + q (\frac{\partial \phi}{\partial z}),\ n' = (\frac{\partial \phi}{\partial x}) + p (\frac{\partial \phi}{\partial z}),\ \mu' = s (\frac{\partial \phi}{\partial p}) + t (\frac{\partial \phi}{\partial q}),$$
$$\nu' = r (\frac{\partial \phi}{\partial p}) + s (\frac{\partial \phi}{\partial q}).$$

On aura en différentiant d'abord suivant x, puis suivant y:

$$n + \nu + (\frac{\partial \psi}{\partial r}) (\frac{\partial r}{\partial x}) + (\frac{\partial \psi}{\partial s}) (\frac{\partial s}{\partial x}) + (\frac{\partial \psi}{\partial t}) (\frac{\partial t}{\partial x})$$
$$= (n' + \nu' + (\frac{\partial \phi}{\partial r}) (\frac{\partial r}{\partial x}) + (\frac{\partial \phi}{\partial s}) (\frac{\partial s}{\partial x}) + (\frac{\partial \phi}{\partial t}) (\frac{\partial t}{\partial x}))\ F' : \phi,$$

m

$$m+\mu+\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)$$
$$=\left(m'+\mu'+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\right)\ F':\Phi.$$

Eliminant $F':\Phi$ et développant l'équation, on a, après avoir restitué les valeurs,

$$\left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right)\left(\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)\right)$$
$$+\left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right)\left(\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\right)\right)$$
$$+\left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)\right)\left(\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\right)^2-\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)\right)$$
$$+\left((m'+\mu')\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-(m+\mu)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)$$
$$+\left((m'+\mu')\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)+(n+\nu)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)-(m+\mu)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)-(n'+\nu')\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\right)$$
$$+\left((m'+\mu')\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+(n+\nu)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)-(m+\mu)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)-(n'+\nu')\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\right)$$
$$+\left((n+\nu)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)-(n'+\nu')\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)$$
$$+(n+\nu)(m'+\mu')-(m+\mu)(n'+\nu')=0.$$

Soit donc proposée l'équation,

$$N'\left(\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)\right)$$
$$+N''\left(\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\right)\right)$$
$$+N'''\left(\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\right)^2-\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)\right)$$
$$+\alpha\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)+\beta\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\right)+\gamma\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\right)+\delta\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)+\theta=0,$$ on aura

$$N'=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right),$$
$$N''=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right),$$
$$N'''=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right);$$
$$\alpha=(m'+\mu')\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-(m+\mu)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right);$$
$$\beta=(m'+\mu')\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)-(n'+\nu')\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-(m+\mu)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)+(n+\nu)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right);$$
$$\gamma=(m'+\mu')\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-(n'+\nu')\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)-(m+\mu)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)+(n+\nu)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right);$$

 $\delta =$

$$\delta = -(n'+\nu')\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right) + (n+\nu)\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial t}\right)$$

$$\theta = (m'+\mu')(n+\nu) - (n'+\nu')(m+\mu).$$

On tire de là $m'+\mu' = \dfrac{\alpha + (m+\mu)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}$,

$$n'+\nu' = \frac{-\delta + (n+\nu)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}.$$

Substituant ces valeurs dans celles de β, γ, θ, on a

$$\alpha\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial s}\right)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right) - \beta\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \delta\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 + N''(m+\mu)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$
$$+ N'(n+\nu)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0, \quad (1)$$

$$\alpha\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - \gamma\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \delta\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial s}\right) + N'(m+\mu)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$
$$+ N'''(n+\nu)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0, \quad (2)$$

$$\alpha(n+\nu)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \delta(m+\mu)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right) - \theta\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$
$$+ N'(m+\mu)(n+\nu) = 0, \quad (3)$$

$$N''\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right) + N'''\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right) - N'\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial s}\right) = 0 \quad (4).$$

On tire des deux premières équations,

$$n+\nu = \frac{-\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - \delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 - N''(m+\mu)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}{N'\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}$$

$$= \frac{-\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 + \gamma\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - \delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right) - N'(m+\mu)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}{N'''\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}.$$

Donc $m+\mu = \dfrac{\begin{array}{l} N'\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - N'''\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + N'''\beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) \\ - N'\gamma\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - N'''\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 + N'\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)\end{array}}{(N''N''' - N'^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}$

$n+\nu$

$$n+\nu=\frac{\begin{array}{c}N'\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-N''\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2-N'\beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\\+N''\gamma\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+N'\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2-N''\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)\end{array}}{(N''N'''-N'^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}.$$

Or $\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)=\frac{N''\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+N'''\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{N'}$.

On a donc en substituant cette valeur,

$$m+\mu=-\frac{\alpha}{N'}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$
$$+\frac{(-\alpha N''^2+\beta N'N'''-\gamma N'^2+\delta N'N'')\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{N'(N''N'''-N'^2)}$$
$$n+\nu=-\frac{\delta}{N'}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$
$$+\frac{(\alpha N'N'''-\beta N'^2+\gamma N'N''-\delta N''^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}{N'(N''N'''-N'^2)}.$$

Substituant ces valeurs dans la troisième équation, et divisant par $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$, on obtient l'équation de condition,

$$\frac{\alpha\delta}{N'}+\frac{(N'N'''\alpha-N'^2\beta+N'N''\gamma-N''^2\delta)(N'''^2\alpha-N'N'''\beta+N'^2\gamma-N'N''\delta)}{N'(N'^2-N''N''')^2}+\theta=0.$$

On tire des valeurs de $m+\mu$ et $n+\nu$,

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=\frac{(N'^2-N''N''')\left(\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+N'(m+\mu)\right)}{\alpha N'''^2-\beta N'N'''+\gamma N'^2-\delta N'N''}$$
$$=-\frac{(N'N'''\alpha-N'^2\beta+N'N''\gamma-N''^2\delta)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-N'(N'^2-N''N''')(n+\nu)}{\delta(N'^2-N''N'')}$$

Donc

$$\left(\begin{array}{c}(N'^2-N'N''')^2\alpha\delta+(N'N'''\alpha-N'^2\beta+N'N''\gamma-N''^2\delta)\\(N'''^2\alpha-N'N'''\beta+N'^2\gamma-N'N''\delta)\ \frac{\partial\psi}{\partial t}\end{array}\right)$$
$$+N'\delta(N'^2-N''N''')^2(m+\mu)+N'(N'^2-N''N''')$$
$$(N'''^2\alpha-N'N'''\beta+N'^2\gamma-N'N''\delta)(n+\nu)=0$$

ou en faisant usage de l'équation de condition, et divisant par $N'(N'^2 - N''N''')$,

$$\delta(N'^2-N''N''')(m+\mu)+(\alpha N'''^2-\beta N'N'''+\gamma N'^2-\delta N N')(n+\nu)$$
$$-(N'^2-N''N''')\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=0.$$ On trouvera ensuite par là,

$$\alpha(N'^2-N''N''')(n+\nu)-(\alpha N'N'''-\beta N'^2+\gamma N'N''-\delta N''^2)(m+\mu)$$
$$-(N'^2-N''N''')\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0.$$

$$+(\alpha N'N'''-\beta N''N'''+\gamma N'N''-\delta N''^2)(n+\nu)$$
$$-(\alpha N'''^2-\beta N'N''+\gamma N''N'''-\delta N'N'')(m+\mu)$$
$$-(N'^2-N''N''')\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)=0 \quad (c).$$

On remettra les valeurs de m, n, μ, ν, et l'on aura trois équations linéaires du premier degré, qui s'intégreront par les méthodes connues.

§. 28. Soit, par exemple, $N'=-2$, $N''=-1$, $N'''=-1$, $\alpha=3+3t-q-s$, $\beta=-1+2t-4s-q+p+r$, $\gamma=-1+t-3s-q+p+r$, $\delta=-1-s+p+r$, $\theta=p-q-s+r+pt+rt-qs-ss$, les trois équations (c) du §. précédent deviennent

$$3(-1-s+p+r)(m+\mu)+(3+3t-3q-3s)(n+\nu)$$
$$-3(p-q-s+r+pt+rt-qs-ss)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=0,$$
$$3(3+3t-q-s)(n+\nu)-(-3p-3r+qs+9)(m+\mu)$$
$$-3(p-q-s+r+pt+rt-qs-ss)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0,$$
$$3(2+2t-q-s)(n+\nu)-3(2+2s-p-r)(m+\mu)$$
$$-3(p-q-s+r+pt+rt-qs-ss)\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)=0,$$

ou en remettant les valeurs de m, μ, n, ν, et divisant par 3,

(1 +

$$(1+t-q-s)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+(-1-s+p+r)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$
$$(p-q+pt-ps-qs+qr)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$
$$+(r-s+rt-qr-ss+ps)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$$
$$+(s-t-qs-ss+pt+rt)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$$
$$-(p-q-s+r+pt+rt-qs-ss)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=0,$$
$$(3+3t-q-s)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-(3+3s-p-r)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$
$$+(3p-3q+3pt-ps+qr-3qs)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$
$$+(3r-3s+3rt-qr+ps-3ss)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$$
$$+(3s-3t-qs-ss+pt+rt)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$$
$$-(p-q-s+r+pt+rt-qs-ss)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0,$$
$$(2+2t-q-s)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-(2+2s-p-r)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$
$$-(2q-2p+2qs-rq-2pt+2ps)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$
$$-(2s+2ss-ps-2r-2rt+qr)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$$
$$-(2t-2s-pt-rt+qs+ss)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$$
$$-(p-q-s+r+pt+rt-qs-ss)\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)=0.$$

Je tire de ces trois équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$ et j'ai

$$\partial\psi=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z+\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial p+\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial q$$
$$+(\partial t+3\partial r+2\partial s)\frac{\left((1+t)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-(1+s)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+(p-q+pt-qs)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+(r-s+rt-ss)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+(s-t)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\right)}{p-q-s+r+pt+rt-qs-ss}$$
$$+(\partial t+\partial r+\partial s)\frac{\left((-q+s)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+(p+r)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+(qr-ps)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+(ps-qr)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+(pt+rt-qs-ss)\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\right)}{p-q-s+r+pt+rt-qs-ss}.$$

Faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)=1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0$, on a $\partial\psi=\partial z+\partial p+\partial t+3\partial r+2\partial s$ et $\psi=z+t+3r+2s$.

Fai-

Faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 1$, on a $\partial\psi = \partial x + \partial y + \partial q + \partial t + \partial r + \partial s$ et $\psi = s + y + q + t + r + s$. L'intégrale est donc

$$z + p + t + 2s + 8r = F : (x + y + q + t + s + r).$$

§. 29. Soit encore $N' = (x - y)(x + z)\, s\, (r - t)$, $N'' = (x - y)(x + z) + (r - s)$, $N'' = (x - y)(x + z)\, r\, (s - t)$,

$$\alpha = (1 - r - s - t + q + pq + sqy + spy)\, ts\, (z + z)$$
$$- (xz + rstq + qxy + + sx + tx)(x - y);$$

$$\beta = (1 - r - s - t + q + pq + sqy + tpy)\, rt\, (x + z)$$
$$- (xz + rstq + qxy + sx + tx)(x \quad y)$$
$$- (1 + r + s + t + p + qry + psy)\, ts\, (x + z)$$
$$+ (rts + yz + p + q + prst + pxy + rx + sx)(x - y);$$

$$\gamma = (1 - r - s - t + pq + q + sqy + tpy)\, rs\, (x + z)$$
$$- (xz + qrst + qxy + sx + tx)(x - y)$$
$$- (1 + r + s + t + p + qry + psy)\, rt\, (x + z)$$
$$+ (rst + y + p + q + prst + pxy + rx + sx)(x - y);$$

$$\delta = (rst + yz + prst + p + q + pxy + rx + sx)(x - y)$$
$$- (1 + r + s + t + p + qry + psy)\, rs\, (x + z);$$

$$\theta = (rst + yz + prst + p + q + pxy + rx + sx)(1 - r - s - t + pq + q + sqy + pty)$$
$$- (xz + qrst + qxy + sx + tx)(1 + r + s + t + p + qry + psy).$$

Je fais pour abréger :

$$A = 1 - r - s - t + q + pq + qsy + pty,$$
$$B = xz + qrst + qxy + sx + tx,$$

C =

$$C = 1 + r + s + t + p + qry + psy,$$
$$D = rts + yz + p + q + prst + pxy + rx + sx.$$

Les équations (c) deviendront en substituant les valeurs et reduisant,

$$(A(x+z)ss - B(x-y))(n+\nu) - (C(x+z)rs - D(x-y))$$
$$(m+\mu) - AD - BC)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0,$$
$$(A(x+z)st - B(x-y))(n+\nu) - (C(x+z)st - D(x-y))$$
$$(m+\mu) - (AD - BC)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0,$$
$$(A(x+z)rt - B(x-y))(n+\nu) - (C(x+z)rt - D(x-y))$$
$$(m+\mu) - (AD - BC)\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial s}\right) = 0.$$

Je tire de ces trois équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$, et j'ai:

$$\partial\psi = \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z + \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial p + \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial q$$
$$+ \frac{(rs\partial t + st\partial r + rt\partial s)\,(A\,(x+z)\,(n+\nu) - C\,(x+z)\,(m+\mu))}{AD - BC}$$
$$- \frac{(\partial t + \partial s + \partial r)\; B\,(x-y)\,(n+\nu) - D\,(x-y)\,(m+\mu))}{AD - BC}.$$

Je fais $n + \nu = D$, $m + \mu = B$, et j'ai $\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial q + rs\partial t + st\partial r + rt\partial s$, équation qu'il faut combiner avec les équations,

$$\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial x}\right) + p\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\right) + r\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right) + s\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right) = rts + yz + p + q + prts + pxy + rx + sx,$$
$$\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial y}\right) + q\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\right) + s\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right) + t\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right) = xz + qrst + qxy + sx + tx.$$

On voit que $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = rts + yz + p + q$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = rts$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = xz$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = x$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = x$, ce qui donne

$$\partial\psi = (rts + yz + p + q)\,\partial x + xz\,\partial y + (rts + xy)\,\partial z$$

+

$+ x \partial p + x \partial q + r s \partial t + s t \partial r + r t \partial s,$

et $\psi = r t s\ (x + z) + (p + q) x + x y z.$

Je fais ensuite $n + \nu = C$, $(m + \mu) = A$, et j'ai $\partial \psi = (\frac{\partial \psi}{\partial x}) \partial x + (\frac{\partial \psi}{\partial y}) \partial y + (\frac{\partial \psi}{\partial z}) \partial z + (\frac{\partial \psi}{\partial p}) \partial p + (\frac{\partial \psi}{\partial q}) + \partial t + \partial s + \partial r$, équation qu'il faut combiner avec les équations :

$$(\tfrac{\partial \psi}{\partial x}) + p (\tfrac{\partial \psi}{\partial z}) + r (\tfrac{\partial \psi}{\partial p}) + s (\tfrac{\partial \psi}{\partial q}) = 1 + r + s + t + p + q r y + p s y,$$

$$(\tfrac{\partial \psi}{\partial y}) + q (\tfrac{\partial \psi}{\partial z}) + s (\tfrac{\partial \psi}{\partial p}) + t (\tfrac{\partial \psi}{\partial q}) = 1 - r - s - t + q + pq + qsy + pty.$$

On voit que $(\frac{\partial \psi}{\partial x}) = 1 + r + s + t$, $(\frac{\partial \psi}{\partial y}) = 1 - r - s - t + q + pq$, $(\frac{\partial \psi}{\partial z}) = 1$, $(\frac{\partial \psi}{\partial p}) = q y$, $(\frac{\partial \psi}{\partial q}) = p y$, ce qui donne

$$\partial \psi = (1 + r + s + t) \partial x + (1 - r - s - t + pq + q) \partial y + \partial z + q y \partial p + p y \partial q + \partial t + \partial r + \partial s,$$

et $\psi = (r + s + t)(x - y) + pqy + x + y + z$. L'intégrale est donc $rts\,(x + z) + (p + q) x + xyz = F : ((r + t + s)(x - y) + pqy + x + y + z))$. J'ai rapporté cet exemple fort succinctement, parceque j'ai craint de charger ce Mémoire de calculs trop longs, j'en ai calculé plusieurs autres que je supprime pour abréger.

§. 30. Soit $N' = 0$, $N'' = -3$, $N''' = 1$, $\alpha = 3 + 3t$, $\beta = -1 + 2t - 4s - q$, $\gamma = -1 + t - 2s + p + r$, $\delta = -1 - s$, $\theta = p - q - s + r + pt + rt - qs - ss$, les équations (c') deviennent, en substituant les valeurs et réduisant :

$$+ (1 + t)(m + \nu) - (1 + s)(m + \mu)$$
$$- ((p + r)(1 + t) - (q + s)(1 + s)) (\tfrac{\partial \psi}{\partial t}) = 0,$$

$(3 + 3t)$

$$(3 + 3t)(n + \nu) - 3(1 + s)(m + \mu)$$
$$- ((p + r)(1 + t) - (q + s)(1 + s)) \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0;$$
$$(2 + 2t - s - q)(n + \nu) - (2 + 2s - p - r)(m + \mu)$$
$$- ((p + r)(1 + t) - (q + s)(1 + s)) \left(\frac{\psi}{\partial s}\right) = 0;$$

Je tire de ces trois équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$, et j'ai:

$$\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial q$$
$$+ \frac{(\partial t + 3\partial r + 2\partial s)((n + \nu)(1 + t) - (1 + s)(m + \mu))}{(p + r)(1 + t) - (q + s)(1 + s)}$$
$$+ \frac{\partial s((p + r)(m + \mu) - (q + s)(n + \nu))}{(p + r)(1 + t) - (q + s)(1 + 1)}.$$

Faisant $n + \nu = p + r$, $m + \mu = q + s$, on a

$$\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial q$$
$$+ \partial t + 3\partial r + 2\partial s,$$

équation qu'il faut combiner avec celles-ci:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + r\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + s\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = p + r,$$
$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + s\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + t\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = q + s.$$

On voit qu'on a $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0$, $\left(\frac{\psi}{\partial y}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0$, ce qui donne

$$\partial\psi = \partial z + \partial p + \partial t + 3\partial r + 2\partial s \quad \text{et} \quad \psi = z + p + 3r + 2s + t.$$

Faisant $n + \nu = 1 + s$, $m + \mu = 1 + t$, on a $\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x$
$$+ \left(\frac{\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z + \left(\frac{\psi}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right)\partial q + \partial s,$$

équation qu'il faut combiner avec celles-ci:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + r\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + s\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 1 + s,$$
$$\left(\frac{\psi}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\psi}{\partial z}\right) + s\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + t\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 1 + t.$$

On voit qu'on a $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 1$, ce qui donne

$$\partial\psi = \partial x + \partial y + \partial q + \partial s \text{ et } \psi = x + y + q + s.$$

L'intégrale est donc $3r + 2s + t + p + z = F:(s + q + x + y)$.

§. 31. Soit $N' = -3$, $N'' = 0$, $N''' = -2$, $\alpha = 3 + 3t$, $\beta = -1 + 2t - 3s$, $\gamma = -1 + t - 3s - q$, $\delta = -1 - s + p + r$, $\theta = p - q - s + r + pt + rt - qs - ss$, les équations (c') deviendront, en substituant les valeurs et réduisant,

$$(-1 - s + p + r)(m + \mu) + (1 + t - s - q)(n + \nu)$$
$$-((p + r)(1 + t) - (q + s)(1 + s))\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0,$$
$$-(3 + 3s)(m + \mu) + (3 + 3t)(n + \nu)$$
$$-((p + r)(1 + t) - (q + s)(1 + s))\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0,$$
$$-(2 + 2s)(m + \mu) + (2 + 2t)(n + \nu)$$
$$-((p + r)(1 + t) - (q + s)(1 + s))\left(\frac{\psi}{\partial s}\right) = 0.$$

Je tire de là les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)$ et j'ai :

$$\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial q$$
$$+ \frac{(\partial t + 3\partial r + 2\partial s)((n + \nu)(1 + t) - (m + \mu)(1 + s)) + \partial t((p + r)(m + \mu) - (q + s)(n + \nu))}{(p + r)(1 + t) - (q + s)(1 + s)}$$

d'où l'on tire, en procédant comme dans le §. précédent, l'intégrale $3r + 2s + t + p + z = F:(t + x + y + q)$.

§. 32. Soit $N' = -2$, $N'' = N''' = 0$, $\alpha = 3 + 3t - q - s$, $\beta = -3 - 3s + p + r$, $\gamma = 1 + s - q - s$, $\delta = -1 - s + p + r$, $\theta = p - q - s + r + pt + rt - qs - ss$. Les équations $c^{(1)}$ deviennent

viennent, en substituant les valeurs et réduisant,

$$(1+t-q-s)(n+\nu)+(-1-s+p+r)(m+\mu)$$
$$-((p+r)(1+t)-(q+s)(1+s))\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=0,$$
$$(3+3t-q-s)(n+\nu)+(-3-3s+p+r)(m+\mu)$$
$$-((p+r)(1+t)-(q+s)(1+s))\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0,\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)=0.$$

Je tire des deux premières équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$ et $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$, et j'ai:

$$\partial\psi=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z+\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial p+\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial q$$
$$+(\partial t+3\partial r)\frac{((1+t)(n+\nu)-(1+s)(m+\mu))+(\partial t+\partial r)((p+r)(m+\mu)-(q+s)(n+\nu))}{(p+r)(1+t)-(q+s)(1+s)}$$

d'où l'on tire, en procédant comme dans les deux §. précédens, l'intégrale $3r+t+p+z=F:(r+t+q+x+y)$.

§. 33. Si $N'=N''=0$, on a $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=0$, car les valeurs du §. 27. donnent, $\dfrac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)}=\dfrac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)}=\dfrac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)}$, ce qui donnerait $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)=N'''=0$. Or N''' n'étant pas nul, il faut que $\dfrac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)}$ soit indéterminé, c'est à dire que $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=0$. Donc $\alpha=0$, et le équations (c') deviennent identiquement nulles. Reprenant les valeurs du §. 27, je trouve, en faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=0$,

$$n'+\nu'=-\frac{\delta+(n+\nu)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)},\quad m'+\mu'=\frac{\beta+(m+\mu)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)}.$$

Substituant ces deux valeurs dans celles de γ et de θ, et réduisant, on aura les deux équations:

$$\beta \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - \gamma \left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \delta \left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)^2 + N''' (m+\mu) \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$
$$+ N''' (n+\nu) \left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right) = 0,$$
$$\beta (n+\nu) \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \delta (m+\mu) \left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right) - \theta \left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$
$$+ N''' (m+\mu)(n+\nu) = 0.$$

On tire de la seconde équation,

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right) = \frac{\beta (n+\nu) \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + N''' (m+\mu)(n+\nu)}{\theta \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - \delta (m+\mu)},$$

ce qui étant substitué dans la première, on a, après les réductions, et après avoir divisé toute l'équation par $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$:

$$\beta\theta^2 \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^3 + (N'''\theta^2 - 2\beta\delta\theta)(m+\mu)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 + (\beta\delta^2 - 2N'''\delta\theta)(m+\mu)^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$
$$- \beta\gamma\theta(n+\nu) \qquad\qquad + (\beta\gamma\delta - N'''\gamma\theta)(m+\mu)(n+\nu)$$
$$+ (\beta^2\delta + N'''\beta\theta)(n+\nu)^2$$
$$+ N'''\delta^2 (m+\mu)^3 + N'''\gamma\delta (m+\mu)^2 (n+\nu)$$
$$+ (N'''\beta\delta + N'''^2\theta)(m+\mu)(n+\nu)^2 = 0.$$

Cette équation du troisième degré peut se décomposer en deux facteurs, $\beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + N'''(m+\mu) = 0$,

$$\theta^2 \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - 2\delta\theta(m+\mu)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - \gamma\theta(n+\nu)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$
$$+ \delta^2 (m+\mu)^2 + \gamma\delta(m+\mu)(n+\nu) + (\beta\delta + N'''\theta)(n+\nu)^2 = 0.$$

Cette dernière équation donne l'équation linéaire suivante :

$$- 2\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + 2\delta(m+\mu)$$
$$+ (n+\nu)\left(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\beta\delta - 4N'''\theta}\right) = 0,$$

et l'on aura par le moyen de cette équation,

$$- 2\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right) + 2\beta(n+\nu)$$
$$+ (m+\mu)\left(\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 - 4\beta\delta - 4N'''\theta}\right) = 0 \quad (d').$$

Ces

Ces deux équations tiendront lieu dans ce cas des équations (c'). La première équation donne $\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right) = 0$. Or on ne peut avoir en même tems $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right) = 0$, ce qui rendrait N''' nul, donc les équations (∂) donneront la valeur de Φ. Pour avoir la valeur de ψ, reprenant les valeurs du §. 27. en faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right) = 0$, on en tire

$$n' + \nu' = -\frac{\delta + (n+\nu)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)},$$

$$m' + \mu' = \frac{\gamma + (m+\mu)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) - (n+\nu)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}$$

$$= \text{(à cause de } \beta = -(m+\mu)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)\text{)}$$

$$\frac{\gamma + (m+\mu)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) + \beta\frac{(n+\nu)}{m+\mu}}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}.$$

Ces valeurs substituées dans la valeur de θ donnent après les réductions :

$$\beta(n+\nu)^2 + \gamma(m+\mu)(n+\nu) + \delta(m+\mu)^2 - \theta(m+\mu)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0,$$

ou en substituant la valeur de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = -\frac{N'''(m+\mu)}{\beta}$ et réduisant,

$$\beta^2(n+\nu)^2 + \beta\gamma(m+\mu)(n+\nu)(+\beta\delta(+N'''\theta)(m+\mu)^2 = 0,$$

d'où l'on tire cette équation linéaire :

$$2\beta(n+\nu) + (\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\beta\delta - 4N'''\theta})(m+\mu) = 0,$$

$$\text{ou } 2N'''(n+\nu) - (\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\beta\delta - 4N'''\theta})\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0. \quad (e')$$

On remarquera que $\sqrt{\gamma^2 - 4\beta\delta - 4N'''\theta} = (m'+\mu')\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$

$$+ (n'+\nu')\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right) - (m+\mu)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) - (n+\nu)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right),$$

et par conséquent est toujours rationel.

Si

Si $N' = N'' = 0$, on aura $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = 0$, et la solution sera parfaitement analogue à la précédente.

§. 34. Soit, par exemple, $N' = N'' = 0$, $N''' = -1$, $\alpha = 0$, $\beta = 2 + 2t - q - s$, $\gamma = -1 + t - 3s - q + p + r$, $\delta = -1 - s + p + r$, $\theta = p - q - s + r + pt + rt - qs - ss$, on aura $\sqrt{\gamma^2 - 4\beta\delta - 4N'''\theta} = 3 + t + s - q - p - r$,

$$\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\beta\delta - 4N'''\theta} = 2 + 2t - 2s - 2q,$$

$$\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\beta\delta - 4N'''\theta} = -4 - 4s + 2p + 2r.$$

Les équations (d) déviennent, en substituant les valeurs et réduisant,

$$(-1 - s + p + r)(m + \mu) + (1 + t - s - q)(n + \nu) - ((p + r)(1 + t) - (q + s)(1 + s))\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0$$

$$(-2 - 2s + p + r)(m + \mu) + (2 + 2t - s - q)(n + \nu) - ((p + r)(1 + t) - (q + s)(1 + s))\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right) = 0.$$

Je tire de ces deux équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$ et $\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)$, et j'ai:

$$\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial q$$
$$+ \frac{(\partial t + 2\partial s)((1 + t)(n + \nu) - (1 + s)(m + \mu)) - (\partial t - \partial s)((p + r)(m + \mu) - (q + s)(n + \nu))}{(p + r)(1 + t) - (q + s)(1 + s)}$$

d'où l'on tire, en procédant comme dans les §. précédens, l'intégrale $2s + t + p + z = F : (s + t + q + x + y)$.

§. 35. Soit $N''' = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = -q - s$, $\gamma = 1 + t - q - s + p + r$, $\delta = -1 - s + p + r$, $\theta = (p + r)(1 + t) - (q + s)(1 + s)$, on aura $\sqrt{\gamma^2 - 4\beta\delta - 4N'''\theta} = 1 + t - q - s - p - r$,

$$\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\beta\delta - 4N'''\theta} = 2(1 + t - q - s),$$

$$\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\beta\delta - 4N'''\theta} = 2(p + r).$$

Les

Les équations (d') deviennent, en substituant les valeurs et réduisant,

$$(-1-s+p+r)(m+\mu)+(1+t-q-s)(n+\nu)$$
$$-((p+r)(1+t)-(q+s)(1+s))\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=0$$
$$(p+r)(m+\mu)-(q+s)(n+\nu)$$
$$-((p+r)(1+t)-(q+s)(1+s))\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)=0.$$

Je tire de ces deux équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$ et $\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)$, et j'ai:

$$\partial\psi=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z+\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial p+\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial q$$
$$+\frac{(\partial t+\partial s)((p+r)(m+\mu)-(q+s)(n+\nu))+\partial t((1+t)(n+\nu)-(1+s)(m+\mu))}{(p+r)(1+t)-(q+s)(1+s)}$$

d'où l'on tire, en procédant comme dans les §. précédens, l'intégrale $t+p+z=F:(s+t+q+x+y)$. L'équation (e') auroit donné $(n+\nu)-(p+r)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=0$, d'où tirant la valeur de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$, on auroit eu $\partial\psi=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z+\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial p+\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial q+\frac{(n+\nu)\partial t}{p+r}$, ce qui donne $n+\nu=p+r$, et l'on a l'intégrale $\psi=t+p+z$. Mais l'on voit que les formules (d') nous l'avoient deja donnée. Cependant cette équation (e') peut être utile dans des cas plus composés. Mais je ne pourrois en donner des exemples sans charger ce Mémoire de calculs d'une trop grande longueur.

§. 36. Si $N'=N''=N'''=0$, les équations (1), (2), (3) du §. 27. deviennent,

$$\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2=0,$$
$$\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2-\gamma\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)=0,$$
$$\alpha(n+\nu)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+\delta(m+\mu)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=0.$$

On

On a de plus $\frac{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial s}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)}$. Donc $\left(\frac{\partial\Psi}{\partial s}\right) = A\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)$; $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right) = A\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)$, $\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right) = B\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = B\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)$. Substituant ces valeurs dans les trois équations précédentes, on a

$$\alpha A B - \beta B + \delta = 0; \quad \alpha B^2 - \gamma B + \delta A = 0;$$
$$\alpha(n+\nu)B + \delta(m+\mu) - \theta B\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) = 0.$$

Eliminant A des deux premieres équations, on a:

$$\alpha^2 B^3 - \alpha\gamma B^2 - \beta\delta B - \delta^2 = 0,$$

équation du troisième degré qui aura au moins une racine réelle. On aura donc une valeur de B, et par conséquent $A = \frac{\gamma B - \alpha B^2}{\delta}$. Ensuite la troisième équation, qui est linéaire, fournira deux autres équations, ensorte qu'on aura

$$\alpha(n+\nu)B + \delta(m+\mu) - B\theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) = 0,$$
$$\alpha(n+\nu)B + \delta(m+\mu) - \theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right) = 0, \quad (f)$$
$$\alpha(n+\nu)AB + \delta(m+\mu)A - \theta B\left(\frac{\partial\Psi}{\partial s}\right) = 0.$$

§. 37. Soit, par exemple, $N' = N'' = N''' = 0$,

$$\alpha = 2r + s + 2t + 2rt + 2ts + 2tt - q,$$
$$\beta = r - s + p - q + 2rt + 2tt - 2rs - 2ss,$$
$$\gamma = r - s + p - q + 2tr + 2tt - 2sr - 2ss,$$
$$\delta = p - r - 2s - 2t - 2rs - 2ss - 2st,$$
$$\theta = p + r - q - s + pt + tr - qs - ss.$$

L'équation du 3e degré en B deviendra donc

$$(2r+s+2t+2rt+2ts+2tt-q)^2 B^3$$
$$-(2r+s+2t+2rt+2ts+2tt-q)(r-s+p-q+2tr+2tt-2sr-2ss)B^2$$
$$+$$

$+ (r-s+p-q+2rt+2tt-2rs-2ss)\,(p-r-2s-2t-2rs-2ss-2st)\,B$
$- (p-r-2s-2t-2rs-2ss-2st)^2 = 0,$
dont l'une des racines est $B = 1$. On tire de là $A = 1$, et les trois équations (f) deviennent,

$$\alpha(n+\nu) + \delta(m+\mu) - \theta\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0,$$
$$\alpha(n+\nu) + \delta(m+\mu) - \theta\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0,$$
$$\alpha(n+\nu) + \delta(m+\mu) - \theta\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial s}\right) = 0.$$

Je tire de ces trois équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$, et j'ai:

$$\partial\psi = \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z + \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial p + \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial q$$
$$+ \frac{(\partial t + \partial r + \partial s)\,(\alpha(n+\nu) + \delta(m+\mu))}{\theta}$$
$$= \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z + \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial p + \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial q$$
$$+ \frac{((2r+s+2t+2rt+2st+2tt-q)(n+\nu) + (p-r-2s-2t-2rs-2ss-2st)(m+\mu))}{(p+r)(1+t) - (q+s)(1+s)}\,(\partial t + \partial r + \partial s).$$

Faisant $n+\nu = p+r$, $m+\mu = q+s$, on a

$$\partial\psi = \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z + \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial p + \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial q$$
$$+ 2\,(r+s+t)\,(\partial r + \partial s + \partial t)$$

équation qu'il faut combiner avec celles-ci:

$$\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial x}\right) + p\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\right) + r\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right) + s\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right) = p + r,$$
$$\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial y}\right) + q\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\right) + s\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right) + t\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right) = q + s.$$

On voit qu'on a $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = r$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0$, ce qui donne $\partial\psi = \partial z + \partial p + 2(r+s+t)(\partial r + \partial s + \partial t)$

et $\psi = p + z + (r+s+t)^2$.

Faisant ensuite $n+\nu = 1+s$, $m+\mu + 1 + t$, on a

$$\partial\psi = \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z + \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial p + \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial q$$
$$+ \partial r + \partial s + \partial t,$$

 équa-

équation qu'il faut combiner avec celles-ci :

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + r\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + s\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 1 + s,$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + s\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + t\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 1 + t.$$

On voit qu'on a $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 1$, ce qui donne $\partial\psi = \partial x + \partial y + \partial q + \partial r + \partial s + \partial t$, et $\psi = x + y + q + r + s + t$. L'intégrale est donc

$$(r + s + t)^2 + p + z = \text{F} : (r + s + t + q + x + y).$$

§. 38. Soit encore $\text{N}' = \text{N}'' = \text{N}''' = 0$, de plus $\alpha = 2tqxy^2z - tx^2$, $\beta = 4sqxy^2z - 2tpxy^2z - txy - 2sx^2$, $\gamma = 2rqxy^2z - 4spxy^2z - 2sxy - rx^2$, $\delta = -2rpxy^2z - rxy$,

$$\theta = 2rq^2y^2z - 2tp^2y^2z - tpy - spx - sqy - rqx - px^2y - 2pxy^2z^2$$
$$+ 2rtqy^2z + 2s^2qy^2z + 2qy^3z^2 - qxy^2 - rtx - s^2x - 2xyz.$$

L'équation en B du 3e degré deviendra, en divisant par α^2 et réduisant :

$$\text{B}^3 + \left(-\tfrac{2r}{t}y^2z + \tfrac{r}{t}x + \tfrac{4s}{t}py^2z + \tfrac{2s}{t}y\right)\text{B}^2$$
$$+ \left(-\tfrac{8rs}{tt}pqy^4z^2 - \tfrac{4rs}{tt}qy^3z + \tfrac{4rs}{tt}pxy^2z + \tfrac{2rs}{tt}xy\right.$$
$$\left. + \tfrac{4r}{t}p^2y^4z^2 + \tfrac{4r}{t}py^3z + \tfrac{r}{t}y^2\right)\text{B}$$
$$- \frac{\left(\frac{2r}{t}py^2z + \frac{r}{t}y\right)^2}{(2qy^2z - x)^2} = 0,$$

dont l'une des racines est $\text{B} = \frac{r}{t}$, ce qui donne $\text{A} = \frac{2s}{t}$. Les équations (f) deviennent donc en réduisant au même dénominateur :

$$\alpha rt(n + \nu) + \delta t^2(m + \mu) - \theta rt\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0,$$

$$\alpha r^2(n + \nu) + \delta rt(m + \mu) - \theta rt\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0,$$

$$2\alpha rs(n + \nu) + 2\delta st(m + \mu) - \theta rt\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right) = 0.$$

Je

Je tire de ces trois équations les valeurs de $(\frac{\partial\psi}{\partial r})$, $(\frac{\partial\psi}{\partial t})$, $(\frac{\partial\psi}{\partial s})$, et j'ai:

$$\partial\psi = (\tfrac{\partial\psi}{\partial x})\,\partial x + (\tfrac{\partial\psi}{\partial y})\,\partial y + (\tfrac{\partial\psi}{\partial z})\,\partial z + (\tfrac{\partial\psi}{\partial p})\,\partial p + (\tfrac{\partial\psi}{\partial q})\,\partial q$$
$$+ \frac{(t\,\partial r + r\,\partial t + 2s\,\partial s)\,((2qxy^2z - x^2)(n+\nu) - (2pxy^2z + xy)(m+\mu))}{(rt + s^2 + yz + pxy + qr + ps)(2qy^2z - x) - (xz + qxy + qs + pt)(2py^2z + y)}.$$

Faisant $n + \nu = (\frac{\partial\psi}{\partial x}) + p\,(\frac{\partial\psi}{\partial z}) + r\,(\frac{\partial\psi}{\partial p}) + s\,(\frac{\partial\psi}{\partial q})$

$$= rt + s^2 + yz + pxy + qr + ps,$$
$$m + \mu = (\tfrac{\partial\psi}{\partial y}) + q\,(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}) + s\,(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}) + t\,(\tfrac{\partial\psi}{\partial q})$$
$$= xz + qxy + qs + pt,$$ on a
$$\partial\psi = (\tfrac{\partial\psi}{\partial x})\,\partial x + (\tfrac{\partial\psi}{\partial y})\,\partial y + (\tfrac{\partial\psi}{\partial z})\,\partial z + (\tfrac{\partial\psi}{\partial p})\,\partial p + (\tfrac{\partial\psi}{\partial q})\,\partial q$$
$$+ (t\,\partial r + r\,\partial t + 2s\,\partial s)\,x.$$

On voit qu'on a ici $(\frac{\partial\psi}{\partial x}) = rt + s^2 + yz$, $(\frac{\partial\psi}{\partial y}) = xz$, $(\frac{\partial\psi}{\partial z}) = xy$, $(\frac{\partial\psi}{\partial p}) = q$, $(\frac{\partial\psi}{\partial q}) = p$, ce qui donne

$$\partial\psi = (rt + s^2 + yz)\,\partial x + xz\,\partial y + xy\,\partial z + q\,\partial p$$
$$+ p\,\partial q + (t\,\partial r + r\,\partial t + 2s\,\partial s)\,x,$$

et $\psi = (rt + s^2)\,x + xyz + pq.$

Faisant $n + \nu = (2py^2z + y)\,a$, $m + \mu = (2qy^2z - x)\,a$, on a

$$\partial\psi = (\tfrac{\partial\psi}{\partial x})\,\partial x + (\tfrac{\partial\psi}{\partial y})\,\partial y + (\tfrac{\partial\psi}{\partial z})\,\partial z + (\tfrac{\partial\psi}{\partial p})\,\partial p + (\tfrac{\partial\psi}{\partial q})\,\partial q,$$

équation qu'il faut combiner avec celles-ci:

$$(\tfrac{\partial\psi}{\partial x}) + p\,(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}) + r\,(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}) + s\,(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}) = 2pyz^2 + y)\,a$$
$$(\tfrac{\partial\psi}{\partial y}) + q\,(\tfrac{\partial\psi}{\partial z}) + s\,(\tfrac{\partial\psi}{\partial p}) + t\,(\tfrac{\partial\psi}{\partial q}) = 2qy^2z - x)\,a.$$

a est ici un facteur qu'il faut déterminer de façon que l'on puisse satisfaire aux équations. Or en faisant $a = \frac{1}{yy}$, on a $(\frac{\partial\psi}{\partial x}) = \frac{1}{y}$, $(\frac{\partial\psi}{\partial y}) = -\frac{x}{yy}$, $(\frac{\partial\psi}{\partial z}) = zz$, $(\frac{\partial\psi}{\partial p}) = 0$, $(\frac{\partial\psi}{\partial q}) = 0$, ce qui donne $\partial\psi = \frac{\partial x}{y} - \frac{x\,\partial y}{yy} + 2z\,\partial z$ et $\psi = \frac{x}{y} + z^2$.

L'intégrale est donc $(rt + s^2)\,x + pq + xyz = F\,:(z^2 + \frac{x}{y})$, comme le trouve Mr. de Nieuport qui a traité la même équation.

§. 39. Soit $N = -2$, $N'' = -3$, $N''' = 1$, $\alpha = 3 + 3t - q - s$, $\beta = -3 - 4s - q + p + r$, $\gamma = 1 + t - q - s + p + r$, $\delta = -1 - s + p + r$, $\theta = p - q - s + r + pt + rt - qs - ss$. Les équations (c') du §. 27 deviennent en divisant par 7 :

$$(-1 - s + p + r)(m + \mu) + (1 + t + q - s)(n + \nu)$$
$$- ((p + r)(1 + t) - (q + s)(1 + s)) \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0,$$
$$(p + r - 3 - 3s)(m + \mu) + (3 + 3t - q - s)(n + \nu)$$
$$- ((p + r)(1 + t) - (q + s)(1 + s)) \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0,$$
$$(p + r)(m + \mu) - (q + s)(n + \nu)$$
$$- ((p + r)(1 + t) - (q + s)(1 + s)) \left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right) = 0.$$

Je tire de ces trois équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)$, et j'ai:

$$\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial q$$
$$+ \frac{(\partial t + \partial r + \partial s)((p + r)(m + \mu) - (q + s)(n + \nu)) - (\partial t + 3\partial r)((1 + t)(n + \nu) - (1 + s)(m + \mu))}{(p + r)(1 + t) - (q + s)(1 + s)}.$$

Faisant $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + r\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + s\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = n + \nu = 1 + s$, $m + \mu = \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + s\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + t\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 1 + t$, on a

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 1,\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 1,\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 1,\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0,\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0,$$

ce qui donne $\partial\psi = \partial x + \partial y + \partial q + \partial t + \partial r + \partial s$, et $\psi = x + y + q + r + t + s$.

Faisant $n + \nu = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + r\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + s\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = p + r$, $m + \mu = \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + s\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + t\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = q + s$, on a $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0$, ce qui donne $\partial\psi = \partial z + \partial p + \partial t + 3\partial r$ et $\psi = z + p + 3r + t$. L'intégrale est donc $3r + t + p + z = F : (r + s + t + q + x + y)$. Ainsi quoique dans ce cas-ci, où $\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right) = 0$, il parût au premier coup-d'oeil qu'il fallût calculer de nouveau les équations gé-

générales, les premières ont suffi comme l'on voit. Il en sera de même dans les cas où $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0$, comme on le verra dans l'exemple suivant.

§. 40. Soit $N' = 1$, $N'' = 2$, $N''' = -1$, $\alpha = -q-s$, $\beta = 2+2t-q-s+p+r$, $\gamma = -1+t-3s-q+p+r$, $\delta = -1-s+p+r$, $\theta = p-q-s+r+pt+rt-qs-ss$. Les équations du §. 27. deviendront en divisant par 3:

$$(1+t-q-s)(n+\nu) + (p+r-1-s)(m+\mu)$$
$$-((p+r)(1+t)-(q+s)(1+s))\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0,$$
$$-(q+s)(n+\nu) + (p+r)(m+\mu)$$
$$-((p+r)(1+t)-(q+s)(1+s))\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0,$$
$$+(2+2t-q-s)(n+\nu) - (2s+2-p-r)(m+\mu)$$
$$-((p+r)(1+t)-(q+s)(1+s))\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right) = 0.$$

Je tire de ces équations les valeurs de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$, et j'ai:

$$\partial\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\partial z + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\partial q$$
$$+ \frac{(\partial t + \partial r + \partial s)((p+r)(m+\mu) - (q+s)(n+\nu)) + (\partial t + 2\partial s)((1+t)(n+\nu) - (1+s)(m+\mu))}{(p+r)(1+t) - (q+s)(1+s)}.$$

Faisant $n+\nu = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + r\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + s\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 1+s$,

$$m+\mu = \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + s\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + t\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 1+t,$$

ce qui donne $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 1$, on a $\partial\psi = \partial x + \partial y + \partial q + \partial t + \partial r + \partial s$, et $\psi = x+y+q+t+r+s$. Faisant $n+\nu = p+r$, $m+\mu = q+s$, ce qui donne $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = 0$, on a $\partial\psi = \partial z + \partial p + \partial t + 2\partial s$, et $\psi = p+z+t+2s$. L'intégrale est donc $2s+t+p+z = F:(r+s+t+q+x+y)$.

§. 41.

§. 41. On peut procéder d'une manière analogue pour les équations du 4e degre et des degrés supérieurs. Mais je ne m'y arrêterai pas pour le présent. Je traiterai dans le Mémoire suivant des equations à quatre et à cinq variables.

§. 42. Au reste, pour ce qui régarde les équations du troisième degré, j'aurais dû, à la rigueur, considerer seulement les quantités $\frac{\alpha}{N}$, $\frac{\beta}{N}$, etc. parcequ'il peut avoir disparu un facteur commun aux quantités N et α, β, γ, δ, θ, comme je l'ai fait pour le second degré. Mais les formules que j'ai obtenues seraient restées les mêmes, comme on peut s'en convaincre par l'examen des opérations exécutées pour les équations du second degré.

PHYSICA.

PHYSICA.

METHODI NOVAE
FACILLIMAE AC SIMPLICISSIMAE, ACIDUM ACETICUM GLACIALE PARANDI, EXPOSITIO.

AUCTORE

T. LOWITZ.

Conventui exhibita die 20. Junii 1799.

§. 1.

Undecim abhinc jam jam anni ab eo inde tempore praeterlapsi sunt (*), quo, acidum aceticum concentratissimum crystallisationis capax esse, detegere mihi licuit. Innumeris splendidissimisque phoenomenis, quibus productum hoc chemicum crystallisatione sua oculos delectat, impulsus, permulta statim, eum praecipue in finem, suscepi experimenta, optimam aceti hujus glacialis conficiendi viam ut detegerem; quae quidem experimenta omnia duabus in dissertationibus Ill. Academiae anno 1791. a me oblatis, Actorum novorum Tomo 7mo et 8vo. inserta leguntur.

§. 2.

(*) Anno nimirum 1788. Decembris die 5.

§. 2.

In posteriore harum dissertationum methodos a me inventas huic scopo idoneas exposui varias, quarum in numero duae imprimis, quarum una carbonum pulvere ([a]), altera potassino sulphurico acidulo siccissimo (Tartaro vitriolato supersaturato) ([b]) hoc in negotio utitur, ceteris antecellere illo quidem tempore mihi visae sunt. Prior harum methodorum, etsi odore et sapore suavissimum ac purissimum largitur acetum glaciale: ipsa tamen operatio non lentissima solum est, neque etiam, ob rationes in dissertatione expositas, institui, nisi hyemali tempore potest; quibus duobus incommodis cum careat altera methodus, haec priori multis parasangis palmam praeripit; siquidem ejus beneficio acidum aceticum glaciale, quin fortissimum, immediate, id est, sine frigoris auxilio quovis, calidissimo etiam, anni tempore praeparari potest.

§. 3.

In ipsa illa dissertatione mea, Alcohol aceti, Westendorfianum sic dictum, ad eliciendum acetum glaciale in usum vocari posse dixi ([c]): observare enim mihi licuit, acetum hoc ad praeceptum laudati inventoris, per aliquod tempus frigori 13 graduum scalae Reaumurianae expositum, crystallos formare. Quae tamen crystallisatio, ut succedat, praeter naturale illud fri-

(*a*) Vid. Nova Acta Acad. Imper. Scient. T. VIII. pag. 316.

(*b*) Ibidem pag. 321. §. 7. pag. 332. Exp. XI. et pag. 337. Exp. XIX.

(*c*) Ibidem pag. 327. §. 12. Exper. IV. et pag. 342. §. 26. n. 2.

frigus, idquoque necesse est, ut aceto huic, ad dictum temperaturae gradum jam jam refrigerato aceti glacialis coagulati frustulum immergatur; quod si neglexeris artificium, ob nimiam aceti hujus debilitatem, nulla omnino crystallorum concrescentia locum obtinet.

Ex 27 natri acetici (Sodae acetosae) siccissimi unciis, quae, 18 acidi sulphurici unciarum beneficio, uncias 13 alcoholis aceti Westendorfii mihi largiebantur, dicta encheiresi non nisi $27\frac{1}{2}$ aceti glacialis drachmae obtinere potui; quas enim e decantata a crystallis his parte aceti liquida 22 aceti glacialis drachmas postea insuper extricavi, eae heic in censum venire nequeunt; utpote pro quibus obtinendis, alio prorsus artificio usus sum ([a]).

§. 4.

Cum tunc temporis magnopere in votis mihi fuisset, talem etiam detegere methodum, qua aceticum e salibus acetis immediate sub aceti glacialis forma extricari posset, idque eo praecipue proposito, ut productum hoc non hyemali tantum sed aestivo etiam tempore praeparare liceret: optato tandem hac in re successu potitus sum, inventa altera illa, quam protuli, methodo, et quae Kali sulphurici aciduli auxilio utitur (§. 2.). Hoc enim artificio e tribus natri acetici partibus immediate duas aceti glacialis partes elicere mihi licuit ([b]).

Ea-

(*a*) Ibid. 328. Exper. IV.
(*b*) Ibid. pag. 328. §. 14 ad 20.

Eademque methodo e duodecim Kali acetici igne fusi partibus $7\frac{1}{2}$ partes aceti glacialis, easque odore suaviores assecutus sum (a).

§. 5.

Inveniendae methodi hujus sequentia inprimis argumenta ansam mihi tunc temporis praebuerunt (b): quum acidum aceticum, ut aceti glacialis fortissimi formam induat, partibus aquosis supervacuis, (aqua crystallisationis excepta) omnibus prorsus liberum esse debeat; ita sensi, ut ad acidum nostrum dicto sub statu, e salibus ejusdem neutris immediate extricandum, siccissima quoque segregandi media adhibenda esse existimarem; quam ob caussam acidum sulphuricum, quamvis concentratissimum, ob superstitem in ea, hoc non obstante, aquam, negotio huic praestando plene ineptum mihi visum est, idque eo magis, quum ipsa adeo experientia huic opinioni meae prorsus consentiret; partes enim ejusmodi aquosas in segregandi mediis residuas, sub processu destillationis una cum ipso acido acetico transire debere, me quidem sentiente, chemicorum nemo certe dubitat.

§. 6.

Quae tamen omnia licet ita sint: conjecturis et experimentis denuo institutis edoctus sum, acidum aceticum solo etiam acido suphurico, aqua in eo contenta non impediente, e Kali ace-

---

(a) Ibid. pag. 337. Exper. IX. et pag. 345. n. 6.

(b) Ibid. pag. 329. §. 14.

acetico sub forma aceti glacialis immediate expelli posse, idque, quod ne spe quidem praecipere ausus sum, tanto cum successu, ut nova haec, quam invenire mihi licuit, methodus prae ea, quae Kali sulphurico acidulo utitur, primum certe sibi locum vendicat.

§. 7.

Hujus autem methodi novae expositionem antequam adgrederer, sequentia praemitti, haud alienum duxi: in invenienda methodo acetum ad summum concentrationis statum perducendi, antiquos jam chemicos dudum allaborasse, iisque omnibus Westendorfium palmam praeripuisse, satis superque constat. Methodus haec Westendorfiana, uti notum est, eo nititur, ut natri acetici siccissimi partibus duabus una acidi sulphurici pars admisceatur; quam quidem miscendorum rationem longe optimam esse, hodienum chemici omnes uno ore profitentur, metuentes nimirum, ne, si ea, quam Westendorfius praescripsit, major acidi sulphurici quantitas adhiberetur, acidum aceticum extricandum partibus sulphurosis nimium inquinaretur. Verum enim vero instituta hac de re experimenta me edocuerunt, tantum abesse, ut ab aucto acidi sulphurici copia inquinationis periculum pertimescendum sit, ut potius, cum partibus tribus Kali acetici partes 4 acidi sulphurici adderem, acidi acetici ejusque purioris copiam longe majorem et, quod caput est, omnem, quata fuit, sub forma aceti glacialis obtinuissem, eamque adeo concentratam, ut congelatum hoc acetum non nisi per calorem 10 graduum scalae Reaumurianae liquesceret.

§. 8.

Fieri fere non potest, quin res haec, primo quidem intuitu inexplicabilis videatur: quis enim non conjiceret, acetum ex-

extricandum, quo major acidi sulphurici copia impenditur, ob abundantiorem partium quoque aquosarum accessum eo magis debilitari debere? adde, quod destillatio mixti perinde ac ante, ad ipsam usque siccitatem remanentis continuanda sit. Ista tamen omnia sequentibus ratiociniis in aprico positum iri, confido.

§. 9.

Tentaminibus meis pristinis, summa quae cura institui, docentibus, Natri acetici igne fusi partes 100, Kali sulphurici aciduli ope, *66* acidi acetici glacialis ejusque fortissimi partes largiuntur (§. 4.): Methodo vero Westendorfiana ejusdem salis acetici partes 100 Alcoholis aceti sic dicti Westendorfiani non nisi 48 partes suppeditant; quam insignem utriusque methodi differentiam, in aceti obtinendi et vi et quantitate obviam si perpendimus; a Westendorfio praescriptam adhibendi acidi sulphurici rationem, plenariae acidi, in sale acetico haerentis, extricationi imparem esse, jure meritoque judicemus necesse est.

§. 10.

Salvis tamen modo dictis, praescriptam a Westendorfio adhibendi acidi sulphurici quantitatem, exiguam illam quidem, acido acetico prorsus omni extricando tamen aptam esse, tentaminibus ex proposito institutis reperi, neque tamen nisi ea conditione, ut tantam simul aquae adjicias copiam, qua mixtionis salinae perfecta solutio obtineatur.

§. 11.

Docentibus igitur hisce, quae quidem prima fronte sibi invicem repugnare videri possent, experientiis (§. 9. et 10.), aci-

acido acetico perfecte extricando quantitatem acidi sulphurici, aquam si omittas, longe largiorem, quam, si addas aquam, impendi debere perspicitur. Patet inde quoque, sal neutrum hoc in casu non perfectum id, sed acidulum potius, oriri debere.

§. 12.

Hisce igitur omnibus perpensis, reminiscebar, me quondam observasse, Kali sulphuricum acidulum, (utpote quod hoc in casu generatur,) aqua non facillime modo et copiosissime esse solutum; sed, quod caput est, insignem quoque copiam aquae crystallisationis continuisse, ejusque adeo fuisse tenacem, ut ad expellendam illam, ignis gradus, eo, quo acidum aceticum trantillat, longe major requiretur. Quae omnia et inprimis modo dictam salis hujus aciduli proprietatem perpendenti mihi spes affulsit, fore, ut largiori acidi sulphurici accessu non major modo acidi acetici copia, sed illa quoque sub forma aceti glacialis segregetur; quam quidem praeceptam opinionem meam, experimentis a me deinceps institutis, supra jam dixi, pulcherrime confirmatam fuisse.

§. 13.

Ex his igitur, quae modo exposui, cur acidum aceticum, impensa acidi sulphurici copia debita minori, debilius; majori vero longe fortius obtineatur, egregie elucescit. Priori enim casu, si scilicet acidi sulphurici quantitas non nisi ea impenditur, qua salis acetici basis perfecte neutralisetur; adhibiti acidi sulphurici partes aquosae omnes cum ipso acido acetico junctim transeunt, quia oriundum heic Kali sulphuricum non nisi exiguam aquae crystallisationis copiam retinere potest: dum con-

contra Kali sulphuricum acidulum, altero casu oriundum, partium illarum aquosarum maximam partem sub forma aquae crystallisationis retineat.

§. 14.

Primum hac de re experimentum etiamsi anno jam 1794 Januarii die 4to satis quidem prospero cum successu instituissem: permultis tamen aliis negotiis iisque pharmacevticis isto tempore praecipue occupatus, experimentorum horum continuationem aliud in tempus differre coactus fui. Atque Ill. Collegium Medicum Imperiale Petropolitanum quum non Alcohol modo aceticum sed ipsum etiam acetum glaciale praeparandi methodos a me inventas Pharmacopeae suae Rossicae anno 1798 editae, inseruisset; hoc ipso imprimis commotus, Aprilis demum mense anni praesentis tentamina illa denuo adgressus sum; idque eo lubentius, quum producti hujus, praeter medicum, chemicus quoque usus insignis sit; cui id etiamnum accedit, quod, phoenomenorum crystallisationis pulchritudinem et variationes quod attinet, salium hodienum quidem notorum aceto glaciali nullum certe aequiparari queat.

§. 15.

Misso descriptione horum tentaminum, inventam eorum ope novam aceti glacialis praeparandi methodum hic exponere mihi propositum est:

Retortae tubulatae vesica madida jam probe munitae receptaculo satis amplo acidi sulphurici concentrati librae tres infundantur; quibus Kali acetici probe et recens siccati li-

librae tres successive et pedetentim nec nisi parvis dosibus, quassando retortam, et mistelam subinde bacillulo vitreo agitando, ingerantur: quae tamen omnia ea cautione fieri oportet, ne quid acidi acetici ejusque fortissimi, ob orientem mistelae insignem incalescentiam, per retortae tubulaturam, vaporum sub forma in auras auffugiat; quem in finem, ingesta per vices salis portione, orificium subere singulis vicibus citissime claudi necesse est. Omnibus ingestis, una etiamnum acidi sulphurici libra, successive quoque, infundatur; quo facto, retortae tubulatura operculo munienda vesica madida probe claudatur et, praeterlapso nychthemero, destillatio ex arenae balneo igne lenissimo ita suscipiatur, ut vas recipiens aquae frigidae immersum linteis madidis, vel quod praestat, nive vel glacie sedulo interim refrigeretur. Ipsum destillationis finem, criteria sequentia indicant: 1) vaporum alborum disparitio: 2) lentior guttarum successio, et, quod caput est, 3) brevi post subsecutura relictae in retorta massae salinae in materiam nigram fluidam et spumescentem subitanea colliquatio: quo ultimo praecipue indicio observato, receptaculum absque mora mutetur. Parva, quae postea, fortiori igne aceti debilioris etiamnum transtillat quantitas, baryta carbonica saturetur, filtretur, leni calore ad siccitatem evaporetur, in pulverem reducatur, priori destillato, ipso nimirum aceto glaciali, admisceatur, mixtaque omnia ad summam fere remanentis siccitatem usque per retortam rectificentur.

§. 16.

Superest, ut observationes meas hoc de argumento notabiliores encheiresesque non nullas ac cautelas sequentibus aphorismis succincte exponam:

1) Dictam in paragrapho antecendente miscentorum rationem, tribus nimirum Kali acetici partibus ut 4 acidi sulphurici partes addantur, omnium aptissimam esse, permultis iisque saepius repetitis tentaminibus certo certius convictus sum. Ejus enim ope copiosissimum non tantum, sed fortissimum obtinetur acetum glaciale, quod congelatum ut liquescat, calore 10 graduum Scalae Reaumurianae opus est; dum contra per majorem perinde ac minorem acidi sulphurici additionem acetum glaciale debilius prodit.

2) Descripto in paragrapho antecedente procedendi modo e tribus Kali acetici libris medicinalibus 22 aceti glacialis unciae, et sub operationis fine 6 etiamnum acidi debilioris drachmae obtinentur; ex quo 100 dicti salis partes 61 aceti glacialis partes largiri, colligitur.

3) Haec ipsa obtinendi acidi nostri quantitas egregie satis respondet illi, quam antea Kali sulphurici aciduli ope consecutus sum; siquidem illa methodo mea pristina e centenario Kali acetici igne antea fusi eamdem plane aceti glacialis quantitatem obtinui.

4) Acetum glaciale hoc nostrum illo, quod Kali sulphurici aciduli ope extricatur, debilius quidem aliquantum est; dum congelata, hoc calorem fere 13°, illud vero non nisi 10°, abs-

absque eo ut liquescant, perferre possunt. Neque tamen medella deest, eaque facillima, quae huic detrimento afferri potest, cujus cardo in eo vertitur, ut pars ejusdem debilior, congelationem nespuens, aceto hoc nostro per unam alteramve diem aquae gelascentis temperiei exposito, a parte fortiore in massam crystallinam concreta decantando segregetur.

5) Operationi huic si librae tres Kali acetici impenduntur ad eas cum exposita supra acidi sulphurici copia subinde miscendas trium horarum intervallo opus est; ipsaque destillatio 5 vel 6 horis absolvitur.

6) Dum mixtio fit, ob insignem mistelae incalescentiam, ex dicta miscendorum quantitate aceti glacialis ejusque fortissimi, quod congelatum non nisi calore $11\frac{1}{2}$ graduum liquescit, 10, et quod excurrit, unciae sponte, hoc est, nulla igne admoto, non nunquam tanta celeritate transeunt, ut fluidum hoc admodum volatile non guttatim sed rivuli continui ad instar e retortae rostro interdum defluat.

7) Ignis moderamen destillationi huic aptissimnm absque detrimenti periculo, tale potest esse, ut quovis minuto secundo duae vel tres guttae decidant; cavendum tamen est, ne rivuli continui ad instar defluant; quem in finem vas recipiens aqua vel nive sedulo refrigerari maxime interest.

8) Mixtionis perinde ac distillationis tempore ad ipsum operationis finem usque, densissimi iique albissimi apparent vapores, quorum varii motus et vertigines oculis spectaculum satis amoenum exhibent.

9) Frigidiori tempore si operatio haec instituitur; acetum hoc inter ipsum adeo destillationis progressum in crystallos concrescit.

10) Acetum glaciale nova hac nostra methodo praeparandum eo limpidius eoque minus particulis sulphurosis contaminatum obtinetur, quo purius impenditur Kali aceticum; id quod sequenti praecipue observatione pulcherrime comprobatur; Accidit enim mihi quondam, ut in mistelam in retorta contentam, dum miscerem miscenda, assula lignea casu caderet, quam eximere non potui. Desillatione finita, acidum aceticum non admodum nauseoso tantum odore sulphuroso, sed valde etiam turbido colore flavo inquinatum obtinui, quod, congelatum et regelatum, meri sulphuris sedimenti, pulcherrimo colore flavo citreo gaudentis, satis insignem copiam deposuit. Sulphuris meri haec genesis, ob lenissimum illum, quo acetum glaciale transtillatur, ignem, mihi quidem, memoratu satis digna videtur.

11) E modo dictis patet, Kali acetici praeparationi acetum purissimum super debitam nempe pulveris carbonum copiam destillatum adhibendum esse.

12) Aceti vini gallici crudi partes 100 super 16 partibus pulveris carbonum ad remanentis usque siccitatem abstractae, partes 8,5 Kali carbonici depurati, ut eodem saturentur, postulabant, et ad siccitatem postea evaporatae Kali acetici albissimi 9,1 partes largiebantur.

13) Acetum quoque cerevisiae, quod apud nos paratur, simili prorsus modo tractatum 3,8 partes Kali acetici albissimi

e centenario mihi suppeditavit. Ex quo consequitur, quum 100 partes Kali acetici 61 partes aceti glacialis praebeant (n. 2.), 100 partes aceti vini crudi partes 5,9 aceti glacialis; totidem vero partes aceti cerevisiae 2,3 partes aceti glacialis largiri.

Acetum igitur vini gallici ex Oxthofio (utpote qui 570 circiter libras continet), 33 libras; acetum vero cerevisiae 13 libras aceti glacialis largiuntur.

14) Acidi sulphurici, quod tentaminibus meis impendi, gravitas specifica ad eam aquae sese habuit, uti 1,839 ad 1,000. Hicque ipse concentrationis status ille est, quo acidum hoc venumdatur; ejusque ope e 13 libris medicinalibus Kali acetici, mediante aceto cerevisiae parati, 8 aceti glacialis libras elicui, quas Ill. Academiae hic exhibere perhonorificum mihi est.

ME-

MEDITATIONES
EXPERIMENTIS SUPERSTRUCTAE
DE VERO AGENDI MODO PULVERIS CARBONUM DUM VIM SUAM DEPURATRICEM EXSERIT.

AUCTORE

T. LOWITZ.

Conventui exhibita die 13. Febr. 1800. et praelecta die 3. Sept. 1800.

Quum detecta illa a me anno 1785 carbonum vis depuratrix *) adeo insigni utilitate, chemica non tantum, sed technica quoque, et oeconomica medicaque omnibus sese commendasset, ut jam extra omne dubium posita et complurium aliorum chemicorum experimentis nunc demum plane stabilita censeri debeat; operae utique pretium est, allaborare, ut dictae carbonum proprietatis caussa quoque innotescat.

Ipsa enim proprietas illa singularis, quamvis 14 jam abhinc annis a me reperta sit; tantum tamen abest, ut caussa ejusdem nobis pateat, ut hodienum ipsi adeo chemici artis peritissimi neutiquam inter se consentiant, chemicisne, an mechanicis, laudata carbonum efficientia, viribus nitatur; quam quidem

*) Nova Acta Academiae Scient. Imp. Petropolitanae Tomo V. pag. 41. et Tomo VI. pag. 57.

dem quaestionem primo loco, et antequam ipsam caussam primariam explorare velimus, esse dirimendam si statuo, spero, fore, ut chemicorum neminem habeam dissentientem.

Chemicorum plurimi, iique peritissimi ac celeberrimi, quorum e numero *Klaprothium*, *Grenium*, *Vauquelinium*, *Hagenium*, *Kasteleyen*, *Gadolinum* et *Hoffmannum* nominasse sufficiat, etsi carbonum illam proprietatem non nisi mechanicis tribuant viribus; fatendum tamen mihi est, me ab eorum sententia hac plane dissentire, meque hodienum, perinde ac ipso illo, quo dictam carbonum vim detexi, tempore eam chemicis potius, quam mechanicis, viribus adscribere, atque sequentibus praecipue argumentis in ista opionione mea confirmari.

1) Vis illa carbonum depuratrix, si spongiosa, uti chemici laudati affirmant, carbonum structura niteretur; carbonibus in pulverem subtilissimum contritis adeoque structura illa deleta, vis quoque illa, colores odoresque delendi, si non destrui omnis; vehementer tamen debilitari deberet; ast divisio ejusmodi carbonum in pulverem subtilissimum contrario potius effectu gaudet: carbones enim eo majori vi agere, eorumque eo minorem requiri quantitatem, quo subtilior pulvis est, in quem rediguntur, experimentis ex proposito hac de re institutis compertum mihi habeo.

2) Carbones, si vim suam depuratricem non nisi poris suis deberent, ea vi penitus privari deberent, si in tenerrinum pulverem redacti, aquae purae tam diu immergerentur, donec omnia eorundem interstitia aqua penitus replerentur; ast ne hac quidem manipulatione, experientia mea docente, vis ista ullam

jactu-

jacturam patitur, pulvisque ille humidus eadem, qua siccus, efficacia gaudet.

3) Si carbones, dum liquida colorata coloribus suis plane exuunt, principia eorum tingentia non nisi mechanice absorberent; eadem principia absorbta in carbonibus ex liquore decolorato exemtis reperiri atque adeo vel subtiliore carbonum contritione vel aliis reagentibus extrahi posse deberent; ast in carbonum ejusmodi pulvere, qui principio tingente plane imbutus esse videri debuisset, nulla arte ullum absorbti coloris vestigium detegi potest.

4) Eadem, quae de colorantibus dixi, de odorantibus quoque et oleosis partibus valent, quas, si carbones non nisi mechanice absorberent fluidisque eriperent, in pulvere carbonum; ab istis fluidis separato, reperiri necesse foret, ast nec hoc casu ereptarum illarum particularum odoriferarum vel oleosarum ulla in separato carbonum pulvere reperitur.

5) Carbones porro, si in istis, quas dixi, operationibus non nisi mechanica vi agerent; partes heterogeneas vi carbonum liquoribus ereptas neque istis liquoribus nisi mechanice inhaeruisse, necessario concludi debet, id quod mihi quidem probatu difficillimum videtur, iis praesertim in liquoribus vel aquosis vel spirituosis, qui, etsi materia quadam coloranti imbuti perfecta tamen pelluciditate gaudent; particularum enim heterogenearum admixtione non nisi *mechanica* liquorum pelluciditas non turbari non potest, quae ut illibata manere possit, principia tingentia in liquoribus *chemice* solvi necesse est. Quo concesso, concedere quoque oportet, carbones *chemicum* exsere-

rere

rere effectum, quotiescunque liquores plane pellucidos et principio quodam tingente vel odorante imbutos colore suo vel odore penitus exuunt; quae enim substantiae heterogeneae chemica affinitate copulatae sunt; eaedem vice versa non nisi chemicis viribus, neutiquam vero pure mechanicis, a se invicem divelli possunt.

6) Vim carbonum depuratricem esse chemicam, etiam via humida, issque quae alia jam occasione attuli, argumentis luculenter demonstrari potest. Nonnullis videlicet in casibus observare mihi licuit, carbones liquido cuidam depurando, largiore, quam fas erat, manu additos in ipsam denique liquidi depurandi mixtionem vi destructrice egisse, ita, ut superadditae carbonum copiae proportionalis ipsius quoque liquidi quantitas vere decomponeretur et perderetur, quae decompositio et jactura in liquidis praesertim inflammabilibus, e. g. oleis et spiritu vini, nec non acidis nonnullis vegetabilibus et mineralibus contingere solet *).

7) Quum in carbonum pulvere, a liquoribus, quos vel colore vel odore privavit, separato partes nec odorantes neque colorantes neque colorantes reperiri ulla arte queant; partes has heterogeneas liquoribus ereptas nunc vel carbonum pulveri integras inhaerere, vel naturae suae mutationem quandam, vel plenariam adeo decompositionem subiisse, jure meritoque statui oportet. Trium horum casuum quisnam locum reapse habeat, in

*) Nova Acta Acad. scient. Petropolitanae Tom. VI. pag. 66.

in medio quidem relinquo; quisquis autem ille sit, viribus illum non nisi chemicis niti posse, chemicorum neminem inficias ire, persuasum mihi habeo.

8) Quamquam, quae hactenus attuli, sententiae meae demonstrandae plane sufficiunt; haud tamen superfluum duco, experimenta exponere sequentia, ex proposito hujus rei de caussa a me excogitata, quorum ope quilibet, cui res haec cordi est, brevi tnmpore de asserti nostri veritate sese ipse convincere potest.

Drachmae una vel duae carbonis probe exusti, ab omnique cinere externe adhaerente depurgati, redigantur trituratione cum aqua in pulverem subtilissimum, et, ad expellendum aërem, poris carbonum copiose inhaerentem, sufficiente aquae copia per quadrantem circiter horae probe coquantur. Quo facto, carbonum pulvis hic aere plane orbatus, aquaque penitus onustus, una cum ipsa aqua quatuor in vitra operculis claudenda literisque A, B, C et D designanda, ea ratione distribuatur, ut quodlibet eorum non nisi ad dimidiam capacitatis suae partem repleatur. Eo praestito, vitro A infundatur oleum quodlibet vel unguinosum vel aethereum aqua specifice levius; vitro B. Naphtha sulphuris pura; vitro C. Alcohol vini, ita tamen, ut contenta hoc in vitro aqua, ante alcoholis affusionem, potassino vulgari depurato probe saturetur; vitro denique D. Oleum quoddam aethereum aqua specifice gravius, e. g. Oleum Cariophyllorum. His omnibus observatis, mixtionibusque probe conquassatis et quieti per aliquot tempus relictis, carbonum pulvis, licet aqua specifice gravior sit, dictis tamen cum liquoribus inflammabilibus ea ratione remixtus deprehenditur, ut in vitris A, B et C, cum Oleo Naphtha et Alcohole, aqua specifice levioribus,

bus, partem superiorem, in vitro vero D, cum oleo aqua specifice ponderosiore, fundum occupet, ipsaque aqua prioribus tribus in vitris fundum, in ultimo vero partem superiorem occupans, omni carbonum pulvere quam perfectissime liberata conspiciatur.

E tentaminum horum eventa, mea quidem opinione, carbonum vis liquidis inflammabilibus adhaerendi eaque chemica adeo in aprico est, ut nullis fere ultra hac de re verbis opus sit. Quo tamen non obstante, de vi carbonum chemica etiamnum forte dubitantem, sequentia ut perpendat, rogo.

Singulis quatuor his in mixtionibus carbonum pulvis, utpote specifice ceteris mixtis gravior, e gravitatis lege, nulla alia accedente vi, fundum petere deberet. At, in vitris A, B et C effectus huic plane contrarius cernitur, carbonum enim pulvis in liquoribus illis, aqua specifice levioribus, superiorem mixtionum regionem occupat.

Mixtionem A quod attinet, si quis, oleorum tenacitatem phoenomini hujus caussam esse posse forte objiceret; lubens ego ejus opinioni accederem; verum enimvero objectio haec mixtionibus B et C, ubi videlicet non tenuissima modo, sed ipsis adeo oleis multo leviora adhibita sunt liquida, prorsus omnino refutatur. Neque tamen deest, quod illius objectionis auctor respondere posset, liquida scilicet aqua specifice leviora, ipsa carbonum pulveris interstitia penetrando, gravitatem ejus specificam accessu suo diminuere indeque caussam ascensus pulveris carbonum in superiorem mixtionum partem esse repetendum. Huic autem responso ne locus esset, carbonum pulverem summo

studio aqua antea coqui eaque perfecte saturari debere, consulto commendavi; siquidem liquidum quodcunque, corporis cujusdam solidi poros jam jam occupans, secundum pressionis leges, ab ambiente corpus hoc solidum liquido specifice graviore, neutiquam vero leviore, expelli potest.

Sed fingamus, ne sic quidem omne dubium esse deletum, et velle quondam nodum, ut ajunt, in scirpo quaerere, iis equidem experimentum supra allegatum, mixtionem scilicet D, ante oculos pono, in qua idem carbonum pulvis, aqua perinde specifice gravior, gravitatis legibus reapse obedire et cum oleo aethereo, aqua ponderosiore, aquam similiter prorsus relinquens, mixtionis fundum petere cernitur.

Utcunque autem res sese habeat, phoenomena illa priorum trium experimentorum dictorum, legibus et gravitatis et pressionis contraria nullo alio modo, nisi quadam, qualiscunque demum ea sit, vi accessoria explicari possunt. Quo mihi concesso, spero, fore neminem, qui vim illam accessoriam, aliam esse non posse, nisi liquorum inflammabilium in carbones chemicam attrahendi facultatem, negare sustineat; quod si concesserit, fieri non potest, quin et id concedat, carbones omnibus fere in operationibus in quibus illos ceu optimum via humida depurandi medium commendavi, negotium hoc chemice peragere; idque eo majori jure, quia ipsae particulae illae, liquidis depurandis carbonum auxilio eripiendae, nunquam non inflammabilis naturae sunt.

Mechenicam itaque agendi facultatem iis tantummodo in casibus carboni tribuere convenit, in quibus eum, ceu optimum et

et efficacissimum medium liquores filtrandi, ob mechanice iisdem inhaerentes particulas heterogeneas, turbidos proposui.

Ubicunque vero de liquoribus pellucidis vel colore vel odore liberandis, res agitur, carbo nequaquam mechanicis, sed chemicis utique viribus operatur.

DE-

DESCRIPTION DU HARFANG,

OU DE LA CHOUETTE BLANCHE

(*Strix nyctea*).

Par *ALEXANDRE SEVASTIANOFF.*

Présenté et lû le 26 Mars 1800.

Quoiqu'on ait deja tant écrit et que l'on écrive eneore beaucoup sur la Zoologie, elle n'a pas jusqu'à present atteint ce degré de perfection que l'on pouvoit attendre aprés les travaux immenses, faits sur cette agreable partie de l'histoire naturelle. Ces imperfections se font particulierement sentir dans l'ornitologie, par ce qu'elle embrasse des genres nombreux, et que la plupart de sujets qui font l'objet de ses recherches ne sont point attachés toute leur vie à leur lieu natal, mais parcourent pour la plupart des grands espaces, en se transportant d'un climat dans l'autre, de sorte que le naturaliste le plus exercé doit être bien sur ses gardes pour ne pas faire plusieurs espéces differentes d'une seule et même espece, faute dans laquelle tant de naturalistes sont tombes, par ce que les oiseaux, en changeant de climat, et de norriture, et par le concourt de plusieurs autres circonstances, peuvent subir des variations, qui les rendent tout à fait meconnoissables. Pour prouver, que plusieurs ouvrages Zoologiques, se ressentent de pareilles meprises il suffit de citer ici pour exemple le sisteme de la nature de Linné, publié et augmenté par feu Mr. Gmelin, ou une seule et même espece se trouve quelque fois sous deux ou trois noms

noms differens. Plusieurs siecles peuvent encore s'écouler avant que nous ayons un sisteme d' ornithologie complet et entierement exempt des fautes nombreuses qu'on y rencontre, a moins qu'on ne tache de bonne heure à y remedier.

Attendu qu' on ne sauroit, comme le dit le celebre Buffon, suivre les oiseaux dans tous les climats qu'elles frequentent, il me paroit que le moyen le plus sure pour y suppléer, c'est d'observer soigneusement la même espéce d'oiseau dans les differents endroits qu'elle habite; de remarquer le changement de couleurs qui lui arrive pendant la mue; de faire la description de chaque espéce dans ses differents ages, qui produisent dans les oiseaux des variations considerables; et si c' est un oiseau de passage il faut observer, si le climat du lieu où il passe une partie de l' année, ne produit pas dans son exterieur quelque changement marqué; et ensuite de comparer la peinture d'une oiseau, faite dans un endroit, avec celle faite dans un autre endroit; de même il seroit très utile d'avoir l'oeil sur le changement que subissent les oiseaux dans la captivité.

Toutes ces observations réunies serviroient de renseignement pour mieux determiner les espéses des oiseaux, et sur tout des oiseaux de proie, dont les especes sont encore très mal fixées. C'est de cette maniere, que l'obscurité, qui couvre encore l'Ornithologie, se dissiperoit peu à peu, et nous aurions un sistême d'Ornithologie complet et purgé des meprises, qui la defigurent encore. Par la description que je donne ici de notre Harfang ou Chouette blanche, qui differe en èffet dans quelques points du Harfang decrit par Edwards et Pennant, on verra, que la différence, quoique peu considerable des climats ou l' oiseau habite, influe autant sur son exterieur, que sur ses habitudes.

De-

Description.

Cette espéce de chouette surpasse en grosseur tous les oiseaux de ce genre, méme le grand Duc (Strix bubo), mais sa tête est à proportion de son corps moindre, que celle des autres espéces de chouettes et de hiboux.

La partie superieure de la tête qui est blanche, est parsemée de petites taches brunes, qui sont très raprochées; le front est blanc, les taches de la nucque sont plus rares et plus claires. Ses yeux sont grands et noirs, l' iris des yeux est jaune et brillant; ils sont entourés de plumes blanches et et roides, qui partent des orbites des yeux, comme d' un centre commun.

Le bec est d' un noir luisant; la mandibule superieure crochue et plus longue que l' interieure; la base du bec, ou sont situées des narines profondes, est recouverte de plumes blanches et roides, tournées en devant (capistrum reversum). La gorge, le cou et la partie superieure de la poitrine sont blanches. Les plumes de la même couleur, parsemées de taches brunes, qui ont la forme du croissant, couvrent la partie infeurieure de la poitrine, le ventre, et se prolongent jusqu' à la moitié des pieds. Ces plumes laisent au milieu du ventre, en commençant depuis le cou jusqu' au croupion, un espace couvert de plumes blanches, tendres et très approchantes du duvet.

La queue est blanche, et consiste en douze plumes, parsemées de taches de la couleur ci dessu mentionnée, mais qui ne

ne sont pas si voisines les unes des autres, que sur le reste du corps et forment vers la fin de la queue deux raies transversales. Les plumes laterales de la queue sont entierement blanches.

Les pieds, couvertes de plumes blanches très tendres, ont quatre doigts, dont les trois sont par devant et bien separés l' un de l' autre, et le quatrième en arriere (pedes ambulatorii). Ces doigts sont armés d'ongles crochus, noirs et luisants, qui forment presque un demi-cercle parfait, et qui sont couvertes de longues plumes, en guise de poils, ce qui, joint à l' espéce de mantelet, que forment les plumes sur les deux côtés de la poitrine et du ventre, offre un caractère par lequel on peut distinguer la chouette que je decris, de celle qui a été decrite par Anderson, Pennant et Edward (*), les pieds de cette dernière n'étant couverts de plumes que jusqu' aux ongles; la notre a aussi les taches brunes en plus grande quantité et plus rapprochées; les ailes de la chouette d' Islande et de la Baye d'Hudson, decrites par les dits auteurs, n' ont gueres de taches frequentes qu' à leurs parties superieures, au lieu que la notre les a toutes parsemées de ces taches. Le coté de l' ongle du doigt du milieu, tourné vers le doigt interieur, est tranchant, et le doigt lateral exterieur peut se mouvoir en arriere (digitus versatilis).

Le

(*) Edward's Natural history of Birds. pag. 61. tab. 61. Pennant, Arct. Zoology, vol. II p. 233. n. 121. *Snowy* Owl. Anderson. Description de l'Islande. T. I. pag. 85.

Le Harfang habite les regions septentrionales de deux continents. Edward assure qu' on ne le trouve que dans la partie de l' Amerique, située le plus au nord, et qu' on ne le rencontre plus au dela de la Louisiane et de la Pensilvanie, d' ou cet oiseau a été envoyé à Edward par Mr. Penn, comme une très grande raretée. Dans le vieux monde elle habite la Norwege, la Suede, la Lapponie, l' Islande, quoique Horrobous contredit dans ce point Mr. Anderson; mais, comme Buffon le soupçonne, il ne le fait que par esprit de contradiction. On la trouve aussi dans la partie septentrionale de l' Allemagne, et Mr. le Conseiller de Consistoire Bock en fait mention dans son Ornithologie de la Prusse (1). Klein en a possedé le male et la femelle, qu' on lui avoit envoyé de Marienbourg. Je l' ai vu moi même en Livonie, en 1802. Mousieur Ellis (2) dit que cet oiseau est dans la baye d' Hudson d' une blancheur si eblouissante, qu' on a de la peine à le distinguer de la neige. En Russie le Harfang n' habite pas seulement dans la partie Septentrionale de cet Empire, mais Mr. Gmelin l'a vu dans les environs de Voronège (3). Notre celebre Academicien Mr. Pallas (4) le rencontra dans la chaine des Montagnes d' Oural, et nommement dans les montagnes depourvues de forets, appelées Houberlinsky. Pennant assure qu' on le rencontre en trés grande quantité chez nous au Kamtschatka. On peut bien croire ce naturaliste distingué, attendu le peu de lumiere que nous donne sur cet Oiseau le voyage de notre professeur Kracheninnikoff, qui dans la description du Kamtschatka

(1) Der Naturforscher. T. 8. pag. 58. an. 1776.

(2) Voyage de la baie de Hudson. T. 1. pag. 55, 56.

(3) Reise durch Russland. T. I. pag 384.

(4) Путеш:

tschatka, se contente de nommer tous les oiseaux de proie; et la nomenclature russe est encore si vague et si imparfaite, qu' il arrive souvent, qu' on donne le même nom à plusieures especes d' Oiseaux. La chouette, ou comme on l' appelle vulgairement l'hibou blanc de la Baye d'Hudson, ne forme pas une espece distincte de la notre, quoique Ellis l' a vu toute blanche dans cette contrée. Par ce que Mr. Gmelin atteste dans son voyage, on doit conclure, que nos Harfangs ne sont marqués de ces taches brunes que pendant une certaine partie de l' année, et qu' en hiver ils deviennent tout blancs, comme les habitans de la ville de Nova ladoga, m' ont assuré aussi. Le nom françois harfang vient du Suedois *Harfaong*, ce qui signifie chasser le lievre; par ce qu' en effet le harfang poursuit ce timide animal. Dans la Baye d' Hudson le Harfang n' est pas sauvage; il vient souvent dans les habitations des Indiens de cette contrée, et même les habitans de Nova-Ladoga, petite ville à cent quarante quatre verstes de Pétersbourg, l' ont vus quelque foi se placer sur les toits de leurs maisons.

Cet oiseau est encore remarquable par ce qu' il voit et vole le jour, comme la nuit. Son vol est assez rapide, mais il ne s' eleve jamais haut et tombe perpendiculairement sur sa proie.

Les differents genres des rats, les lievres, les gelinotes forment sa nourritrire ordinaire. Il poursuit les canards, cherche les coquillages, donc il se nourrit volontier; il devore quelque fois les poissons, qu' il saisit en rasant la surface des rivieres et des lacs, dont il habite les bords. Sa voix imite le gemissement. Les uns la comparent aux cris effroyables d' un souffrant, les autres aux

cris plaintifs d'un enfans; mais cette difference des cris tient peut être à celles des situations ou l'oiseau peut se trouver ou bien ceux qui l'ont entendu. Les Lapponois assurent que ses cris sont effroyables, et par superstion ils les attribuent souvent à un genie malfaisant (*). Les habitans de la Baye d'Hudson font cuire le Harfang, et après avoir mangé l'oiseau, ils se regalent du bouillon, comme d'une nourriture plus saine que l'oiseau même, selon leur maniere de penser.

Dimensions.

Depuis le bout du bec jusqu' à l'extremité des doigts	1 pied	5 pouces	0 lignes
Depuis le bout du bec jusqu' à l'extremité de la queue	1 —	11 —	0 —
Longueur de l'aile depuis l'epaule jusqu' a l'extremité de la plus longue plume	0 —	15 —	4 —
Longueur de la queue	0 —	9 —	0 —
Longueur des pieds quand l'oiseau est assis	— —	5 —	0 —
Longueur des pieds étendus . . .	— —	7 —	0 —
Depuis l'oeil jusqu' au bout du bec	— —	1 —	8 —
L'ongle du doigt qui est en arriere, et qui est le plus long	— —	1 —	9 —

On

(*) Donndorff, Zoologische Beyträge. T. II. article: Strix nyctea.

On ne sait encore rien sur le nombre d'oeufs que pond le Harfang, sur la durée de l'incubation, et sur l'éducation qu'il donne à ces petits. J'espere me procurer avec les tems quelques lumieres sur ces articles, et je ne manquerai pas d'en faire part à l'Academie, ce qui pourra servir de suite à la description de cet oiseau, que j'ai l'honneur de presenter.

EX-

EXPOSITION

DE QUELQUES EXPERIENCES DOCIMASTIQUES FAITES SUR LES MINES DE CUIVRE

PAR

B. SEWERGUINE.

Présenté à l'Académie le 18. Fevrier 1801.

Quiconque voudra jetter un coup d'oeil sur les différentes branches de la Chymie et de la Minéralogie, reconnoitra bientôt l'utilité et l'importance de savoir ce que les différentes mines metalliques produisent en Metal. On y parvient par les essais chymiques faits ordinairement en petit par la voye séche et encore plus parfaitement par ceux de la voye humide. Quant aux fonderies, on y est accoutumé de suivre la première, que l'on pratique suivant les régles que prescrit l'art docimastique. Et en effet, si l'intention n'est que de parvenir à connoitre la quantité du metal contenu dans la mine, cette méthode est ordinairement suffisante et même nécessaire, vû que les travaux métallurgiques en grand ne s'opèrent pour la plûpart que par la voye séche. On doit se rappeller encore que, si d'un coté les essais ou plutôt l'analyse complette d'une mine faite par la voye humide nous fait decouvrir non seulement la vraye quantité du metal en question, mais aussi les matières hétérogenes avec les quelles il a été combiné, de l'autre coté les essais faits par la voye séche ont cette utilité par-

ticulière

ticulière, qu' ils sont et plus courts et plus propres à nous indiquer et la bonté du metal acquis et la consommation presque inévitable qu' une mine ou qu' un metal peut éprouver dans la fonte en grand. Toute fois il seroit utile et même nécessaire que la première précéde la dernière. On sait d' ailleurs, que tandis que les instrumens chymiques qui servent dans les opérations de la voye humide pour faire connoitre les parties constituantes des corps, sont les résolvans, les précipitans et les réagens en général, ceux de la voye séche sont les différens flux ou fondans qui doivent servir ou pour mieux résoudre la mine et sa matrice, ou pour en degager le metal etc. Et comme le succés des essais dépend beaucoup de la qualité et de la quantité de ces fondans, des savans distingués ont pris toutes les peines pour pouvoir fixer ceux d' entre eux qui soyent les plus propres à remplir nos vues sur cet objet. Mais comme en comparant les préceptes qu' ils nous préserivent à ce sujet, on remarque des différences tant pour la qualité que pour la quantité des flux, ce qui peut faire chanceler les commençans dans leur usage ne sachant pas les quels d' entre eux doivent être preferés pour faire de bons essais, j' ai cru, pour en faciliter l' usage à ces derniers, devoir répéter quelques épreuves de mines suivant les différentes préceptes qui ont été préscrits, afin de les pouvoir employer avec plus de sûreté et d' utilité. Au reste on conçoit bien que ce n' est pas de cette différence de la qualité et de la quantité des flux que je parle, qui s' observe suivant la différence des mines et de leur matrice ou gangue, mais de celle qui est différente pour la même éspéce de mine. Prenons par exemple les mines de cuivre. *Schlütter* préfére pour leurs essais le flux crud, en en employant 6 parties sur une partie de la

mine.

mime. *Cramer* au contraire employe le flux noir, et pour ce qui regarde ce dernier quelques, uns le veulent avoir tout frai, et d'autres l'ont employé avec le même succés quand même il a été preparé depuis six mois. Pour ce qui regarde la mine de cuivre *vulgo* nommée Schisteuse, quelques uns prennent pour en faire l'essai 3 parties de verre pilé avec 3 parties de Borax; — d'autres 8 parties de tartre, 4 de nitre et une de Borax; — d'autres encore 4 parties de tartre, 2 de nitre et 20 d'antimoine sur cent parties de la mine etc.

Sans m'occuper de la discussion des motifs qui peuvent avoir engagé les Metallurgistes à proposer tel ou tel autre flux, j'ai l'honneur de présenter les expériences qui ont été faites sous mon inspection et selon que les occasions se présentoient. Et comme les essais des mines de cuivre étoient ceux qui nous occupoient le plus souvent, ce seront eux encore qui nous occuperont dans cette exposition.

Les procédés que l'on observe ordinairement dans ces sortes d'essais, sont connus. Cependant il est de mon devoir de donner auparavant un court exposé de la manière dont nous avons agi dans nos propres expériences afin, que l'on soit en état d'apprécier les résultats que j'en ai tirés.

On commença par broyer la mine dans un mortier de fer de fonte bien nettoyé. Aprés quoi nous avons pris 1 poud docimastique de la mine, qui est égal à un Solotnick du vrai poid Russe, et celui ci est égal à peu-prés à 3 grains du poid allemand. Ce poud se divise en 40 parties égales dont chacune répresente une livre docimastique, et celle-ci se soudivise

comme

comme tout le monde le sait, en parties encore plus petites, ainsi que le poud et la livre du vrai poid etc.

La mine étant réduite en poudre, quand elle exigeoit d'être grillée, nous l'avons mis dans un test à rotir de capacité suffisante, et que nous avons frotté auparavant avec de la sanguine (Röthel) et posé sous la mouffle du fourneau docimastique. Nous avons donné un feu moderé, mais qui duroit plus longtems, quand la mine étoit facile à fondre, et au contraire nous avons donné un degré de feu plus fort quand la mine étoit difficile à fondre. Dans tous les deux cas nous avons de tems en tems remué la mine avec un crochet de fer. Nous avons continué le grillage jusqu'à ce que nous ne pouvions plus remarquer la moindre odeur de souffre ou d'arsenic. Au reste on conçoit bien que toujours nous avons donné au commencement un feu doux que nous avons augmenté par degrés, et que nous avons marqué la perte de poid que la mine a essuyée pendant le grillage. La mine grillée fut encore broyée.

L'essai se faisoit sur l'aire de la forge où l'on avoit formé un foyer avec de larges briques, dont la cavité étoit quarrée d'un $\frac{1}{2}$ arschine de profondeur et de largeur. Nous avons pris des creusets d'essai connus sous le nom de tuttes, que nous avons couvert comme à l'ordinaire, d'un couvercle que nous avons luté ensemble avec de la glaise. Nous avons placé ordinairement trois de ces creusets devant le soufflet, de manière que deux étoient disposés en avant et le troisième derrière et entre les deux premiers, afin que le vent du soufflet passant par les deux premiers puisse atteindre le troisième. Ordinairement un ou deux essais ne réussirent pas quand nous en avions

pris quatre. Pour ce qui régarde la manière de les placer, de les couvrir de charbons, ce qui demande encore un peu de pratique, nous avons observé tous les préceptes prescrits dans les livres docimastiques. Le feu le plus fort produit pas le souflet duroit 8 — 10 — 12 — 15 minutes selon la qualité de la mine, et après que tous les charbons furent allumes peu-à-peu par les charbons ardents que nous y avons ajoutés.

Puis nous avons retiré du feu les creusets, nous les avons posés sur une plaque de fer de fonte, nous avons frappé la dessus une couple de fois et à petits coups, puis nous les avons laissé refroidir lentement sans les plonger dans de l'eau, ensuite nous avons cassé le creuset et degagé le metal des scories, et nous l'avons pesé. Tous les boutons de cuivre que nous avons obtenu, etoient maléables.

Les flux que nous avons employés dans ces essais etoient. 1) Flux noir (3 parties sur une partie de la mine) — 2) Borax (1 partie sur une partie de la mine) — 3) quelque-fois du verre pilé. Et toujours le mélange de la mine avec les flux fut récouvert 4) à $\frac{1}{2}$ pouce de hauteur de sel commun que l'on comprima avec le doigt sur toute la surface. Le flux noir étoit pour la plûpart fraix, quoiqu'il ne fut pas toujours préparé tout avant de faire l'essai. Enfin voici les résultats de quelques uns de nos essais.

1 Expérience.

Un poud docimastique ou 40 livres docimatiques de la mine de cuivre rouge (*Cuprum mineralisatum rubrum* Wiedenm.) des minières de Werchotourje, melé un peu de parties hétérogé-

nes

nes terreuses, après avoir été grillé et fondu de la manière ci dessûs decrite, nous donna 24 livres docimast. de cuivre. Le bouton de cuivre etoit rond, il se dégagea facilement de la scorie, qui portoit tous les signes d'une fusion parfaite.

2 Expérience.

Un poud docimast. de la même mine et du même endroit, après avoir ete grillé et fondu avec les flux ci dessûs mentionnés, étant tenu dans le feu 10 minutes pendant que les charbons s'allumoient par eux même, et puis prés de 20 minutes devant le soufflet, donna un bouton de cuivre, qui pesoit 20 livres docimast. La scorie étoit de couleur brune rougeâtre.

3 Expérience.

Un poud docimast. de la même mine et du même endroit, sans être grillé auparavant et dans un feu fort du soufflet qui duroit un quart d'heure, donna un bouton de cuivre qui peroit 24 livres docimast. La scorie étoit rouge.

Remarque. Comme 100 parties de la même espèce de mine donnent suivant l'analyse chymique de *Fontana*, faite par la voye humide, 73 parties de cuivre, ce qui féroit 29,2 livres par poud, et comme nous n'avons obtenu que tout au plus $24\frac{1}{2}$ livres; la cause en pourroit être attribuée ou aux parties hererogènes qui n'ont pû être degagées parfaitement, ou au dechet d'une partie de cuivre dans la fonte qui n'a pû être empeché absolument, ou aussi au feu un peu trop fort que nous avons donné.

 4 Ex-

4 Expérience.

Un poud docimast. d'une Malachite compacte (*Cuprum mineralisatum viride Malachites Wiedenm.*) d' une couleur moyenne entre la couleur d'herbe et le verd obscur, donna avec les fluors mentionnés et après avoir été tenu dans le feu du soufflet pendant un quart d'heure, un bouton de cuivre qui pesoit $19\frac{1}{2}$ livres docimast.

Remarque. L'analyse chymique de la Malachite faite par le célebre chymiste Klaproth par la voye humide donna 58 parties de cuivre pour cent, ce qui feroit 23,2 livres par poud. Mais comme nous n'avons obtenu que $19\frac{1}{2}$ livres, on pourroit encore attribuer ce defaut aux causes mentionnées cy - dessûs.

5 Expérience.

Vingt livres docimast. ou un demi poud docimast. de cuivre oxidé bleu fibreux (*Cuprum mineralisatum coeruleum radiatum Wiedenm*) de Colywan, melé d'ochre de fer jaunâtre, n'étant melé qu' avec 2 pouds docimast. de flux noir et couvert de sel commun, comme il a été dit ci-dessûs, et après avoir été devant le soufflet pendant 15 minutes, donna un bouton de cuivre qui pesoit 10 livres docimast. La scorie étoit de couleur brune rougeâtre.

Remarque. Comme la même espèce de mine analysée chymiquement par Mr. Fontana par la voye humide, donna 75 parties de cuivre pour cent, ce qui feroit 30 livres par poud, ou 15 livres par demi - poud, et comme nous en avons obtenu

moins, je dois encore l'attribuer aux causes déja mentionnées. (3 et 4 Expérience.)

6 Expérience.

Une quantité determinée de pyrite de cuivre (*Cuprum mineralisatum pyritaceum Wiedenm.*) des minières de Werchotourie, melée un peu avec de la mine de cuivre azurée (*Cuprum mineralisatium variegatum Wiedenm.*) et de Hornblende, a essuyé pendant le grillage une perte de poid de 5 livres par poud. — Un poud docimast. de la mine grillée étant melé avec $3\frac{1}{2}$ pouds docimast. de flux noir et 8 livres docimast. de verre verd et tenu devant le soufflet pendant 17 minutes, on a obtenu un bouton de cuivre qui pesoit 10 livres et 76 Solotnicks de poid docimastique.

7 Expérience.

Une autre pyrite de cuivre étant manipulée de la même manière donna $9\frac{1}{2}$ livres de cuivre par poud. De sorte que dans tous les deux cas la quantité du cuivre obtenu étoit plus grande que l'on suppose ordinairement, c'est à dire de 8 — 10 — 17 parties pour cent.

8 Expérience.

Un poud docimast. de verd de montagne (*Cuprum Ochraceum chrysocolla Wiedenm.*) melé un peu de bleu de cuivre et de cuivre oxidé noir (*Cuprum ochraceum nigrum Wiedenm.*) dans une matrice arenaceuse friable, donna de la même manière, mais sans être grillé, un bouton de cuivre qui pesoit 14 livres de poid docimastique.

9 Ex-

9 Expérience.

Un poud docimast. de verd de montagne melé un peu avec de la mine de cuivre rouge donna de la même manière (8 Exp.) un bouton de cuivre qui pesoit $18\frac{3}{4}$ livres de p. d.

10 Expérience.

Du verd de montagne melé un peu avec de la mine de cuivre rouge et de pyrite de cuivre dans du Quartz, etant manipulé de la même manière, (Exp. 8.) ne donna que quelques parcelles de cuivre dispersées dans la scorie.

11 Expérience.

Nous avons manipulé du verd de montagne suivant la méthode de Mr. Hermbstadt (Voyez sa chymie 3 partie pag. 125.) avec 16 parties de charbon pulverisé, (si ce n'est pas une erreur typographique). Mais le melange n'entroit du tout en fusion et restoit en forme de poudre, après avoir été plus d'un quart d'heure devant le soufflet. Mais quand nous n'en primes que huit parties, la matière coula, mais les parties de cuivre étoient dispersées dans la scorie.

12 Expérience.

Du cuivre natif de Kamtschatka étant analysé par la voye humide ne fit voir que quelques particules de fer.

Remarques.

Quelque peu nombreuses que soyent les expériences citées, ainsi que plusieurs autres qui ont été faites dans diverses oc-

occasions sous mon inspection, néanmoins il semble que, même de ce petit nombre d'essais on peut déduire les réflexions suivantes, en attendant qu'ils soyent et plus multipliés et plus rigoureusement faits, ce que je ne manquerai pas de faire toute fois que les occasions s'en présenteront.

1. Quand une mine de cuivre est melée avec une matrice difficile à fondre, il y faut ajouter une quantité un peu plus grande de Borax ou de verre, que celle que nous avons employée.

2. Quand c'est la mine de cuivre rouge avec la quelle on fait l'essai, le feu du soufflet ne doit pas durer plus de 15 minutes, parcequ'il seroit à craindre qu'une partie du cuivre ne passe dans la scorie, comme cela semble être arrive dans l'expérience 2.

3. La Malachite semble avoir encore moins besoin de feu, comme cela démontre l'experience 4.

4. Le cuivre oxidé bleu melé de fer semble avoir besoin de l'addition de Borax, afin que la masse se fonde plus parfaitement et que le fer se détruisse plus facilement, comme on voit dans l'expérience 5.

5. Pour ce qui régarde les pyrites de cuivre, les flux mentionnés dans l'expérience 6, ainsi que le degré de feu que l'on y a employé, semblent être les plus propres pour en extraire tout le cuivre.

6.

6. Le mélange du verd de montagne avec le Quartz dans l'expérience 10, semble demander plus de verre et peut être jusqu'à quatres parties de fiux noir pour rendre la masse plus fusible et pour mieux réduire le cuivre en un seul bouton.

7. On voit encore par les expériences 1, 2, 3, 4, et 5, a) que la mine de cuivre rouge a souffert au feu un dechet de 5 à 9 livres de cuivre par poud, ce qui seroit sans doute trop et indiqueroit absolument, même en grand, que le feu étoit trop fort, ou que la manipulation étoit fautive. — b) La Malachite a souffert un dechet de 4 livres de cuivre par poud, ce qui seroit encore un peu trop même en grand, et pourroit resulter des mêmes fautes qui ont été indiquées tout à l'heure. — c) Le cuivre oxidé bleu a souffert un dechet de 5 livres de cuivre par poud, ce qui séroit toujours trop par les causes mentionnées. Comme on ne pourra peut-être jamais produire par la fonte la même quantité de ce métal imparfait que l'on obtient dans l'analyse chymique faite par la voye humide sur la même quantité de la mine; il seroit à souhaiter que des expériences très rigoureusement faites nous puissent indiquer plus décisivement la quantité du métal qu'une mine en fonte perd inevitablement.

8. On a vu ci dessûs que nous n'avons pas fait griller les oxides de cuivre, quoique Mrs. Schlütter et Scopoli prétendent que tous les oxides de cuivre le dévroient être, vû qu'ils produisent alors plus de cuivre. Cette circonstance est encore à prouver par des expériences, en attendant les expériences 1, 2 et 3 nous démontrent que du moins ce n'est pas généralement le cas.

9. Nous terminons enfin cette matière par la remarque qu'en répétant les différentes manières d'essaier les mines de cuivre, il faudra nécessairement faire une attention plus scrupuleuse au dechet que la mine éprouve dans la fonte; au choix des flux les plus propres selon la différence des mines et de leurs matrices ou gangues; aux dégrés de feu qu'elles exigent, au grillage, s'il doit se faire ou non; à la qualité du cuivre obtenu, à la qualité des scories, et indiquer ensuite les fondans et les degrés de feu les plus avantageux pour la fonte des mines de cuivre en grand. Il séroit absolument nécéssaire d'avoir des marques, par les quelles on puisse réconnoitre le vrai moment où l'on doit retirer du feu la mine à essayer, vû qu'un feu continué trop long-tems peut occasionner la perte d'une bonne partie de cuivre, et que, quand le feu ne dure pas assez de tems, la mine ne se fond pas aussi parfaitement qu'il seroit nécessaire pour que toutes les parties metalliques se rassemblent en un seul bouton. Il s'en suit qu'il seroit bien à desirer que les signes proposés par Mr. Brandshagen, fussent pour cet effet encore bien perfectionnés.

DE MYRMECOPHAGA ET MANE.

AUCTORE

N. OZERETSKOVSKY.

Conventui exhibita et praelecta die 7 Octobris 1801.

Species Myrmecophagae et Manis apud scriptores Historiae naturalis duo diversa constituunt genera, quorum characteres sunt, 1) nullos habere dentes; 2) lingua gaudere tereti extensili; 3) ore instrui angustato in rostrum; id quod utrique generi est commune; omnem vero differentiam inter duo genera externa faciunt tegumenta. Species Myrmecophagae teguntur pilis; corpus autem Manis horret squamis mobilibus osseis.

Si hac ratione Botanici distribuerent vegetabilia in genera; si sumerent cortices vegetabilium pro characteribus generum; actum foret de Botanica. Quercus suber non referretur ad quercum; quoniam cortice rimoso fungoso ab omnibus quercus speciebus plane distinguitur. Juniperus Oxycedrus removeretur a genere juniperi; propterea quod profert baccas foliis longiores et colore a baccis juniperi communis diversas. Sed Botanici neutiquam recedunt ab illis notis characteristicis, quae unicuique generi sunt propriae, non confundunt tegumenta vegetabilium cum partibus florem constituentibus, a quibus character genericus desumitur, et corticem vegetabilium referunt ad illos characteres, qui-

quibus una species ab altera aliquando distinguitur. Idem omnino deberent facere et Zoologi, qui dentes, linguam et os pro determinandis animalium generibus recipiunt; vestitum autem eorum pro distinguendis speciebus constanter adhibere deberent, praesertim, quando animalia non solum notis genericis, verum etiam vitae genere et moribus inter se conveniunt, quemadmodum Myrmecophaga et Manis.

Omnes species Myrmecophagae teguntur pilis, teste Linnaeo, crassissimis; ast in speciminibus Myr. didactylae, quae in musaeo Academiae asservantur, vellus non crassum, sed tenerrimum et valde densum deprehenditur. Myrmecophagae vescuntur formicis, melle, aliisque liquidis viscosis, quae lingua sua, extensili et longa, ex cavitatibus arborum extrahunt; diu ferunt famem; interdiu dormiunt, noctu vero opera sua peragunt; lente adeo incedunt, ut in aperto loco persequentem eas hominem effugere nequeant.

Manis quoque vescitur formicis; linguam habet teretem longam, uti Myrmecophaga, rictum oris angustum, edentatum, corpus elongatum, ungues ejusdem fere magnitudinis et formae ac Myrmecophaga; celeritate pedum non pollet; et quo velocior est homo, eo facilius praedam hanc assequitur.

Ob has affinitates Cel. Buffonus, qui omnes Myrmecophagas Americae indigenas esse crediderat, dixit eas in antiquo orbe habere sibi Manem adeo affinem, ut quasi haec absentium personam sustineret. „Les fourmillers, inquit, qui sont des „animaux très singuliers, et dont il y a trois ou quatre espè-„ces dans le nouveau monde, paroissent aussi avoir leur re-„presentans dans l'ancien; c'est-à-dire, le Pangolin et le Pha-

„ tagin. “ (Hist. nat. dégéneration des animaux) Noluit vir eruditissimus fidem habere peregrinatoribus Kolbio et Desmarchais, qui Myrmecophagas dari etiam in Africa asseverabant, relationemque Kolbii animose refellens, sequentibus contra eum invehitur: „ A l'égard de Kolbe nous contons pour rien son te„ moignage, car un homme qui a vu au cap de Bonne-espé„ rance des Elans et des Loups-Cerviers tous semblables à ceux „ de Prusse, peut bien aussi y avoir vu des Tamandua. „ (Hist. nat. art. Tamanoir). Attamen Myrmecophagam jubatam, quam Buffonus sub nomine Tamanoir describit, dari et in America Australi et in Africae regno Congo, supra dictis peregrinatoribus et Vosmacro eo magis credimus, quod praeter hanc Myrmecophagae speciem detecta est nova species in Capite Bonae spei, Capensis dicta, cujus descriptionem dedit cel. Pallas in suis Miscellaneis Zoologicis. Manis igitur in orbe antiquo non supplet vicem Myrmecophagae, cum ejus duae species in eodem habitant. Duas itaque tantum Species Myrmecophagae America habet sibi proprias, unam communem cum Africa, cui indigena est Myrm. Capensis, in America non existens. Etiamsi autem supponeremus non dari Myrmecophagas in orbe antiquo; an sequeretur exinde Manem cum illis ad unum genus referri non posse? Dari animalia, soli Americae propria et indigena, quis ignorat? Ast ipsa illa animalia sub iisdem collocantur generibus, ad quae pertinent eorum similia, in orbe antiquo habitantia. Meo itaque judicio, duo illa genera omnino sunt unienda, et nomen Myrmecophagae etiam Mani est imponendum, quoniam et haec vescitur formicis.

Quodsi pro definiendo Myrmecophagae genere sumerentur hi characteres: Dentes nulli in utraque maxilla; lingua teres ex-

extensilis; os angustatum in rostrum; Manis ex hoc genere nullo modo exulare posset, quippe quae omnes illos characteres aeque possidet ac Myrmecophaga, cujus genus in duas tantummodo sectiones est dividendum, ut etiam Manis sub eo comprehendi possit. Prima igitur sectio complectetur Myrmecophagas corpore piloso. Huc referemus Myrm. didactylam, jubatam, tetradactylam, Capensem, si recte refertur ad hocce genus, et tridactylam, dummodo a didactyla diversa sit species. Ad alteram sectionem spectabunt Myrmecophagae corpore supra squamis mobilibus osseis tecto. Hic locum obtinebunt Myrm. Manis et Myrm. Macroura. Specificas hasce denominationes ideo substituere vellem denominationibus Linnaeanis, ut non idem repeteretur in descriptione speciei, quod jam continetur in ejus nomine; pentadactyla enim in systemate Naturae distinguitur pedibus pentadactylis, et tetradactyla pedibus tetradactylis; quasi non pateret ex his denominationibus, eas tot digitis esse instructas, quot indicat nomen.

Ex hoc genere in Musaeo hujus Academiae sequentes prostant species.

1) Myrm. Dydactylae specimina novem adulta in liquore. Pleraque habent linguam filiformem, albidam, ad aliquot lineas exsertam; color pilorum in aliis spadiceus vel ex fusco-rufescens, in quibusdam dilutior, ac paene albus, praesertim in abdomine, pilis molliusculis, densissimis; auriculae nudae albicantes, tenuisculae; mammae duae pectorales inter pedes anteriores, et binae in regione hypogastrica prope pedes posteriores; palmae didactylae, plantae tetradactylae, unguibus approximatis, validis, acutis; cauda supra pilosa, pilis versus apicem rarioribus; infra depilis a medio usque ad apicem.

2)

2) Ejusdem Myrm. Didactylae specimen minutum ferruginei coloris, rostro exilissimo, nudo, albido, cum portione linguae exserta.

3) Foetus Myrm. Didactylae, cum portiunculis membranae tenuissimae, pellucidae, eo in situ, quem habuit in utero.

4) Foetus Myrm. Tetradactylae, (Myurae) masculus, totus depilis, albissimus; cum magna portione linguae exserta, et funiculo umbilicali propendente, abscisso; palmis tetradactylis, plantis pentadactylis.

5) Myrmecop. Manis specimina quinque diversae magnitudinis. 1) Specimen siccum, magnitudine sex spithamas aequans, squamis dorsi et caudae validissimis, subobtusis; lateralibus caudae carinatis, acutis et quasi in mucronem desinentibus; pedibus usque ad exortum unguium squammatis.

6) Duo iterum specimina sicca, priore plus quam dimidio minora; in unico eorum squamae laterales a capite ad pedes anteriores duobus ordinibus, inde per latera corporis usque ad plantas pedum posteriorum ordinibus quatuor acute spinosae.

7) Ejusdem animalis pulcherrima duo specimina in liquore, quorum unum longitudine quatuor spithamas aequat, et supra squamis ex rubro rufescentibus est nitidum, subtus vero ab apice rostri per oculos, aures, collum et abdomen usque ad plantas pedum cute tegitur nuda, albissima; alterum specimen minore magnitudine et dilutiore squamarum colore ab illo distinguitur. Ambo specimina sunt mascula et insignibus genitalibus donata, uti Myrmecophagae pilosae, quae etiam colore pilorum cum colore squammarum Manis plurimum conveniunt.

DE

DE ANTHERARUM PULVERE.

AUCTORE

I. T. KOELREUTER.

Conventui exhibita die 9 Dec. 1801. et praelecta die 2. Maj. 1804.

Sectio prima.

De loco originalis generationis antherarum pulveris, ejus situ, et nexu cum antheris, nec non de ratione ac modo, quo ille secernitur atque excernitur.

§. 1.

Omnes scriptores, quoad theoriam de generando atque oriendo antherarum pulvere, in hoc inter sese conveniunt, quod ille, uti quisque alius succus, in vasis succosis plantae praeparetur, per stamina ducatur, tandemque in antherarum cavitatem secernatur.

§. 2.

Si tibi antherarum pulverem tanquam sulphuream, aquosis particulis depurgatam materiam animo finxeris, hanc hypothesin veram quodammodo reperies; sin autem respicies, illum esse eam materiam, quae in unaquaque planta suam sibi propriam ac determinatam figuram habet, cuilibet statim suspectam esse

esse futuram puto. Quin hoc unicum momentum paululum modo illud meditaturo jam facile suspicionem injiciat, antherarum pulvisculos non ex fluidae substantiae particulis consistere, sed necessario plantae partes revera organicas esse.

§. 3.

Nihilominus determinata antherarum pollinis figura nullum adhuc sufficiens dat documentum organicae structurae: Crystalli enim variorum salium non minus diversam et in quavis specie semper eandem figuram praebent; ob id autem fere a nemine in strictiori sensu organicae habentur. Sed physicum tamen facile incitare potuerat, ad diligentius perscrutandas antheras, praecipue vero his inclusum pulverem bonorum microscopiorum ope contemplandum. Eidem huic investigandi cupiditati ego acceptum refero, quod tandem longa observationum serie de vanitate supramemoratae hypothesis plane mihi persuasum sit.

§. 4.

Antherarum pulvis est collectio particularum organicarum alius organicae floris partis, cui nomen est anthera. In quavis planta certam atque determinatam figuram habet, estque verum organon, in quo semen masculinum generatur, secernitur, et ad excretionem idoneum redditur ([a]). Quo minus de antheris optima ratione opineris, illas, antequam apparuerint, minores modo

([a]) Siehe meine vorläuf. Nachr. ꝛc. Leipz. 1761. 8. S. 1.

modo in plantae succis fuisse demersas; eo minus de antherarum pulvere id dici potest; hic simul cum antheris et in iis ipsis generatur, ex iis alimenta sua sugit, cumque iis tamdiu crescit, donec tandem justam suam magnitudinem assequatur.

§. 5.

Equidem omnino miror, quod ne *Malpighius* quidem et *Grewius*, licet bonis microscopiis instructi, hoc posterius detexerint. *Grew* quidem ab hac inventione non longe amplius aberat: perspexit enim, antherarum pulvisculos in interiori antherarum plano valde compressos et in condensatis ordinibus absque pedicellis firmatos esse. Elegans ordo, qui illi hic sub oculos cadere necesse erat, jam in eo cogitationem excitare potuerat, quod hic in graviori aliquo momento, quam in nuda fortuita pulvisculorum agglutinatione necessarie positus sit. Interea non dubito, quin plane aliam sententiam de origine antherarum pulveris aluisset, si ipsi de nexu illius cum antheris per suos ipsius oculos persuasum fuisset.

§. 6.

Meae microscopii ope institutae observationes aliquando tale mihi aperuerunt: cum, antherarum pulverem maximae ejusdemque plane adhuc clausae antherae, quam ex imperfecto adhuc flore Hemerocallis fulvae sumseram, investigaturus, parvum numerum pulvisculorum tenero scalpello ab interiori antherae plano, cui firmiter adhuc adhaerere videbantur, cum summa cura detrusorum optimo microscopio exposuissem: conspexi, illorum non paucos inusitato modo pedicello fuisse instructos, qui in aliis spiraliter tortus, in aliis vero, instar fili in rectum ex-

 tensus

tensus erat. Facile illos pro veris pedicellis habueris; ii autem, ut opinor, nihil aliud fuerant, quam avulsae tracheae et vasa succosa, quae nimirum ad ipsam antherarum substantiam pertinent, et per quae pulvisculi, donec aliquantum perfectiones gradum assequuntur, cum illis cohaerent. Alia observatio, quam aliquando in plane adhuc clausa atque imperfecta anthera Agaves Americanae institui, id confirmare videtur: in variis enim transversis sectionibus illius non pauca talium vasorum vidi, quae quemlibet antherarum pulvisculum in eleganti ordine rectâ lineâ attingebant.

§. 7.

Nexus autem pulveris cum antherarum substantia non in his vasis solum constat, sed et, uti videtur, insuper adhuc in valde tenera vesiculosa vel in cellulas distributa cuticula, quae interius antherarum planum circumvestit, sub cujus cellulis vel dissepimentis antherarum pulvisculi, usque ad eorum secretionem in antherarum cavitatem, cooperti jacent.

§. 8.

Si saturate coccineam superficiem clausae adhuc antherae Amaryllidis formosissimae mediocri microscopio contemplaveris, in illa ubique innumeram multitudinem prominularum oblongarum vesicularum, valde compressarum, et secundum longitudinem antherae sese extendentium videbis. Est vero hisce vesiculis eadem ferme figura, qualis pulvisculis in antheris hujus floris contentis; quin vel numerus earum cum horum convenire videtur. Plerumque sunt inter se similes, licet quoque passim nonnullas conspicias, aliis vel aliquanto breviores vel latiores; et

ean-

eandem hanc diverſitatem aeque toties quoque in hujus floris pulviſculis animadvertes.

§. 9.

Interius antherarum planum ſupra dictae Amaryllidis eodem fere eſt habitu, quo exterius: quum enim particulam antherae, mox ſeſe aperturae, cujusque interius planum ad hunc finem parvo penicillo ab omni, uti videbatur, jam pridem ſecreto antherarum pulvere prius purificaveram, microſcopio pellucidis objectis accommodato expoſuiſſem, hic quoque nihil, niſi coccineas veſiculas vidi, quarum alia aliam clariori carnei coloris margine attingebat. Tale cuticulae fruſtulum etiam obſcuris objectis accomodato microſcopio expoſui, et in quavis harum interiorum veſicularum duas anguſtas, oblongas protuberantias, ſulcum inter ſe habentes, animadverti: quod cogitationem in me excitavit, talem ſulcum forſan eſſe hiatum veſiculae contractum, quae in ſecernendo pulvere in cavitatem antherarum, ſecundum longitudinem in duos lobos diviſa, per hinc coortum hiatum vel rimam ſuum pulviſculum, ante in ipſa contentum, excluſiſſet.

§. 10.

Sperans, fore, ut antherarum pulviſculos in veſiculis vel cellulis ſuis adhuc incluſos reperiam, nondum plane adultam, nec prorſus coloratam antheram ex flore excerpſi, longius adhuc, quam ille, a floreſcentia ſua remoto; ſed et in hac plurimi pulviſculorum erant ſecreti; poſt debitam tamen praeparationem nonnulli adhuc paſſim juxta ſe invicem in veſiculis ſuis jacere videbantur; hanc certe meam opinionem confirmavit color

eorum obscurior ac situs cuivis ordini vel seriei bene adstrictus, dum semper antherarum pulvisculus suae exacte respondebat vesiculae, quin ego illos insuper cum penicillo loco suo dimovere non potuerim.

§. 11.

In clausis adhuc antheris Agaves Americanae, croci verni, hyacinthorum vulgarium et tuliparum, aliorumque plurium, eandem hanc vesiculosam inveni structurum. Harum vesiculae magis aut minus fuerunt oblongae, prouti forma pulvisculorum unius vel alterius harum plantarum magis aut minus a forma rotunda recedebat. Perinde quoque quoad magnitudinem et numerum certam semper rationem inter vesiculas atque antherarum pulvisculos animadverti.

§. 12.

Minime autem aliquis putet, me velle contendere, quod antherarum pulvisculi in ipso medio inter externas et internas vesiculas locum suum capiant; media antherarum substantia, quae maximam harum crassitiem constituit, utriusque faciei vesiculas ab invicem sejungit, et hinc sequitur, ut antherarum pulvisculi (si tamen unquam huic, quod ipse vidi, confidam) ante ipsorum secretionem nullo alio loco, quam immediate sub interiori antherarum plano, scilicet in ipsis internis vesiculis situm suam occupent.

§. 13.

Illud interea, quod de nexu et proportionali magnitudine, forma et numero pulvisculorum ac vesicularum dixi, non in

in universum pono: meae enim observationes in Ialapis non mediocre discrimen mihi monstraverunt. Vesiculae antherarum in his plantis in comparatione cum pulvisculis numerosissimae et perexiguae sunt: facile igitur putes, fieri non posse, ut hi illis inclusi fuerint. Quin eo magis veritati accedit, quod antherarum pulvisculi ante ipsorum secretionem in certis tenerrimis, albicantibus, cuticulae similibus vesiculis, quas posteriori parieti, aperturae cujusvis folliculi vel loculi antherarum ex adverso affixas, et facta secretione pulveris rugosas plane et corrugatas conspexi, necessarie delituerint; praecipue cum earum numerus cum eodem in quovis folliculo vel loculo contentorum pulvisculorum certam rationem tenere videatur. Immo semper eventui respondit, ut, cum, in quovis folliculo contentos pulvisculos numeraturus, unum post alterum demsissem, ad postremum semper adhuc nonnulli pauci minimorum et immaturiorum posteriori illorum parieti firmiter inhaerere viderentur, nec cum penicillo aliter, nisi post saepius repetitam circumlitionem solverentur: quamobrem multa, cum verisimilitudine conjici potest, quod tunc, cum majores ac maturiores jam secreti fuerant, in suis cuticulae similibus vesiculis necessario adhuc infixi fuerint, donec tandem eorum secretio ope penicilli saepius admoti, vesiculis, ut opinor, hinc vel apertis vel ruptis, accelerarettur. Quam modo memoratam circumstantiam in aliis quoque plantis ex Malvarum ordine saepius observari.

§. 14.

Secretionis igitur pollinis in antherarum cavitatem, ut ego existimo, haec est ratio: Cum cuivis antherarum pulvisculo ab interiori substantia antherarum attributa vasa succosa et tracheae suum munus praestiterunt, et pulveri sufficientem copiam par-

partim proprii alimenti, partim illius materiae, ad masculinum semen rite praeparendum idoneae advexerunt, ut certe opinari licet, exarescunt, sese et cum ipsis conjunctam vesiculosam cutem retrahunt, tandemque nexu suo solvuntur. Illa hanc ob rem ab extra versus cavitatem antherae introrsum tendens et in pulverem effecta pressio, et magnitudo ipsorum pulvisculorum, qui alioquin jam in densis ordinibus compressi jacent, efficit, ut tenuior super singulis pulvisculis intensa pars vesicularum sese aperiat; forsan quoque antherarum eo tempore semper adhuc durans incrementum in longitudinem, quo vesiculosa cuticula quasi extenditur, et solutio vasorum pulveris promovetur, non parum ad id confert. Antherarum pulvis hac pressione veluti coactus liberum exitum invenit, secernitur, et in cavitatem antherarum protruditur, in qua aliquantisper adhuc in mediocriter ordinato situ permanet; tandem vero, universae antherae substantia sese contrahere et exarescere incipiente, spatioque in minori plano ipsi deficiente, in cavitate folliculi inordinatim coacervatur, exitumque foras quaerit.

§. 15.

Interea aperit sese anthera, partim sua sensim ingravescente contractione, secundum duas sibi invicem adversas directiones, partim urgente antherarum pulvere in locum minimae resistentiae, hiatum vel suturam puta minus validam, et plerumque per medium utriusque lateris antherae secundum longitudinem ductam. Ambae alae, quae antea in unoquoque latere antheram tali sutura instructam inter se efformabant, perdurante contractione et corrugatione ipsarum substantia, semper longius a se invicem recedunt, adeoque pulverem antherarum abundanter prorumpentem aperto aëri exponunt, et se ipsas quasi inver-

vertunt, planum suum interius nunc extrorsum, suumque exterius retrorsum et in se vertendo. Et hoc modo fit antherarum pulveris excretio.

§. 16.

Ceterum supradictae lentae mutationes in pluribus plantis locum habent, earumque numerus multo est minor, in quibus antherae repente rumpuntur, suumque pulverem vi quadam explodunt. Manifeste igitur experientiae contradicit, quando plurimi recentiorum auctorum de antheris perhibent, quod accepta maturitate rumpantur, suumque pulverem celeri motu in auram emittant. Nescio, quo casu in hunc errorem inciderint. Forsan Vaillantii rhetorica descriptio de mirabilibus in antheris Parietariae ([b]) sese ostendentibus permutationibus tantopere illos movit, ut, quae ille de Hermaphroditis dixit, neglexerint, vel plane obliti sint. Cum itaque hoc perpaucis tantum plantis proprium sit, melius foret, cum de pulveris excretione in genere sermo est, si dictionem nostram solemniori phaenomeno accommodemus.

Sectio Secunda.

De maturitate pulveris antherarum.

§. 17.

Est, quod credamus, antherarum pulverem illarum plantarum, in quibus repente et vi ex ruptis antheris exploditur, jam

([b]) Discours sur la structure des Fleurs. à Leide 1718. in 4to.

jam mediocriter maturum esse debere: cur enim alioquin in locum ipsi destinatum eum ferret natura providens, si fini suo respondendo nondum sufficeret? Et sine dubio in eodem hoc felici momento stigmata jam sunt parata atque idonea ad illum excipiendum. Exempla hujusmodi sunt Parietaria officinalis ([c]) et judaica, Cactus opuntia ([d]), Cistus Helianthemum ([e]), Morus ([f]), Pyrus communis ([g]) *, Urtica dioica ([h]) cum ceteris hu-

---

([c]) Vaillant l. c.

([d]) Ibid.

([e]) Ibid.

([f]) Botanical Essays. by Patrick *Blair*. London MDCCXX. 8vo. p. 261. „This i have also observ'd, with much Pleasure, to happen in a Mor„ning to the Mulberry Tree, when the four *Stamina* within each pro„per *Perianthium* of the *Julus*, being crumbled and wrap'd up like a „Screw, as in the *Parietaria*, are extended aud darted forth with inex„pressible Velocity, dispersing the Dust every where, which appears „like so much Smoke all round the Tree about the time of sun Ri„sing, or before nine a Clock."

([g]) Du Hamel. Mem. de l'Acad. Roy. des scienc. An. MDCCXXXII. Paris MDCCXXXV. in 4to. pag. 72. „comme les Sommets s'ouvrent „ordinairement au lever du Soleil par une secousse, il rejaillet dans cet „instant un petit tourbillon de cette poussière qui s'attache à toutes les „parties de la fleur, ce, qu'on peut voir au foyer du Microscope, en „échauffant quelques-unes de ces étamines avec un Verre ardent, pour„vû que ces étamines approchent de leur maturité sans être encore „ouvertes."

* Huc non referri debere, ipsa avtopsia me docuit. K.

([h]) Alſton, vom Geſchl. der Pfl. Neue Edimb. Verſ. und Bemerk. erſt. B. Altenb. 1756. 8. S. 304. „man kann dieſe Neſſel nicht leichte einige „Minuten lang, zumal in jedem der Sommermonate, wenn die Sonne „ſcheinet, beſonders Vormittage, betrachten, ohne viel kleine Staubwölk„chen zu ſehen, die aus den aufberſtenden Kölbchen mit Heftigkeit ge„ſtoßen werden, und ſich bald zerſtreuen und niederſinken."

hujus speciebus, et Kalmiae. Absque dubio etiam plures aliae adhuc plantae, praecipue e Classe Monoeciarum ac Dioeciarum huc referri poterunt. Interea equidem contendere nolo, quod antherarum pulvis talium plantarum non demum in stigmatibus perfectum suum maturitatis gradum assequatur: forsan ad aliquod tempus solis radiis adhuc indiget, forsan etiam libero aere, quo plene maturescat.

§. 18.

Verimilius autem mihi videtur, pulverem antherarum successive tantum exclusum, in comparatione cum illo, multo minorem maturitatis gradum habere: opus est ei, ut per longius tempus solis radiis liberoque aeri exponatur, ad debitum perfectionis gradum assequendum. Et revera quoque perspicitur, naturam cum generationis opere in his plantis non adeo, quam in illis (§. 17.), festinare; verum hîc tempore et opportuna occasione opus esse ad tanti momenti rem rite perficiendam.

§. 19.

Externi characteres maturi antherarum pulveris praeter alios, de quibus in sequentibus plura, sunt 1) magnus pelluciditatis gradus; deinde 2) nitens et quasi oleo oblita superficies, et tandem

** Momentaneam hanc pulveris explosionem, simul ac antherae corniculorum nectariferorum cavo antea infixae, staminibus vel leviter iritatis, vel etiam sua sponte, vi filamentorum elastica inde resiliunt, jam ante multos annos in horto Electorali Schwetzingensi, praesente D. D. Casimiro Medico, primus detexi. K.

tandem 3) levior firmitatis et consistentiae gradus. In grandioribus pulveris speciebus hi characteres jam nudo oculo et tactu cognosci possunt, in minoribus vero necesse est, ut duos primos characteres detecturus, optimo et pellucidis, et obscuris objectis accommodato microscopio utaris. In minimis autem speciebus, quarum supradictos characteres ne ope quidem bonorum microscopiorum facile detexeris, ex aliis signis, de quibus alibi sermo erit, vel et his deficientibus, ex aliis circumstantiis antherarum pulveris maturitatem determinabis.

CON-

CONTINUATIO
DISSERTATIONIS DE PULVERE ANTHERARUM

AUCTORE

I. F. KOEHLREUTER.

Conventui exhibita die 8. Dec. 1 02.

Sectio tertia
de colore Antherarum pulveris.

§ 20.

Omnino verum est, uti jam *Grew* dixit: plurimas species antherarum pulveris flavum aut album colorem habere. Interea non minus certum est, flavas species multo majorem explere, quam albas; praecipue cum fines flavi coloris inter album, jam paululum in flavescentem transientem, et inter intense flavum collocaveris. Ceterum nec parvus numerus albarum existit, et illae species, quae ullo alio colore tinctae atque rariores sunt, respectu earum numeri cum illis minime adhuc sunt comparandae, uti sequentia exempla, quae mihi in disquisitionibus meis absque singulari delectu institutis occucurerunt, evidentes illustrabunt.

§. 21

In omnibus his speciebus notandum est, ipsarum colorem ita determinatum esse, uti nudo oculo sese offerre solet:

sub microscopio enim, pellucidis objectis accommodato interdum plane alio colore apparent; cujus autem, si de naturali antherarum pulveris colore sermo est, nulla ratio est habenda.

§. 22.

Grew generatim dixit: reperiri interdum coeruleum, et *Geoffroy* antherarum pulverem *lini* hujus coloris exemplum statuit. Insuper posterior contendit, antherarum pulveri *Gei flore rubro* esse eundem, qui flori, colorem: cum e contrario *Grew* rubrum antherarum pulverem existere omnino negaverit. Quod ad *Linum*, et africanum majus, et vulgare minus attinet, ipsi mei oculi de pulchro coeruleo colore pulveris eorum me convicerunt; illum autem, quem *Geoffroy* antherarum pulveri *Gei flore rubro* attribuit, plane alium, flavum scilicet deprehendi. Ceterum, cum paucorum mensium tempore et inter mediocrem plantarum numerum, in antherarum pulvere tantas jam variorum colorum, horumque gradationum diversitates detexi, quae ex parte usque ad hoc tempus plane ignotae fuerunt, perquam verosimile est, in futurum in disquirendo magno plantarum numero alias adhuc detectum iri.

§. 23.

Quemadmodum saepe quaedam varietates unius ejusdemque speciei plantarum, modo in hac, modo in illa parte, aut a semetinvicem, aut ab ipsa sua originali naturalique specie colore distinguuntur; ita et hac diversitas etiam in antherarum pulvere interdum apparet: Sic *Tulipae* ex toto rubrae, rubrae etiam vel violaceae albo striatae, habent sulphurei coloris, plane flavae, vel flavo et rubro striatae vero purpureum et aliquantum manifestius in violaceum transeuntem antherarum pulverem.

verem. Cum anno millesimo septingentesimo sexagesimo hujus pulveris paululum in aquae guttulam immergens microscopio expositurus essem; conspexi in meam non mediocrem admirationem, quod omnes isti pulvisculi inter tumendum quasi momento purpuram suam deponentes aquam tingerent. Quo facto pro eo, quem antea habuerant, nunc ex albido flavescentem colorem ostendebant. Tunc etiam istius pulveris portiunculam in spiritum vini, et deinceps quoque in Terebinthinae et amygdalarum oleum immersi; in hisce autem liquoribus, quoad colorem, nullam manifestam mutationem patiebantur pulvisculi. Ad hanc tincturam (quam a substantia pure oleosa, vero semine masculino, et aquae haud commiscibili probe distinguas velim) diligentius disquirendam, ex nonnullis Tuliparum areis optimas antheras colligens, conjeci illas in aqua repletum vitrum cylindricum amplioris aperturae. Aqua colorem non tantum statim ex antherarum pulvere extraxit, sed et brevi tempore ex ipsis antheris, in intense violaceum, et parum in rubicundum vergentem nunc conversa. Solito modo illa percolata, sequentia cum ea feci experimenta: Primum nonnihil illius in cochleari argenteo super carbonum ignem evaporandum curavi; quo facto in cochlearis lateribus, inter evaporandum, pulchrum et perquam subtile pigmentum violaceum, indico valde appropinquans, remansit. Reliquum de aqua tincta commiscui partim cum spiritibus, partim oleo tartari. Illis violaceus aquae color in coccineum, et hoc in prasinum mutabatur. An ex hoc pigmento ejusque usu commodum aliquod fieri posset, haud dijudicatum relinquo; interea tamen putaverim, omnino operae praetium esse, ut plura in hunc finem cum isto instituantur exprimenta. Recentes adhuc antherae *Lilii bulbiferi* eodem modo, si in aquam mittuntur, violaceum colorem praebent. Ipse etiam

anthe-

antherarum pulvis hujus plantae, ejns flavedo primaria purpureis particulis undique scatet, hac in aqua contestim amittit, et flavescit; cum tamen ejus naturalis color, qui ex supradicta mixtione consistit, colori triti croci quodammodo sese appropinquet.

§. 24.

Animadvertes quoque interdum quandam diversitatem in colore antherarum pulveris unius ejusdemque floris. *Géoffroy* exemplum profert *Caryophyllorum agrestium*, et ego ipse in *Cariophyllis hortensibus* non tamen inter antherarum pulverem diversorum florum discrimen inveni, sed et observavi, quod antherarum pulvis, cujus naturalis color griseus seu cinereus esse videtur, in nonnullis antheris unius ejusdemque floris in viridescentem, in aliis contra in albescentem transiret.

§. 25.

Certam adhuc circumstantiam, quae in antherarum pulvere *Lythri salicariae* sese mihi obtulit, paucis verbis attingam: aliquando in campo patente unam harum plantarum desecueram, et illam in conclavi meo in vitro aquae purae frigidaeque pleno reposueram. Prostridie disquisivi et depinxi illius antherarum pulverem, qui, ut ex sequenti indice perspicitur, coloris est sulphurei. Postquam planta nonnullos adhuc dies in eodem statu et loco, ubi soli haud fuit exposita, asservata fuerat, cum ego forte parum antherarum pulveris ab illa sumpturus eram quaedam experimenta, quae antea cum eo institueram, repetiturus: non parum miratus sum, cum viderem, omnium sex longio-

longiorum staminum pulverem in plerisque floribus suum colorem sulphureum, ut existimabam, cum valde pulchro prasino commutasse. Cum nonnihil hujus microscopio admovissem, praeter id, quod colorem suum mutaverat, nullam alias manifestam mutationem in illo animadvertere potui. Ast id, quod casu quodam fortuito accidisse mihi tunc videbatur, sub dio quoque locum habere, hincque ad statum eorum naturalem potius referri debere, postea, saepius repetita observatione, comperi. Antherae adhuc clausae sc. staminum sex breviorum pulchre flavae, longiorum sub eodem statu, e bruno rubicundae sunt. Pulvis illorum post suam excretionem sulphurei, horum prasini s. eleganter viridis coloris est. Posterioris pulvisculi duplo majores, quam prioris; utrisque vero eadem figura oblonga et regularis. An majores ad germen foecundandum prae minoribus magis idonei? an vero utrarumque symbola ad hunc actum necessaria? En singularissimum iu regno vegetabili phaenomenon! Sequuntur exempla:

Albus.

Canna *indica.*
Alpinia *spicata.*
Wulfenia *carinthiaca.*
Hippuris *vulgaris.*
Circaea *lutetiana.*
Veronica *Beccabunga.*
— — *scutellata.*
— — *chamaedrys.*
— — *hederifolia.*

Albus.

Utricularia *vulgaris.*
Lycopus *europaeus.*
Monarda *fistulosa.*
— — *didyma.*
Salvia *verticillata.*
— — *glutinosa.*
— — *sclarea.*
— — *formosa.*
Collinsonia *canadensis.*

Piper

Albus.

Piper *verticillatum.*
Valeriana *Cornu copiae.*
Moraea *irioides.*
Globularia *nudicaulis.*
Dipsacus *fullonum.*
— — *laciniatus.*
Scabiosa *succisa.*
— — *columbaria.*
— — maritima.
— — *stellata.*
— — *atropurpurea.*
Sherardia *arvenſis.*
Asperula *arvensis.*
Plantago *media.*
— — *alpina.*
Trapa *natans.*
Rivina *humilis.*
Heliotropium *peruvianum.*
— — *europaeum.*
Myosotis *scorpioides.*
Lithospermum *arvense.*
Pulmonaria *officinarum.*
Symphytum *officinale.*
Cerinthe *major.*
Borago *officinarum.*

Albus.

Borago *orientalis.*
Lycopsis *vesicaria.*
— — *variegata.*
— — *arvensis.*
Plumbago *zeylanica.*
— — *scandens.*
Convolvulus *arvensis*
— — *sepium.*
— — *hederaceus.*
— — *Nil.*
— — *canariensis.*
— — *tricolor.*
Ipomoea *Quamoclit.*
— — *coccinea.*
Datura *stramonium.*
— — *fastuosa.*
Hyoscyamus *scopolia.*
Nicotiana *paniculata.*
Atropa *Belladonna.*
Solanum *tuberosum,*
— — *Lycopersicum.*
— — *nigrum.*
Ribes *nigrum.*
Lagoecia *Cuminoides.*
Vinca *minor.*

Albus.

Nerium *Oleander.*
Apocynum *androsaemifol.*
— — *cannabinum.*
Sanicula *europaea*
Astrantia *major.*
Tordylium *Anthriscus.*
Caucalis *grandiflora.*
— — *leptophylla.*
Conium *maculatum.*
Athamanta *Oreoselinum.*
Angelica *sylvestris.*
Sium *nodiflorum.*
Oenanthe *fistulosa.*
Phellandrium *aquaticum.*
Cicuta *virosa.*
Aethusa *Cynapium.*
Scandix *odorata.*
— — *Cerefolium.*
— — *Anthriscus.*
Chaerophyllum *sylvestre.*
— — *temulum.*
Pimpinella *saxifraga.*
— — *magna* L. *Mant. alt.*
Apium *graveolens.*
Aegopodium *Podagraria.*

Albus.

Tamarix *germanica.*
Pancratium *illyricum.*
Convallaria *multiflora.*
— — *bifolia.*
Hyacinthus *Muscari.*
Yucca *aloifolia.*
Rumex *Acetosa.*
Petiveria *alliacea.*
Vaccinium. *Myrtillus.*
— — *Vitis idaea.*
Erica *vulgaris.*
Polygonum *amphibium.*
— — *Persicaria.*
— — *orientalis.*
— — *Convolvulus.*
— — *dumetorum.*
Cardiospermum *Halicacabum.*
Elatine *Hydropiper.*
Monotropa *Hypopithys.*
Kalmia *angustifolia*
Rhododendron *ponticum.*
— — *maximum.*
Andtomeda *calyculata.*
Arbutus *Unedo.*
Pyrola *rotundifolia.*

Albus.

Pyrola *secunda.*
Royena *lucida.*
Hydrangea *arborescens.*
Tiarella *cordifolia.*
Saponaria *officinalis.*
— — *Vaccaria.*
Arenaria *serpyllifolia.*
— — *saxatilis.*
Oxalis *Acetosella.*
Agrostemma *Coronaria.*
Lychnis *chalcedonica.*
— — *dioica.*
Forskohlea *tenacissima.*
Phytolacca *decandra.*
Rubus *idaeus.*
— — *odoratus.*
Capparis *spinosa.*
Actaea *racemosa.*
Aconitum *Napellus.*
Annona *triloba.*
Anemone *Hepatica.*
— — *sylvestris.*
Clematis *Viticella.*
— — *Flammula.*
Helleborus *niger.*

Albus.

Teucrium *hircanicum.*
Satureja *hortensis.*
Mentha *aquatica.*
— — *gentilis.*
— — *exigua.*
— — *Pulegium.*
Nepeta *Cataria*
Hyssopus *officinalis*
Glecoma *hederacea.*
Betonica *officinalis.*
Stachys *sylvatica.*
— — *palustris.*
— — *germanica.*
Ballota *nigra.*
— — *alba.*
Marrubium *vulgare.*
Leonurus *Cardiaca.*
Phlomis *tuberosa.*
Moluccella *spinosa.*
Clinopodium *vulgare.*
Origanum *vulgare.*
— — *Majorana.*
Thymus *Serpyllum.*
— — *vulgaris.*
— — *Acinos.*

Albus.

Melissa *officinalis.*
— — *Calamintha.*
Dracocephalum *canariense.*
— — *Moldavica.*
Mélitis *Melissophyllum.*
Ocymum *Basilicum.*
Sçutellaria *galericulata.*
— — *minor.*
Prunella *vulgaris.*
Prasium *majus.*
Rhinanthus *Crista galli.*
Euphrasia *odontites.*
— — *lutea.*
Melampyrum *aruense.*
— — *nemorosum.*
— — *pratense.*
Pedicularis *palustris.*
Chelone *glabra.*
Gesneria s. Cyrilla *pulchella.*
Antirrhinum *Cymbalaria.*
— — *minus.*
Martynia *annua*, s. Proboscidea.
Digitalis *purpurea.*
— — *lutea.*
— — *ambigua* Jacq.

Albus.

Lantana *africana.*
Capraria *biflora.*
Linnaea *borealis.*
Orobanche *major.*
— — *ramosa.*
Mimulus *ringens.*
Vitex *Agnus castus.*
Cochlearia *armoracia.*
Hermannia *hyssopifolia.*
Napaea *hermaphrodita.*
Alcea *rosea.*
Malva *rotundifolia.*
— — *sylvestris.*
Hibiscus *syriacus.*
Fumaria *fungosa.*
Anthyllis *Vulneraria.*
Vicia *sativa*
— — *sepium.*
— — *Faba.*
Coronilla *Emerus.*
— — *varia.*
Scorpiurus *vermiculata.*
Lotus *hirsutus.*
— — *corniculatus.*
Medicago *falcata.*

Albus.

Cichorium *Intybus.*
— — *Endivia.*
Arctium *Lappa.*
— — *Personata.*
Carduus *lanceolatus.*
— — *crispus.*
— — *syriacus.*
Cnicus *cernuus.*
Ageratum *conyzoides.*
— — *altissimum.*
Xeranthenum *annuum.*
Centaurea *moschata*, *α.*
— — *phrygia.*
— — *nigra.*
— — *montana.*
— — *Cyanus.*
— — *Scabioſa.*
— — *Iacea.*
Echinops *ſphaerocephalus.*
Viola *odorata.*
— — *canina.*
Impatiens *noli tangere.*
Serapias *longifolia.*
Arum *Dracunculus.*
Calla *aethiopica.*

Albus.

Urtica *urens.*
Parthenium *Hyſterophorus.*
Acalypha *virginica.*
Populus *tremula.*
— — *nigra.*
Parietaria *officinalis.*
— — *judaica.*
Begonia *obliqua.*

Albidus,

in ſulphureum vergens.

Hippuris *vulgaris.*
Veronica *virginica.*
— — *ſpicata.*
— — *officinalis.*
— — *triphylla.*
— — *verna.*
— — *Anagallis aquat.*
Juſticia *Adhatoda.*
Gratiola *officinalis.*
Verbena *Aubletia.*
— — *officinalis.*
Anthoxanthum *odoratum.*
Valeriana *rubra.*

Valeriana

Albidus,

in sulphureum vergens.

Valeriana *calcitrapa.*
— — *dioica.*
Ixia *crocata.*
Iris *sibirica.*
— *Xiphium.*
— *persica.*
Phalaris *canarienſis.*
Alopecurus *geniculatus.*
Milium *effuſum.*
Agroſtis *ſpica venti.*
Melica *nutans.*
Poa *annua.*
Briza *media.*
Dactylis *glomerata.*
Cynoſurus *criſtatus.*
Feſtuca *elatior.*
Bromus *mollis.*
Avena *elatior.*
Lolium *perenne.*
Secale *cereale.*
Triticum *aeſtivum.*
— — *hybernum.*
— — *repens.*
Scabioſa *alpina.*

Albidus,

in sulphureum vergens.

Aſperula *odorata.*
Plantago *major.*
— — *lanceolata.*
Alchemilla *vulgaris.*
Pulmonaria *ſibirica.*
Lonicera *Diervilla.*
Hyoſcyamus *niger.*
Nicotiana *ruſtica.*
— — *glutinoſa.*
Solanum *Pſeudocapſicum.*
— — *Dulcamara.*
— — *Melongena.*
Lycium *afrum.*
— — *barbarum.*
Evonymus *europaeus.*
Itea *virginica.*
Vinca *major.*
Chenopodium *murale.*
Daucus *Carota.*
Peucedanum *Silaus.*
Heracleum *Sphondylium.*
Liguſticum *Leviſticum.*
Sium *latifolium.*
— *Siſarum.*

Carum

Albidus,

in sulphureum vergens.

Carum *Carvi.*
Pimpinella *Anisum.*
Viburnum *Tinus.*
— — *nudum.*
Parnassia *palustris.*
Linum *austriacum.*
Myosurus *minimus.*
Ornithogalum *nutans.*
Aloë *viscosa.*
Berberis *vulgaris.*
Rumex *crispus.*
— — *scutatus.*
— — *Acetosella.*
Rheum *undulatum.*
Cassia *marilandica.*
Silene *quinquevulnera.*
Crataegus *Aria.*
— — *Oxyacantha.*
Mespilus *canadensis.*
Mesembryanthemum *hispidum.*
— — — *bicolorum.*
— — — *tortuosum.*
Spiraea *opulifolia.*
Delphinium *Consolida.*

Albidus,

in sulphureum vergens.

Delphinium *Ajacis.*
— — *elatum.*
Liriodendron *Tulipifera.*
Magnolia *grandiflora.*
Anemone *vernalis.*
Trollius *europaeus.*
Helleborus *viridis.*
— — *foetidus.*
Teucrium *fruticans.*
Stachys *palustris.*
Euphrasia *officinalis.*
Pedicularis *sylvatica.*
Anthirrhinum *Elatine.*
Usteria *scandens.*
Limosella *aquatica.*
Dentaria *pentaphylla.*
Malva *Alcea.*
Hibiscus *palustris.*
Fumaria *capnoides.*
Lathyrus *sylvestris.*
Robinia *Pseudo-Acacia.*
Coronilla *valentina.*
— — *glauca.*
Trifolium *agrarium.*

Medicago

Albidus,

in ſulphureum vergens.

Medicago *lupulina.*
Serratula *arvenſis.*
Carduus *marianus.*
Cnicus *oleraceus.*
Cynara *Scolymus. β.*
— — *Carduncu'us.*
Carlina *vulgaris.*
Eupatorium *cannabinum.*
Gnaphalium *uliginoſum.*
Viola *tricolor.*
Zea *Mays.*
Urtica *dioica.*
Morus *alba.*
Cupreſſus *ſempervirens.*
Cucurbita *Lagenaria.*
Ruscus *aculeatus.*
Holcus *lanatus.*
Mimosa *ſenſitiva.*
— — *virgata.*

Pallide ſulphureus.

Callitriche *verna.*
Nyctanthes *Sambac.*
Juſticia *hyſſopifolia.*

Pallide ſulphureus.

Valeriana *officinalis.*
— — *Phu.*
— — *Locuſta.*
Scirpus *ſetaceus.*
— — *mucronatus.*
Panicum *ſanguinale.*
Phleum *pratenſe.*
Alopecurus *pratenſis.*
Poa *aquatica.*
Feſtuca *fluitans.*
Avena *ſativa.*
Arundo *Phragmites.*
Hordeum *hexaſtychon.*
Holoſteum *umbellatum.*
Rubia *peregrina.*
Cornus *ſanguinea.*
Aphanes *arvenſis.*
Potamogeton *natans.*
— — *lucens.*
— — *criſpum.*
— — *puſillum.*
Anchusa *officinalis.*
Cynogloſſum *officinale.*
— — *Omphalodes.*
Dodecatheon *Meadia.*

Azalea

Pallide sulphureus.

Azalea *nudiflora.*
Phlox *paniculata.*
Campanula *pyramidalis.*
— — *speculum* ♀.
Lonicera *Caprifolium.*
— — *Periclymenum.*
— — *alpigena.*
Capsicum *annuum.*
Rhamnus *Frangula.*
Ribes *rubrum.*
— *Grossularia.*
Hedera *quinquefolia.*
Achyranthes *aspera.*
Celosia *cristata.*
Beta *vulgaris.*
Chenopodium *rubrum.*
— — *Botrys.*
— — *ambrosioides.*
Ulmus *campestris.*
Gentiana *verna.*
— — *Amarella.*
Bupleurum *ranunculoides.*
Imperatoria *Ostruthium.*
Viburnum *Opulus.*
Sambucus *nigra.*

Pallide sulphureus.

Sambucus *racemosa.*
Alsine *media.*
Amaryllis *Belladonna.*
Allium *Victorialis.*
— — *Schoenoprasum.*
Fritillaria *imperialis.*
Asparagus *capensis.*
Convallaria *majalis.*
Hyacinthus *serotinus.*
Juncus *articulatus.*
— *pilosus.*
— *campestris.*
Triglochin *palustre.*
Epilobium *hirsutum.* α et β.
— — *montanum.*
— — *tetragonum.*
Fuchsia *coccinea.*
Polygonum *divaricatum.*
Rhododendron *ponticum.*
Scleranrhus *annuus.*
— — *perennis.*
Silene *nutans.*
Cotyledon *serrata.*
Cactus *hexagonus.*
— *flagelliformis.*

Prunus

Pallide sulphureus.

Prunus *Padus.*
— *virginiana.*
Sorbus *aucuparia.*
Pyrus *communis.*
Mesembryanthemum *crystallinum.*
— — *filamentosum.*
Spiraea *Filipendula.*
Rubus *fruticosus.*
Calycanthus *floridus.*
Adonis *vernalis.*
Melampyrum *sylvaticum.*
Antirrhinum *Linaria.*
Scrophularia *nodosa.*
Bignonia *Catalpa.*
— — *radicans.*
Browallia *demissa.*
Orobanche *laevis.*
Myagrum *sativum.*
Lepidium *sativum.*
Sisymbrium *Sophia.*
Erysimum *Barbarea.*
— — *Alliaria.*
Hesperis *tristis.*
Turritis *hirsuta.*
— *glabra.*

Pallide sulphureus.

Hermannia *althaeifolia.*
— — *lavendulifolia.*
Fumaria *bulbosa.*
— — *sempervirens.*
— — *officinalis.*
— — *capnoides* fl. alb. H. Gott. p. 301.
Dolichos *Lablab.*
Glycine *Apios.*
Lathyrus *annuus.*
Vicia *Cracca.*
Astragalus *canadensis.*
Psoralea *bituminosa.*
Trifolium *Melilot. offic.* fl. flav.
— — *hybridum.*
Medicago *sativa.*
Artemisia *Absinthium.*
Aster *novi Belgii.*
Lobelia *Cardinalis.*
— — *siphilitica.*
— — *inflata.*
— — *cliffortiana.*
Passiflora *suberosa.*
Aristolochia *clematites.*
Coix *Lacryma Jobi.*

Pallide sulphureus.

Tripsacum *dactyloides.*
Buxus *sempervirens.*
Xanthium *strumarium.*
— — *spinosum.*
Amaranthus *caudatus.*
— — *sanguineus.*
Poterium *Sanguisorba.*
Fagus *Castanea.*
— *sylvatica.*
Carpinus *Betulus.*
Platanus *occidentalis.*
Pinus *sylvestris.*
— *Larix.*
Ricinus *communis.*
Cucumis *Melo.*
— — *sativa.*
Spinacia *oleracea.*
Cannabis *sativa.*
Humulus *Lupulus.*
Cliffortia *ilicifolia.*
Juniperus *communis.*
— — *phoenicea.*
Taxus *baccata.*
Atriplex *hortensis.*
Acer *Pseudo - Platanus.*

Sulphureus.

Boerhavia *repens.*
Ligustrum *vulgare.*
Jasminum *odoratissimum.*
Syringa *vnlgaris.*
— — *persica* β.
Monarda *punctata.*
Salvia *pratensis.*
— *Horminum.*
— *canariensis.*
Valeriana *Sibirica.*
Iris *Pseudacorus.*
Cyperus *flavescens.*
— — *fuscus.*
Scirpus *palustris.*
— — *acicularis.*
— — *lacustris.*
Aira *cespitosa.*
Cephalanthus *occidentalis.*
Asperula *cynanchica.*
Galium *uliginosum.*
— — *sylvaticum.*
— — *Mollugo.*
— — *Aparine.*
Rubia *tinctorum.*
Epimedium *alpinum.*

Cor-

Sulphureus.	*Sulphureus.*
Cornus *mas.*	Chenopodium *Bonus Henricus.*
Primula *veris* α et β.	— — *album.*
— — *Auricula.*	Gentiana *Pnevmonanthe.*
Menyanthes *nymphoides.*	Coriandrum *sativum.*
Hottonia *palustris.*	Anethum *graveolens.*
Lysimachia *vulgaris.*	— — *Foeniculum.*
— — *Ephemerum.*	Viburnum *Lantana.*
— — *quadrifolia.*	Cassine *Maurocenia.*
— — *ciliata.*	Sambucus *Ebulus.*
— — *Nummularia.*	Statice *Armeria.*
— — *arabica.*	— — *Limonium.*
Polemonium *coeruleum.*	— — *sinuata.*
Campanula *Trachelium.*	Crassula *coccinea.*
— — *Medium.*	— — *tetragona.*
Lonicera *sempervirens.*	Narcissus *poëticus.*
Atropa *physaloides.*	— — *Tazetta.*
Rhamnus *catharticus.*	Amaryllis *formosissima.*
— — *Alaternus.*	— — *regina.*
Celastrus *buxifolius.*	— — *Zeylanica.*
Hedera *Helix.*	Allium *multibulbosum.* Jacq.
Vitis *vinifera.*	Tulipa *gesneriana.*
Vinca *rosea.*	Ornithogalum *pyramidale.*
Periploca *africana.*	Anthericum *frutescens.*
Herniaria *glabra.*	— — *alooides.*
— — *hirsuta.*	— — *caliculatum.*

Sulphureus.

Polianthes *tuberosa.*
Hyacinthus *orientalis.*
Aloë *variegata.*
— *disticha.*
— *Uvaria.*
Agave *americana.*
Acorus *Calamus.*
Prinos *verticillatus.*
Peplis *Portula.*
Alisma *Plantago aquat.*
Oenothera *biennis.*
— — *mollissima.*
— — *longiflora.*
Paris *quadrifolia.*
Laurus *nobilis.*
Cercis *Siliquastrum.*
Cassia *Senna.*
—— *planisiliqua.*
Ruta *graveolens.*
Saxifraga *Cotyledon.*
— — *crassifolia.*
— — *Geum.*
— — *tridactylites.*
Cucubalus *Behen.*
Stellaria *aquatica.* Poll. Palat.

Sulphureus.

Cotyledon *Umbilicus* ♀.
Sedum *Telephium.*
— — *Anacampseros.*
— — *acre.*
Cerastium *viscosum.*
— — *arvense.*
Spergula *arvensis.*
Peganum *Harmala.*
Lythrum *Salicaria*: stamin sex brevior.
Reseda *Luteola.*
— — *lutea.*
Euphorbia *Caput medusae.*
Sempervivum *arboreum.*
Cactus *Opuntia.*
— — *Tuna.*
Philadelphus *coronaria.*
Metrosideros *gummifera.*
Punica *Granatum.*
Amygdalus *persica.*
Prunus *sibirica.*
Pyrus *Malus.*
Tetragonia *fruticosa.*
Mesembryanthemum *tenuifolium.*
— — — *acinaciforme.*
— — — *expansum.*

Aizoon

Sulphureus.

Aizoon *canarienſe.*
Spiraea *hypericifolia.*
— — *Ulmaria.*
Roſa *sylveſtris.* Poll. Palat.
Fragaria *veſca.*
Potentilla *recta.*
Geum *urbanum.*
Comarum *paluſtre.*
Nymphaea *lutea.*
— — *alba.*
Tilia *europaea.*
Corchorus *siliquoſus.*
— — *trilocularis.*
Aquilegia *vulgaris.*
— — *canadenſis.*
Nigella *damaſcena.*
— *sativa.*
— *arvenſis.*
— *orientalis.*
Thalictrum *Sibiricum.*
— — *minus.*
Ranunculus *Ficaria.*
— — *bulboſus.*
— — *polyanthemos.*
— — *acris.*

Sulphureus.

Ranunculus *aquatilis.*
Lamium *album.*
Galeopſis *cannabina* Hall. hiſt. n. 269.
— — *Galeobdolon.*
Phlomis *Leonurus.*
Antirrhinum *monſpeſſulanum.*
— — *majus.*
Hemimeris *coccinea.*
Scrophularia *aquatica.*
Lantana *Camara.*
Hebenſtreitia *dentata.*
Melianthus *minor.*
Draba *verna.*
Lepidium *latifolium.*
Thlaſpi *arvenſe.*
— *Burſa paſtoris.*
Cochlearia *officinalis.*
— — *Coronopus.*
Iberis *umbellata.*
— *nudicaulis.*
Lunaria *rediviva.*
Cardamine *pratenſis.*
— — *amara.*
Siſymbrium *amphibium.*
— — *strictiſſimum.*

Eri-

Sulphureus.

Eryſimum *officinale.*
Cheiranthus *eryſimoides.*
— — *annuus.*
Arabis *thaliana.*
Braſſica *Napus.*
— — *Erucaſtrum.*
Sinapis *arvenſis.*
Raphanus *ſativus.*
— — *Raphaniſtrum.*
Iſatis *tinctoria.*
Cleome *viſcoſa.*
Geranium *odoratiſſimum.*
Malachra *capitata.*
Goſſypium *herbaceum.*
— — *barbadenſe.*
Dolichos *lignoſus.*
Cytiſus *ſeſſilifolius.*
Colutea *herbacea.*
Aeſchynomene *americana.*
Indigofera *pſoraloides.*
Trifolium *rubens.*
Abroma *auguſta.*
Hypericum *Aſcyron.*
— — *quadrangulum.*
Tragopogon *Dalechampii.*

Sulphureus.

Scorzonera *tingitana.*
Hyoſeris *minima.*
Artemiſia *Abrotanum.*
— — *vulgaris.*
— — *Dracunculus.*
Erigeron *canadenſe.*
Bellis *perennis.*
Centaurea *benedicta.*
Ophrys *Nidus avis.*
Paſſiflora *foetida.*
— — *coerulea.*
Arum *maculatum.*
Typha *latifolia.*
Sparganium *erectum.*
Carex *muricata.*
— *caneſcens.*
— *acuta.*
— *veſicaria.*
Betula *alba.*
— *Alnus.*
Amaranthus *hypochondriacus.*
Myryophillum *ſpicatum.*
— — — *verticillatum.*
Sagittaria *ſagittifolia.*
Quercus *Robur.*

Ja.

Sulphureus.

Juglans *regia.*
Corylus *Avellana.*
Cucumis *Prophetarum.*
Salix *amygdalina.*
—— *fragilis.*
Viscum *album.*
Myrica *quercifolia.*
Mercurialis *annua.*
Datisca *cannabina.*
Clutia *pulchella.*
Valantia *cruciata.*
Atriplex *patula.*
Acer *rubrum.*
— *campestre.*
Fraxinus *Ornus.*
Ceratonia *Siliqua.*

Flavus.

Jasminum *officinale.*
— — *grandiflorum.*
— — *azoricum.*
— — *fruticans.*
Monarda *didyma.*
Crocus *sativus. β.*
Ixia *chinensis.*
Gladiolus *communis.*
Commelina *africana.*
— — *erecta.*
Galium *verum.*
Crucianella *maritima.*
Sanguisorba *officinalis.*
Ptelea *trifoliata.*
Cuscuta *europaea.*
Cyclamen *europaeum.*
Menyanthes *trifoliata.*
Anagallis *arvensis.*
— — *Monelli.*
Phlox *maculata.*
— *pilosa.*
— *glaberrima.*
Lonicera *tatarica.*
Mirabilis *Jalapa.*
— — *dichotoma.*
— — *longiflora.*
Gomphraena *globosa.*
Gentiana *Centaurium.*
Pastinaca *sativa.*
Rhus *Coriaria.*
— *copallinum.*
— *Toxicodendron.*
Staphylaea *trifoliata.*
Turnera *ulmifolia.*

Basella

Flavus.

Basella *rubra.*
Linum *maritimum.*
— *catharticum.*
Tradescantia *virginiana.*
Haemanthus *puniceus.*
Galanthus *nivalis.*
Crinum *americanum.*
— — *africanum.*
Amaryllis *Atamasco.*
Lilium *candidum.*
Fritillaria *Meleagris.*
Asphodelus *fiſtuloſus.*
Anthericum *ramoſum.*
Hemerocallis *flava.*
— — *fulva.*
Colchicum *autumnale.*
Disandra *proſtrata.*
Tropaeolum *minus.*
— — *majus.*
Daphne *Mezereum.*
Stellera *Paſſerina.*
Polygonum *aviculare.*
Butomus *umbellatus.*
Fagonia *cretica.*
Tribulus *terreſtris.*

Flavus.

Saxifraga *granulata.*
Stellaria *Holoſteum.*
— — *graminea.*
Arenaria *rubra.*
Malpighia *urens.*
Sedum *reflexum.*
— *rupeſtre.*
Portulaca *oleracea.*
— — *piloſa.*
— — *Anacampſeros.*
Euphorbia *officinarum.*
— — *exigua.*
— — *helioſcopia.*
— — *platyphylla.*
— — *Eſula.*
Sempervivum *arachnoideum.*
Amygdalus *nana.*
Prunus *Ceraſus.*
— *inſititia.*
— *ſpinoſa.*
Rosa *punicea.* Mill.
— *canina.*
Potentilla *fruticoſa.*
— — *anſerina.*
— — *argentea.*

Po-

Flavus.

Potentilla *verna.*
— — *reptans.*
Tormentilla *erecta.*
Geum *rivale.*
Sanguinaria *canadensis.*
Chelidonium *majus.*
Argemone *mexicana.*
Tilia *americana.*
Thea *Bohea.*
Cistus *populifolius.*
— *laurifolius.*
— *albidus.*
— *Helianthemum.*
— *apenninus.*
Ranunculus *Flammula.*
— — *lingua.*
— — *sceleratus.*
— — *arvensis.*
Caltha *palustris.*
Ajuga *pyramidalis.*
— *reptans.*
Lavandula *Spica.*
Galeopsis *Ladanum.*
— — *Tetrahit.*
Antirrhinum *Orontium.*

Flavus.

Acanthus *mollis.*
Geranium *fulgidum.*
— — *triste.*
Pentapetes *phoenicea.*
Sida *spinosa.*
Hibiscus *Moscheutos.*
— — *pentacarpos.*
— — *Trionum.*
Ononis *spinosa. β.*
Cytisus *Laburnum.*
Hedysarum *coronarium.*
Citrus *medica.*
— *Aurantium.*
Hypericum *balearicum.*
Ascyrum *hypericoides.*
Tragopogon *pratense.*
Scorzonera *hispanica.*
Picris *hieracioides.*
Sonchus *palustris.*
— — *arvensis.*
— — *oleraceus.*
Lactuca *sativa.*
Prenanthes *muralis.*
Leontodon *Taraxacum.*
— — *autumnale.*

Flavus.

Leontodon *hirtum.*
— — *hispidum.*
Hieracium *Piloſella.*
— — *dubium.*
— — *aurantiacum.*
— — *murorum.*
— — *umbellatum.*
Crepis *barbata.*
— — *foetida.*
— — *tectorum.*
— — *biennis.*
Hypochaeris *glabra.*
— — *radicata.*
Lapsana *communis.*
Carthamus *tinctorius.*
Bidens *tripartita.*
— — *cernua.*
Chrysocoma *Coma aurea.*
— — *Linoſyris.*
Tanacetum *vulgare.*
Artemisia *campeſtris.*
Gnaphalium *Stoechas.*
— — *orientale.*
— — *arenarium.*
— — *luteo-album.*

Flavus.

Gnaphalium *margaritaceum.*
— — *dioicum.*
— — *ſylvaticum.*
Conyza *ſquarroſa.*
Erigeron *acre.*
Tussilago *Farfara.*
Senecio *vulgaris.*
— — *ſylvaticus.*
— — *elegans.*
— — *erucifolius.*
— — *Jacobaea.*
— — *Saracenicus.*
Aster *Amellus.*
— *chinenſis.*
Solidago *canadenſis.*
— — *virga aurea.*
Inula *Helenium.*
— *dyſenterica.*
— *Pulicaria.*
— *hirta.*
Cineraria *maritima.*
— — *amelloides.*
Doronicum *Pardalianches.*
Tagetes *patula.*
Chrysanthemum *corymbiferum.*

Chry-

Flavus.

Chryſanthemum *Leucanthemum.*
— — — *coronarium.*
Matricaria *Parthenium.*
— — *Chamomilla.*
Anthemis *nobilis.*
— — *arvenſis.*
— — *Cotula.*
— — *tinctoria.*
Achillea *Ageratum.*
— — *Ptarmica.*
— — *Millefolium.*
Zinnia *multiflora.*
Tetragonotheca *helianthoides.*
Buphthalmum *maritimum.*
Helianthus *annuus.*
— — *multiflorus.*
— — *tuberoſus.*
— — *altiſſimus.*
— — *giganteus.*
Rudbeckia *hirta.*
— — *purpurea.*
Coreopſis *verticillata.*
— — *Bidens.*
Centaurea *moſchata.* β.
Polymnia *Uvedalia.*

Flavus.

Calendula *officinalis.*
— — *pluvialis.*
Arctotis *aſpera.*
Oſteoſpermum *moniliferum.*
Othonna *coronopifolia.*
Filago *germanica.*
— *montana.*
— *arvenſis.*
Siſyrinchium *Bermudiana.*
Paſſiflora *incarnata.*
Grewia *occidentalis.*
Momordica *Elaterium.*
Cucurbita *Pepo.*
— — *Citrullus.*
Bryonia *alba.*
Hydrocharis *Morſus ranae.*
Schinus *Molle.*
Veratrum *album.*
— — *nigrum.*
Mimoſa *nilotica.*
Chamaerops *humilis.*

Luteus.

Aſparagus *officinalis.*
Aloë *perfoliata.*

Luteus.

Agrimonia *Eupatorium.*
Reseda *Phyteuma.*
— — *odorata.*
Chelidonium *corniculatum.*
Teucrium *Scorodonia.*
Geranium *lobatum.*
— — *malacoides.*
Spartium *scoparium.*
Genista *sagittalis.*
Lupinus *albus.*
— — *luteus.*
Pisum *sativum.*
Lathyrus *odoratus.*
— — *tuberosus.*
— — *pratensis.*
— — *latifolius.*
Eruum *hirsutum.*
Robinia *Caragana.*
Colutea *arborescens.*
Galega *officinalis.*
Astragalus *glycyphyllos.*
Trifolium *pratense.*
— — *arvense.*

Croceus.

Lilium *bulbiferum.*
— — *Martagon.*

Aurantiacus.

Antholyza *Cunonia.*
Iris *graminea.*
Verbascum *Thapsus.*
— — *Lychnitis.*
— — *phlomoïdes.*
— — *Blattaria.*
Cistus *incanus.*
Zygophyllum *Fabago.*
Lamium *purpureum.*
— — *amplexicaule.*
Amorpha *fruticosa.*
Crotalaria *capensis.*
Calendula *hybrida.*

Flavescenti-rubicundus.

Geranium *inquinans.*
— — *Zonale.*
— — *vitifolium.*
— — *cicutarium.*
Momordica *Charantia.*

Bruno-Flavescens.

Adonis *autumnalis.*

Carneus s. roseus.

Scabiosa *arvensis.*
Knautia *orientalis.*

Teu-

Carneus s. roseus.

Teucrium *Chamaedrys.*
Lavatera *trimestris.* fl. rubr.
Jasione *montana.*

Lateritius.

Aloë *perfoliata.* δ.
Geranium *papilionaceum.*
— — *capitatum.*
Lathyrus *sativus.*

Miniaceus.

Aesculus *Hippocastanum.*
— — *Pavia.*
Heuchera *americana.*

Cinnabarinus.

Lilium *chalcedonicum.*

Brunus in carmesinum vergens.

Cleome *violacea.*

Brunus in violaceum vergens.

Hibiscus *Malvaviscus.*

Bruno-rubescens.

Adonis *aestivalis.*
Volkameria *inermis.*

Rufo-nigricans.

Althaea *officinal.* β.
— — *cannabina.*

Cinereus.

Campanula *patula.*
— — *Rapunculus.*
— — *rapunculoides.*
Gypsophila *muralis.*
Dianthus *barbatus.*
— — *Caryophyllus.*
— — *superbus.*
— — *plumarius.*
— — *pungens.* L. Mant. II.
— — *ferrugineus.* L. Mant. II.
Silene *noctiflora.*
— *Armeria.*
Lychnis *Flos cuculi.*
Cerastium *aquaticum.*
Rubus *caesius.*
Papaver *somniferum.*
Geranium *molle.*
— — *sanguineum.*
Malva *peruviana.*
Phaseolus *vulgaris.*

Ci-

Cinereo-coerulescens.

Echium *vulgare.*
— — *creticum.*
Trachelium *coeruleum.*
Dianthus *prolifer.*
— — *carthusianorum.*
Geranium *dissectum.*
Papaver *Argemone.*
Carduus *nutans.*
— — *acanthoides.*
Onopordon *acanthium.*
— — *arabicum.*

Cinereo-viridescens.

Allium *nutans.*
Agrostemma *Githago.*
Geranium *columbinum.*

Coeruleus.

Lopezia *hirsuta.*
— — *glabra.*
Linum *usitatissimum.*
Ruscus *Hypoglossum.*

Pallide violaceus.

Convolvulus *althaeoides.*
Alstroemeria *pelegrina.*
Dianthus *Armeria.*
Urena *lobata.*

Purpureus.

Phyteuma *orbicularis.*
— — *spicata.*

Coeruleo-nigricans.

Papaver *orientale.*

Pallide viridis.

Epilobium *angustifolium.*
— — *latifolium.*

Viridi-coeruleus.

Nolana *prostrata.*

Viridis.

Dictamnus *albus.*
Lythrum *Salicaria.* (Staminum sex longior.)
Papaver *dubium.*
— — *rhoeas.*

Errata: p. 365. linea 5 ab infra, loco: obſervari l. obſervavi.
— p. 369. §. 18. loco verimilius l. verisimilius.
— p. 371. §. 20. linea 4; loco: pler l. plere.
— p. 372. §. 22. linea penultima: ,mile l. simile.
— p. 374. §. 24. linea 4: ri l. ry.

DE

DE ANALOGIA AVES INTER ET MAMMALIA.

AUCTORE

N. OZERETSKOVSKY.

Conventui exhibita et praelecta die 17 Febr. 1802.

In Linnaeano systemate naturae aves secundam constituunt classem, quae in sex dividitur ordines. Inter characteres horum ordinum recensetur etiam genus vitae avium, quarum aliae sunt carnivorae, aliae phytiphagae; pleraeque junguntur venere monogama, pauciores autem polygama; quod ipsis commune est cum animalibus quadrupedibus. Hinc beatus systematis illius auctor quemlibet avium ordinem fecit mammalibus analogum; accipitres nempe analogos dixit feris, picas primatibus, anseres belluis, grallas brutis, gallinas pecoribus, passeres denique gliribus. Cum vero analogia haec in quibusdam avium ordinibus magis sit manifesta quam in aliis; idcirco eam exponere atque exemplis illustrare non superfluum fore duxi.

Ad accipitres, qui primum constituunt ordinem, referuntur vultures, falcones, striges et lanii. Aves hae comparantur cum feris, ad quas pertinent phocae, canes, feles, viverrae, mustelae, ursi, didelphides, talpae, sorices et erinacei. Animalia haec cum dictis avibus rapacitate convenire notissimum est. Leo aeque saevit in alia animalia ac aquila in aves, imo in ipsa quadrupeda, quae ab illa defendi non possunt. Diver-

sae-

sae species canum, uti hyaena, crocuta, avreus, noctu praedantur; idem faciunt striges, quae interdiu latitant. Omnis itaque analogia inter feras et accipitres videtur consistere in victu; differunt autem inter se illo insigni charactere, qui unicuique ordini avium tribuitur, nimirum vita monogama aut Polygama; accipitres enim omnes sunt monogami, ferae autem ut plurimum vaga junguntur venere, praeter unicum forstan genus erinacei, in quo mas et femina castam agunt vitam, et soboli suae educandae, unitis viribus, vigiles impendunt curas.

Picae, quae faciunt secundum avium ordinem, traduntur esse analogae primatibus. Analogia hujus ordinis multo minus perspicua est quam antecedentis; nihilominus, si victum excipiamus, qui consistit e quisquiliis, monogamia harum avium et sollicitudo maris, qui incubantem alit feminam, non laevem ostendunt convenientiam earum cum primatibus, ex quibus simiae quaedam, lemur et vespertiliones, monogamam ducunt vitam, et mas uni feminae junctus illam sibi reddit fidelem, filiosque et filias suas simul cum ea educat et servat. Ad hunc avium ordinem imprimis spectant psittaci, qui docilitate et garrulitate simiis adeo sunt similes, ut merito simiae inter aves nominentur.

Tertii ordinis aves, anseres dicti, censentur analogi Belluis, equo nimirum, hippopotamo, tapir et sui, propterea quod anseres ut plurimum polygamiam exercent, sicuti illa quadrupeda, et degunt in aquis, quemadmodum hippopotamus et tapir, vescuntur quoque vegetabilibus, nec non piscibus aliisque aquei elementi incolis, uti faciunt sues, quae nec animalibus nec vegetabilibus parcunt.

Quartum ordinem constituunt varia Grallarum genera, quibus pedes vadantes femoribus seminudis, quae victitant animal-

malculis in palludibus, nidificant potissimum in terra, et variis junguntur nuptiis. Hae aves, ad quas referuntur ardeae, scolopaces, tringae et multa alia genera, dicuntur Linnaeo analogae Brutis, quorum praecipua, uti Rhinoceros et Elephas, constanter habitant in locis paludosis, et omnia fere reliqua, nempe Bradypi, Myrmecophagae et Manes, lente incedunt, consimilem quoque victum habent, dum alia vescuntur formicis, vermibus, lacertis, uti Manes, alia piscibus, insectis, lumbricis, carnibus, radicibusque, uti Dasypi. Omnis itaque grallarum cum brutis analogia consistit in lento incessu, in victu, quarundam etiam in loco, ubi potissimum habitant.

Gallinae, penultimi seu quinti ordinis aves, conferuntur cum pecoribus, cum quibus vel maxime in eo convenire videntur, quod cibum deglutitum in ingluvie macerant, quemadmodum pecora, uti, bos, ovis, capra et alia quatuor ventriculis instructa, in primo ventriculo ingesta macerant alimenta, quae denuo in os revocant, ut remasticata deglutiant; sed multo major adhuc analogia consistit in eo, quod tam pecora, quam istae aves, furiosam exercent polygamiam et bella gerunt pro uxoribus. Exemplo erunt cervus tarandus et phasianus gallus, ambo animalia bellicosa, adeo ut vitae suae non parcant, quando pruritus molestare illa incepit.

Passeres denique, sextum et ultimum ordinem constituentes, conveniunt cum gliribus, eo quod et nidos artificiose conficiant, uti glires antra seu cuniculos, et monogamiam observent. Similis forte analogia datur etiam inter alias animalium classes; id quod alio praestabo tempore.

EXPERIMENTA QUAEDAM,

NOVUM SALIS SEDATIVI ACIDUM SPECTANTIA, INSTITUTA

A

LAURENTIO de CRELL.

Conventui exhibita die 16 Jun 1802.

Quem inter salia, ad varios usus, praeprimis chemico-technicos maxime idonea esse omnes consentiunt, borax ille, non nisi e terra Thibetina et Persia, nonnumquam e Tranquebaria ad nos adfertur, tum quoad modum generationis, tum quoad compositionem, imprimis partis acidae, id est salis sedativi, ratione habita, plane incognitus nobis fuit. Sal illud sedativum quidem in nonnullis stagnis calidis nec non in petroleo, immo etiam cum terris alcalinis conjunctum in monte calcario Luneburgensi repertum est. Verum haec omnia remota tantum leviaque indicaverunt vestigia, quae ad probabilem quamdam, de ejus ortu ex praegressa decompositione, conjecturam ducere nos possent; et qui inde colligi poterant modi sal nostrum artis ope componendi, omni caruerunt successu *). Experimenta, ejus analysin spectantia, multo adhuc pauciora, nec magis prospera fuerunt. Absterriti sunt viri docti, ut opinor, experiendo, sal se-

*) Vide: Chem. Annal. 1799. B. 2. pag. 320. seq.

sedativum in igne vehementiori liquefactum, nullo alio modo, multis horis elapsis, mutatum esse, et repetita in aqua solutione de novo unum idemque apparuisse. Interea argumenta pro ejus origine, ex nova resolutarum partium organicarum compositione, satis gravia nobis videbantur, ut ejus analysin tentarem, eumque in finem acido, intima corporum recludenti; atque digestione leni diuturnaque uterer; sperans, hac ratione unam ex partibus dissimilibus, cum novo acido potius, quam cum parte priori costitutiva, se conjuncturum et hoc modo secernendum esse.

Partes sex supra magnesium destillati acidi muriatici, parti uni salis sedativi affusas, calore leni a 150° ad 240°, retorta evocavi, easque semper de integro ad sal nostrum refudi. Tertia vel quarta destillatione repetita, quod antea album erat, aliquot maculis flavis, dein obscurioribus et fuscis, tandem nigricantibus conspersum apparebat. Aqua resolvens candorem quidem maxima ex parte restituere videbatur; sed cum post digestionem per quinquaginta et quatuor dies continuatam, et post tredecim destillationes igne vehementiori (inter vapores copiosos, odore acidi pinguedines imbutos), omne fluidum penitus depellerem; hocque depulso, massam iterum aquae ope soluerem, materia tamen nigra, eaque spongiosa et carboni similis, in filtro remansit. Salis lixivium percolatum, evaporatum, iterum vehementi igni expositum, eademque tractatum ratione, rursus nigrescebat; et praegressa solutione in aqua, residuum spongiosum nigrum suppeditabat, quae omnia semper rursus apparebant, lixivio evaporato, eodemque modo tractato. Quae vero reliquiae spongiosae collectae, edulcoratae atque siccatae (si terrae talcosae aliquantulum exceperis, quod acidum

salis, alias in massam carbonaceam non manifesto agens, extraxerat) ponderis erat granorum triginta circiter, ex quavis semuncia salis sedativi adhibiti; eaeque in omnibus experimentis institutis, quin imo cum nitro repetitis, prorsus habebant, ut carbo *).

Prima haec experimenta igitur partem alteram, sal sedativum constituentem, exhibuerunt; materiam nempe in carbonem mutandam; phaenomenon notatu dignissimum, cum alias quaeque, ad conversionem in carbonem apta, substantia leni ignis gradu hac mutatione afficiatur; e. g. gummi, tartarus, saccharum; quae omnia extemplo etiam cum nitro detonant. Sàl vero sedativum ignis vehementiae per aliquot horas expositum, nullum in carbonem mutationis, nec detonationis vel combustionis offert indicium. Quae vis materiam illam tam valide tuetur contra conversionem in carbonem et contra impetum praegravis vehementiae, ut mitioribus tamen reagentibus cedat? Quas quidem ut resolverem quaestiones, simulque alias adhuc nostri salis detegerem partes, animum induxi, ut experimenta sequentia instituerem.

Quum e praegressis disquisitionibus constaret, carbonem in sale sedativo, tanquam partem, proxime vel remotius constitutivum exsistere, operam dedi, ut quovis modo singularis hujus phaenomeni rationem investigarem. Praecipue cum universa massa carbonis in nostro sale contenti, neutiquam una vel

*) Plenior enarratio horum experimentorum exstat in chem. Annal. l. s. c.

vel derepente, sed modo paulatim nonnihil per unamquamque manipulationem secerneretur *), conabar discere, num certa quaedam firmaque proportio, ratione quantitatis ejusdem constitui posset, quae vel e quantitate acidi muriatici supra magnesium destillati, vel e vehementia feruidioris destillationis dependeret.

Experimentum 1.

Primum igitur conabar experiri, quasnam mutationes sal nostrum subiturum sit, simulatque ingens vis acidi muriatici praeceps illud adficeret. Hunc in finem semunciam ejus sedecim unciis acidi muriatici nostri perfudi et more consueto, e supra citata commentatione noto, licet identidem leniter coquendo, denique ad siccitatem usque destillavi. Vel hic in fundo salis crebrae particulae fuscae apparuerunt. Igne flagrantiore phaenomena ibidem jam descripta exsistebant, albescens sublimatum, tunc habitus e nigro fuscus, vehemens ebullitio; denique post solutam percolatamque massam residua faex carbonacea. Tunc adgressus sum experiendo perscrutari, numquid repetitarum aliquoties destillationum numerus notabilia et constantia discrimina effecturus sit?

Experimentum 2 — 9.

Unciae salis nostri octantem, retortae vitreae minori, uncia acidi muriatici nostri (pro mensura) repleti, inieci. In alia retorta A. septem reliquae drachmae salis nostri, septem un-

*) Vid. exper. 24. 26. 30. l. c.

unciis acidi muriatici (pro mensura) perfundebantur. Utraque retorta simul deponebatur in balneum arenarium ejusdem caloris, et destillabatur leniter ad apparentem usque siccitatem. Haec utrique prima fuit destillatio. Minor retorta (Nr. 1.) removebatur; fluidum a majore A destillatum refundebatur, et componebatur in lenem calorem, donec omne sal solveretur. Fluidum tunc succutiebatur, et mensura uncialis eo replebatur; idem in novam retortam minorem refusus, una cum altera A simul destillationi (utrique secundae) usque ad siccitatem exponebatur. Tunc retorta Nr. 2. seponebatur. Humor ab A destillatus refundebatur, et usque ad solutionem salis calefactus est; porro quantum mensura uncialis eo repleta continuit, inde depromtum, ut in retortam aliquam (Nr. 3.) effunderetur, ex qua simul cum A humor destillabatur, et residuum (Nr. 3) seponebatur. Haec omnia rursus quater denuo repetita sunt. Ultima in A remanens uncia postmodo parvae retortae indita quoque destillabatur.

Experimentum 10.

Animus mihi erat, omnes has octo retortas uni eidemque vehementi igni exponere, quo experirer, num post solutionem residuum carbonaceum tanto ingentius sit pro eo ac destillationem quaternam, quinam etc., perpessum fuerit. Phaenomena erant eadem, quae jam toties in commentatione priore enumerata sunt. Crebrum sublimatum albescens, qua maximam partem cum ebullitione refluxit. Vehemens haec effervescentia praecipue oriebatur per residuum nigro-fuscum in fundo retortae, ubi passim ex una parte, ingentes viscidae bullae per aliquod tempus extumescebant. Hac vero demum penitus pacata, confestim ex altera parte talis effervescentia gliscebat, donec omnia denique omnino adquiescerent. Retortae, quae semper, quoties sal

sal solutum refriguit, rimas egerunt, ex ea parte, ubi ebullitio vehementissima exstiterat, valde erosae reperiebantur: et sub massa salsa, e fundo retortae avulsa, partim lamellae vel fragmenta libera vitri jacebant; partim adeo videbatur aliquantum in sal transiisse. Hoc adjunctum arduo impedimento erat, quo minus justa moles et genuinum pondus residuae faeces carbonaceae ad unguem determinaretur. Nempe quando sal justo diutius praeter necessitatem fusionem continuare cogebatur, (id quod, cum cessatio passim excitatae effervescentiae tantopere ambigua est, curate praefiniri nequit) semper major vitreae massae copia tabescens, sali admiscebatur. Rursus, ubi non integrum sal ebullivit, neque omnis in carbonem constanda materia inde discreta est. Probabiliter enim isthaec discretio maxime fit effervescentiam. Quae cum ita sint, nec pondus proportione curate constitui potest.

Haec experimenta aeque ac primum illud, me docuerunt, sine ingente multitudine factorum curate perpensorum, unde tamen solummodo in genere medius quidam numerus evalet, aegre fieri posse, ut hisce manipulationibus firma ratio efficiatur; item satagendum esse, quantitatem materiae carbonaceae e certo pondere salis nanciscendae summatim constituere; neque ineundum esse stabilis alicujus progressionis ratiocinium.

Experimentum II.

Cum isthoc modo in eo versarer, ut massam salis, quam secundum experimentum 10. edulcorando et crystallisando eram adeptus, ulteriori elaboratione exererem per recens affusum acidum muriaticum, eo temporis momento acidum illud me deficere coe-

coepit, quo rursus alteram portionem salis nostri, quemadmodum reliquas, tractarem. Interim, quia adhuc in fornace locus vacabat, retorta cum sale, licet sine acido muriatico, deponebatur, atque haec ultima eodem modo tractabatur, quo reliquae, quia animus mihi fuit, experiri: num praegressa decompositio nostri salis, continuata resolutione in partes constitutivas adhuc, sine recens adhibito menstruo, efficaciam suam sit proditura?

Eventus hic fuit, ut sal sine acido muriatico ferme protinus pariter haberet, atque aliae portiones eo instructae, ut sale, quando ignis vehementia perfunctum erat, in aqua resoluto, quantitas materiae carbonaceae in colo papyraceo exstaret, parum cedens illi, quam reliqua experimenta procreaverant.

Experimentum 12.

Liquor ille (de quo in experimento 11. sermo fuit.) inspissatus, in crystallos redactus, et iterum sine acido muriatico, vero ceteroquin eodem modo tractabatur. Eventus modo descripto par exstitit; nempe sal liquefactum et postea rursus solutum, percolatum, exhibuit iterum residuam faecem carbonaceam, nigrescentem. Inde nimirum ex analogia orta enascebatur curiositas, ut sciscitarer; utrum haec species proventus carbonacei solummodo deberetur modo dictae manipulationi, an vero jam ipsi salis hujus naturae; ergo quomodo illud sal merum et penitus purum, simpliciter igni expositum, habiturum sit.

Experimentum 13 — 17.

Quo velitatione tentaminis praeluderem, drachmam recentis salis crucibulo porcellaneo indidi. Donec ignis leniter glis-

gliscebat, sal vapore, qui (quantum e lamina crucibulo imposita, ipsum aliquatenus excipiente, colligere licuit,) aquosus videbatur, principio in grumas conglomerabatur, tunc primum juxta marginem, mox medio propius, denique omnino dilute infuscabatur, perpetuo durante vapore, qui flores albos ad laminam sublimabat. Continuato igne, ebullitio (dum color identidem austerior evaderet, nidorque peculiaris, tamquam adustae pinguedinis vel cornu suboleret) paullatim increbescere. Quod quum aliquantum temporis duravisset, neque ad ignem eundem bullae amplius intumescerent, calefacere desii. Postquam crucibulum refrixerat, massa ex fusco nigrescebat. Quando parumper aquam destillatam affunderes, extemplo superficies ex griseo albescere coeperat; post uberiorem aquam eadem alba apparuit, et placenta a crucibuli fundo disjuncta est. Sub crusta alba color subfuscus perseverabat; juxta fragmina vitrea erat. Ubi affatim ingereres aquam; massa fere penitus solubilis evasit, verum in fundo faex spongiosa, nigrida remansit; quae quamvis aliquanto crebriore latice fervidissimo affuso, neutiquam solvebatur; filtro impositum ibidem remansit, nec crebro repetitis edulcorationibus mutabatur. Lixivium, quod transierat, inspissatum exhibuit sal albidum (verum tamen non sub solita forma lamellarum argento micantium) cujus pondus aequabat 44 grana.

Si placenta nonnumquam crucibulo minore firmitate adhaerescebat, ita ut majora minorave frustra inde divellere liceret; ferme opacam referebat scoriam, modo prope margine pellucidiorem, circa fragmina vero prorsus quasi vitream. Probabiliter vehementior ignis molem istam aliquanto similiorem vitro reddidisset, eique pelluciditatem esset largitus, eoque facto negotia compendi facere licuisset. Sed hoc propterea facere nolui,

 quod

quod vererer, ne crucibulo adroso, recens ebullitio hybrida particularum alienarum admixtione adulteraret sal: quod procul dubio plus perdiderat, quam pro salis elixando et rursus inspissando acquisiti pondere videbatur, quia denuo ex solutione aquam combiberat.

Ideoque non poteram facere, quin ex his miraculis insolentem conjecturam adriperem, sal sedativum, simpliciter igne tractatum, aliquatenus comburi. Experimentum hoc praeliminare fecit, ut optarem curatiorem explorationem in vasis opertis, quoniam in apertis ingens portio sublimati avolabat, quin detrimentum illud ablatarum partium instaurabatur insuper, quoties particulae aquosae denuo ex aere in sal nude expositum colligebantur. Hinc vero sequebatur, ut sic nullo modo genuina quantis partium sal nostrum constantium ex talibus experimentis erui posset. Sed circa haec vasa operienda plures mihi scrupuli injiciebantur, immo nec leves difficultates subortae sunt.

Experimentum 18.

Semunciam salis sedativi in nova retorta cum recipulo in balneo arenario igne exposui. Congrumabatur sal, dum guttae in excipulum stillabant. Flavescebat circa margines. Fornici et collo retortae crebri flores adhaerescebant. Universa massa e flavo infuscabatur, tum ingentibus bullis effervens intumuit. Quae cum cessarent: equidem calefacere desii. In excipulo latex drachmam et quod excurrit, aequabat. In fundo massa confluens placentam subnigrescentem fuscam formaverat. Equidem carpebam flores qua licuit, simpliciter vel aqua leniter conspersos. Tum placentam exploravi, non adeo penitus liquefactam, sed in fragmine me-

ram

ram vitri speciem prae se ferentem. In aqua soluta et cocta est; sed in fundo et postea in filtro faex carbonacea remansit, cujus pondus erat granorum sex.

Quae cum ita sint, sal sedativum merum, per se et simpliciter, vel in occlusis vasis decomponitur. Equidem vero hanc decompositionem hoc modo parum persequi volebam, ideo, quod videretur vas vitreum calorem, quem hoc negotium absolvendum postremo flagitaret, omnino non toleraturum: vel saltem partem aliquam vitri a sale solutum atque in ejus massam susceptum iri. Sed arduum erat, alium aparatum comminisci, quia difficultates undique apparebant. Vasa figulina et metallica jam opacitatis caussa non patiebantur mutationis profectus observari; quod tamen singularis indoles materiae adhuc parum cognitae, voto commendabat. Quid? quod tunc non licebat definiri, quando negotium maturandum veniret. Praeterea verendum erat, ne retortae hassiacae partem aliquam laticis absorberent, ipsasque pariter ac porcellaneae a sale adroderentur. Ultimum incommodum etiam praeter fusibilitatem plerisque metallis minabatur. Denique autumabam, me certius voto damnatum iri, partim dispertiendo operationes, partim ope sequentis apparatus.

Experimentum 19.

Novam retortam, sesquiuncia salis sedativi recentis impletam, balneo arenae admovi, eamque leni calore, destillationi idoneo, fovere adgressus sum. Primo die nulla notabilis mutatio apparuit, nisi quod non nihil aquosi liquoris destillando in excipulum transierit. Secundo die massa parumper subsedit, et

denuo aliquantum aquae transiit. Tertio die e flavo infuscari massa coeperat, praesertim juxta latio, vehementiori igne expositum; et crebri flores sublimabantur. Die quarto universa massa infuscabatur, crevit sublimatorum florum multitudo, quae parum aberat, quin retortae collum obstrueret. Circa vesperam retorta rimam egit. Postquam vasa disjunxeram, in excipulo reperi tres drachmas aquae; leviter spirantis nidorem illi, qui acido pinguedinis peculiaris est, similem. In fundo retortae reperiebatur massa nigra α: proxime supra illam species orbis β, orti e floribus pridem sublimatis, qui vi fervoris coacti, subsederant in solidiorem massam tantum non vitream, nigrescentibus punctis interspersum ita, ut graniti, fatiscendo dilabidi, speciem referret. Supra orbem illum erant flores γ adhuc intemeratae pulchritudinis, qui ea, qua par erat, sollertia collecti, duas drachmas et triginta sex grana pondere aequabant.

Massae β. subvitreae pondus erat semuncia et grana viginti octo: massa vitrea in fundo α. a vitro retortae facile separabilis, in utraque cum superiore tum inferiore superficie eundem colorem e griseo nigrum servabat. Diffracta exhibuit alternas struices nigrescentes et albas, ferme instar sardonichis. Pondus ejus erat drachma cum duobus scrupulis.

Experimentum 20.

Tres massae solidae ($\alpha \beta \gamma$), experimento 19. procreatae, novae retortae inditae denuo destillabantur. Quo facto altera drachma aquae supra descriptae similis, ope caloris inde separata est. Adquisiti flores grana 37, massa semifusa scrupulum unum, sed in placentam fusa 6 drachmas et duos scrupulos

los aequabat. Postrema haec ex viridi nigrescebat, praesertim juxta margines subpellucidos; versus medium discum exstabant maculae albidae, encaustum mentientis.

Experimentum 21.

Massa semifusa una cum floribus (ex experimento 20) destillabatur. Iterum aqua octo grana pondere et flores novem grana pondere effecti. Subsidens massa aequabat 38 grana.

Summa aquosi laticis ex sesquiuncia salis sedativi primo obtutu sicci, secundum experimenta 19 20 et 21 adquisiti, aequabat pondere semunciam et octo grana. Liquor hic utut debili odore et sapore, prodit adhuc ibi latens acidum [illegible], curatiorem explorationem flagitans. Verum tamen, ne filum commentationis circa massam residuam vitrificatam (exper. 20 et 21) interrumpamus; agite differamus adhuc paulisper enarrationem tentaminum illorum circa isthunc laticem.

Experimentum 22.

Indidi ergo hanc massam vitriformem in crucibulum argenteum e luna cornea reducta fabricatum, unciarum quatuor aquae capacem. Cui quidem adaptatus erat alembicus vitreus coecus; quod rostrum in igne foret noxium operae; et profundus sulcus in fundo alembici, tamen semper aliquantum liquoris capere posset. Supra tubulo instructus erat, ope emboli vitrei, terendo adoptati, flrmiter occludendo; partim ut liceret inspicere, fi forte alembicus per flores opacus redderetur; partim surgentium vaporum odorem percipere. Ne calefacti crucibuli feruor vitreum alembici marginem dirumperet: hic, quatenus cru-

crucibulum amplectebatur, interne obductus erat argilla nobiliore porcellanea. Eadem illa quoque amplius obfirmabantur omnes hiatus inter crucibulum atque alembicum. Namque profecto quodlibet aliud lutum vegetabile vel animale, quo juncturam firmare conarer, illico combureretur. Postquam igitur isthaec argilla, qua junctura crucibuli cum alembico obfirmata, ejusque hiatus rite sarti erant, idoneam siccitatem nacta esse videbatur; apparatus primum modico illi calori exponebatur, quam in antecedentibus experimentis retortae toleraverant. Hic massae majores juxta margines aliquantum albescebant, subsedentes jungebantur, atque tunc liquefiebant in unam massam e nigro griseam, in medio disco ita convexam, ut apicem rotundum instar nodi vel parvi coni formaret. In alembico pars altera, dimidio amplior, tenui sublimato erat obducta. Tunc apparatus igni expositus est. Ibi massa ilicet ebullire atque in tantum intumescere coepit, ut non modo altitudinem crucibuli aequaret, 2″,5 alti; verum adeo in collum alembici, quinque ad sex lineas, adscenderet; eadem e cinereo albescere videbatur. Interim ingens sublimatum ε) generabatur (cujus pondus postea reperiebatur grana 53.). Embolo levato tubulus manifestam fumi nubem evomuit, instar ambustae pinguedinis nidorosam. Postmodo massa e collo alembici, et sensim profundius, in crucibulum subsidebat. Quae cum non amplius aestuare videretur, equidem ignem diminui; apparatu rasorum soluto, universum crucibulum inveniebatur intus obductum licet inaequali crusta vitrea, qua maximam partem e viridi nigrescente. Particulae avulsae cinereae, ut scobiculae lapidis pyromachi, item satis pellucidae erant. In fundo massa, nigra apparuit haud quaquam aequabiliter fusa, verum nodosas bullas gerens. Pondus hujus vitreae massae ζ) nota mole crucibuli, quo continebatur substracta, aequabat drachmas quinque et grana decem. Est

Est sane, cur singulari hoc miraculo immorer, quod nempe nostrum sal sedativum, quantum ex adspectu et tactu conjicere fas est, adeo inops aquae crystallisationis, adhuc in tam incredibilem altitudinem extumesceret, postquam jam antea (exper. 21.) ultra tertiam partem ponderis sui, per ablatum humorem aquosum amiserat. Extumescentia haec non potest oriri ex sola adhuc residua crystallisationis aqua; neque ex peculiari fluido elastico a vinculis concretae materiae liberato, quale hac nostra aetate aeris species vocamus. Nam neque embolus explosus est, neque aer ulla notabili vehementia prorupit; neque idem, cum tumor ebullientis massae cessaret, vel cum totus apparatus refrigesceret, cum sonitu in tubulum invectus est. Videtur ergo extumescentia illa solummodo effici per internam elementorum (vel particularum constitutivarum) decompositionem.

Hoc experimento hactenus ad finem perducto jam nunc agite inseramus experimenta fluidi aquosi (experiment. 21. δ.) modo laudati, ratione reactionis in metalla. Verum priusquam haec ad argumentationem idonea fierent: antea explorandum venit, quomodo ad metalla eadem sal sedativum haberet.

Experimentum 23.

Relationem salis sedativi, tamquam reagentis medii, in metalla rite dijudicaturo, mihi opus fuit, agnoscere, quaenam sit summa quantitas ejus, quam aqua resolvere valeat. Illico ingentem hic diversitatem, cum pro variantes caloris temperatura animadverti. Quandoquidem uncia aquae, in vase, cujus pondus curate subductum constitit, rite ponderata, ad 76 — 78° thermometri Far. temperata, utcunque diligenter succuteres, et per-

patienter exspectares, quidquam ultra 14 grana resolvere pertinaciter recusavit. Talis solutio saporem leviter modo acescentem prodidit.

Experimentum 24.

Contra vero ubi in vitro alto operto item unciam aquae magis calefaceres: multo plus resolvit, ita ut usque ad momentum coctionis redacta, jam duas drachmas et sex grana resolvere valeret. Utcumque caloris temperies minuebatur, aliqua pars salis in crystallos abiit, quia, ubi aqua sensim magis refrigesceret, modo quantitatem salis exp. 23. definitam, solutam retinuit. Ut ergo semper solutionem frigidam aequabiliter saturatam ad manus haberem; equidem solutionem calidam saturatam derepente ad certum frigoris gradum redegi, ubi omne superfluum sal in cohaerentem crystallorum massam secedebat. Quae adjuncta nisi respiceres, facile potuisses opinari, in commixtione cum solutionibus metallorum praecipitationem factam esse, qnando forte nihil aliud evenisset, nisi secessio salis per refrigerationem effecta.

Experimentum 25.

Talis solutio (exper. 24. descripta) infundebatur solutioni pulcherrimarum et maximarum crystallorum plumbi cum acido nitroso parati. Sed ne minima quidem obfuscatio evenit; nec si succuteres crebrius, nec si mixtas solutiones vehementiori calori digerendas exponeres.

Experimentum 26.

Quum eodem modo tractarem solutionem mercurii nitrati, neutiquam qualecunque vestigium praecipitati metallici apparuit.

Ex-

Experimentum 27.

Verum tamen ubi eidem solutioni salis sedativi (exper. 23.) stillatim argentum nitratum adderem, limpiditas solutionis parumper turbabatur, et post complures horas aliquod licet vix notabile praecipitatum evenerat.

Experimentum 28.

Priusquam fluorem illum aquosum (exper. 23. δ.) cum solutionibus metallorum commiscere aggrederer, operae pretium duxi, eundem per se denuo ad exiguum calorem destillare. Duplex ratio eo me adegit; partim ut occurrerem objectioni, quasi liquor iste duntaxat ageret tamquam talis aqua, quae modo contineret solutos flores, tam facile ad vehementem ignem in excipulum transeuntes; partim, ut explorarem, liceretne illum liquorem ad exiguum calorem phlegmate exurere. Ultimum hoc, pro odore et sapore aliquantum adaucto, locum habere videbatur. Quum denique ad eundem exiguum calorem digestionis omnis liquor in excipulum transiisset, in fundo retortae nonnihil salis firmi reperiebatur.

Experimentum 29.

Hujus liquoris destillati (exper. 28.) nonnihil affundebatur solutioni plumbi in acido nitri. Sed nec turbabatur; nec postmodo quidquam praecipitatum est.

Experimentum 30.

E contrario solutioni argenti nitrati simulatque gutta nostri liquoris (exper. 28.) incideret, illico aliquantum lactescebat

 et

et liquor valde turbabatur. Quid? quod sedimentum album mox praecipitabatur, quod instar reliquorum praecipitatorum lunarium, praesertim lunae corneae, subinde obscuriorem induens colorem, denique nigrescebat.

Experimentum 31.

Item mercurius nitratus extemplo per nostrum liquorem turbatus albescebat; quin aliquanto facilius et crebrius hic, quam in antecedente experimento, sedimentum album efficiebatur.

Experimentum 32.

Solutio crystallorum egregiarum mercurii vitriolati ante multos annos praeparatarum (difficillime solvendarum) etiam confestim albescens praecipitabatur: quamvis mera aqua destillata talem praecipitationem non efficeret.

Experimentum 33.

Quo experirer, num liquor hic valeret explere locum acidi muriatici in *aqua* sic dicta *regia*, acido nitri (ab aqua forti praecipitata destillatio, ideoque ne minimum quidem aurum adficienti) aliquod nostri liquoris affudi, et omnem mixturam ad lenem ebullitionem adegi. Evanescebant auri foliola injecta et liquor solitum auri colorem exhibuit.

Experimentum 34.

Praecipitatam calcem mercurii (exper. 31.) parvo vitro medicinali indidi, quod crucibulo arena repleto mandavi in aperto igne, experturus, num sublimatum datura sit. Eventus ten-

tentaminis exspectationis meae respondit, et sublimatum reperiebatur, quemadmodum etiam in acido pinguedinis evenit *).

Antequam circa supra exposita, praesertim tria priora experimenta (29. 30. 31.) uberiores adnotationes adjiciam, nunc prius revertar ad producta experimenti 22.

Experimentum 35.

Sublimatum ε. (exper. 22.) conjiciebatur in crucibulum argenteum, atque hoc arte amplectente operculo (quod identidem inspiciendi caussa sublatum est,) claudebatur. Illud sublimatum mox intumescens nigrescebat, et in spumosam scoriam fusum est, odorem nidorosum instar ambusti cornu spirans. Facile cultri ope in frusta comminuebatur scoria. Quoties bullae spumosae materiae tundendo aperiebantur; spargebant odorem olei cornu cervini. Massa scoriosa aequabat pondus 39 granorum. Ad operculum (inter cujus et crucibuli juncturam nigrescens materia adhaeserat) nonnihil sublimati erat, facile in aquâ solvendi, sed proportione multam materiam carbonaceam praecipitantis. Scoriam, si dentibus morderes, vitrum manducare tibi videreris. Linguae imposita eadem levem calorem et saporem leviter salsum vix agnoscendum, empyreumatico mixtum excitabat. Quum in aqua solveretur, iterum odorem sparsit, qualè oleum cornu cervini. In superficie quoque oleosae materiae aliquid apparuit. Item multum carbonis praecipitabatur.

Ex-

*) Vid. Chem. Journal. Th. 4. pag. 65.

Experimentum 36.

Massa vitrea ζ. (exper. 24.) statim post infusam aquam destillatam albescens intumuit et farinae instar in grumos dilapsa est. Per majorem quantitatem aquae sensim et paullatim solvebatur. Tum percolabatur, et residuum carbonaceum in filtro papyraceo (antea ponderato et vehementer siccato) explevit grana 14. Lixivium salis rite evaporatum aequavit pondere unciam unam, drachmam unam et grana viginti octo η.)

Experimentum 37.

Hoc sal η in retorta more consueto (donec e fusco nigresceret δ.) destillatum, exhibuit semunciam soliti saporis, quae praecipitabat solutiones matallorum (ut in exper. 30 et 31.)

Experimentum 38.

Massa ϑ (exper. 37.) pondus erat semuncia cum drachma et granis 24. (quibus adjeci illa 38 grana exper. 21.). In crucibulo (cum apparatu exper. 24.) feruefacta, graviter spumabat. Sub initium, sic uti videbatur, nonnihil laticis aquosi edidit (unde paululum in fovea alembici confluxit) et multum sublimati. Ad vehementiorem ignem massa e cinereo nigra aliquanto altius intumuit, quam in experimento 22. usque ad 3″, 3 — 4‴ et diutius eandem altitudinem occupavit. Denique infuscabatur obducta quasi cute rugescente, atque evomente vapores qui sublimatum album colore flavo infuscarent, atque illud demum paullatim evanescere facerent, in alembico apparebant parvae, fuscae, quasi olei guttulae, instar strigarum unctuosarum per spatium aliquod decurrebant. Odor erat tamquam adu-

adustae pinguedinis. Denique cutis illa ex alembico, et sic porro semper profundius subsedit. Crucibulum ad tres usque horas in igne erat, donec vapores nulli amplius surgerent. Fundus ejus per superius orificium alembici conspicuus candebat, cerasorum colore fulgens. Fuit ergo, cur ignem confestim removerem, ne crucibulum funderetur. Argilla, juncturae hiatus obglutinans, penitus nigra evaserat, probabiliter per particulas combustibiles, quae volatiles factae et corruptae inter manipulationem, per rimas illuc delatae fuerant. Crucibulum refrigeratum obductum erat circa latus internum iterum encausto nigro; sed in fundo scoria parumper aequabilius, licet non penitus aequabiliter, nigra, mox instar columbini colli versicolor. Nonnulli apiculi juxta marginem crucibuli prominentes, ex parte hyalini erant, guttulis nigrescentibus adspersi. Universa massa ι) in crucibulo, habebat pondus semunciae et septem granorum. In alembico adhuc inveniebatur nonnihil sublimati albi, et massae ex albido fuscae, instar coagulatae pinguedinis.

Experimentum 39.

Massa scoriacea ι) post adjectam aquam habebat, ut illa exper. 34. explorata. In charta filtri manserunt 7 grana. Massa salis evaporata κ) aequabat 6 drachmas et 28 grana.

Experimentum 40.

Illud sal κ. (exper. 39.) denuo destillatum in retorta, exhibuit aquae semunciam et floris crebri spongiosique grana 36. Placenta nigro fusco λ); quae subtus praesertim compacta, nigra, et vitrea, supra vero, modo tenui strato raro e luteo fus-

fuscescente obsita erat, habuit pondus quatuor drachmarum et 54 granorum.

Experimentum 41.

Hanc placentam λ pro tempore quidem in apparatu crucibuli non amplius tractare poteram. Namque alembici supra descripti frequentiore usu disrupti et inutiles evaserant. Quos vero in hunc finem data opera destinaveram, e procul remota officina vitriaria nondum advenerunt. Contudi ergo dictam placentam in mortario, quia adprime dura erat, in pulverem, quem una cum uncia aquae destillatae indidi retortae, quo experirer, num vel sic acidi nostri aliquid cum aqua in excipulum transiturum sit. Quin imo reperiebam, hoc liquore admixto mercurium nitratum praecipitari.

Jamque colophonem imponam syntagmati priori experimentorum, quae natura novi acidi hujus investigaturus coepi. Quibus quidem aliquanto impensius studuissem gnaris harum rerum arbitris satisfacere, si per obices ineluctabiles subinde emergentes mihi licuisset, aliquanto solertiorem operam huic molestae operationi impendere. Tantum equidem e supra dictis resultat; sal sedativum, pro tantopere fixo habitum, vel citra additamentum in puro igne decomponi, vehementer exspumare, liquorem aquosum acidulum edere atque ex parte comburi, quia carbonem relinquit.

Jam detectae sunt nonnullae proprietates acidi, quod olim jam suspicatus eram, et quod equidem modo praeliminari con-

conjectura, licet dubitabundus, novum acidum nuncupare sustinerem. Isthoc neutiquam est merum sal sedativum solutum, quippe quod metalla praecipitat (exper. 30 et 31.) ab isto non sic adficienda (exper. 26 et 27.). Acidum muriaticum quidem pariter praecipitat argentum et mercurium in acido nitri solutum; sed simul quoque, quin aliquanto propensius, plumbum nitratum: quod quidem nostrum acidum non praestat. (exper. 29.) Eandem objectionem facere licet contra acidum pinguedinis, quod et ipsum praecipitat plumbum nitratum (Vid. Chem. Journal l. s. c.). Interim tamen forsan fieri potest, ut parva quaedam in elementis modificatio, vel in relationibus eorundem, efficiat; quae nunc plura experimenta, et quidem ex grandioribus molibus capta doceant oportet. Quando quidem jam valemus acidum illud intemeratum praeparare: talia experimenta facilius instituere fas est, quemadmodum pridem continuato studio factum est: nunc modo saepius repetita horum experimentorum confirmatione opus est. Siquidem, ut spero, hujus acidi ratio ad corpora metallica constabit: hic videtur se pandere compendium olim perquam arduum, (quod antea jam per complures horulas frustranea cura anquisivi) quomodo novum acidum, absque dubio in acido muriatico supra sal sedativum destillato haerens, et inter destillandum cum isthoc in excipulo collectum — quomodo acidum illud, inquam, ab acido muriatico separari queat: Infundatur nempe in hoc acidum solutio plumbi nitrati: ilicet acidum muriaticum tamquam plumbum corneum separabitur; alterum vero acidum nostrum remanebit fluidum. Tunc percolato liquori solutionem mercurii nitrati adfundito, sedimentum per chartam bibulam colando separato et idem edulcorato.

Jam unicum adhuc opus est explorandum, quomodo videlicet acidum hoc in forma concentrata secernas. Quod quidem plus,

plus, quam simplici via praestare licet, sicuti proxima horum experimentorum continuatione affatim demonstratum iri confido. Longum foret enarrare complura experimenta post absolutam hanc nostram commentationem adhuc instituta. Omissis singularibus adjunctis, pauca modo, quasi per transennam, donec amplius constabunt, attingam.

1) Quum usus vasorum vitreorum (exper. 9.) quid? quod argenteorum (exper. 38.) tot mihi negotii facesseret, frequentes destillationes salis sedativi, ad ignem nunc debiliorem, nunc vehementiorem in cucurbita e lamina ferrea parata, institui, quas solita phaenomena comitabantur. Ad acriorem ignem idem semper odor specificus ad acidum pinguedinis proxime accedens percipiebatur. Post diuturnum usum fundus cucurbitae corrosus erat; idem ubique ochra ferrea rara, pulchra, granatina, qua maximam partem facile attritu auferenda, obsitus reperiebatur. Cujus partem, si una cum firmius adhaerente vehementiori igni exponeres, sal sedativum producebatur, ac simul consuetus vapor specificum odorem spargens una cum aliquo latice.

2) Inde optanti, ut majorem salis sedativi, metallo oxydato velut ligati, ideoque facilius decomponendi, copiam tractarem, simul vero praeparationem illius compendi-facerem, in mentem mihi venit, ut boracem cum ferro vitriolato ad saturationem usque miscerem, praecipitatum leniter edulcorarem *) et

*) Si praecipitatum aqua calida edulcorabis, idoneam cautionem adhibens, evaporando et crystallisando sal sedativum album nancisceris; eaque ratione sal isthoc in usum consuetum facilius olim praeparare poteris.

et isthoc postea ad vehementem ignem destillarem. Eventus idem erat, ac si sal destillares in cucurbita ferrea. Quodsi residuo nonnihil aquae infunderes; idem phaenomenon renovabatur. Relatio partium in genere erat, ut duodecim boracis ad undecim ferri vitriolati sumeres. Si in portione aberrares aliquid acidi sulphurosi odore deprehenderes.

3) Reputans, quanto facilius acidum aceti ex aerugine destillata paratur, quam ex ferro acetato; eo delatus sum, ut cuprum vitriolatum eodem modo ad saturationem boracis adhiberem. Eventus erat, ut in ferro vitriolato, nisi quod rariora acidi sulphurosi vestigia deprehenderentur, cum cupro oxydato arctius inhaerescat. Vapores ad vehementem calorem eundem spirabantur odorem specificum. In liquore inde destillato persaepe odor quasi amydalarum amararum facile discerni poterat. Isto experimento monitus destillationes in cucurbitis ex orichalco conflatis peragebam; quae sub initium colli, instructa erant tubulo parvo, subere vel simili empolo bene obturato, per quem nactum laticem semper refundere poteram. In omni destillatione denique semper flores albi in alembicum vitreum ascendebant *). At alvus cucurbitae obsita erat pulvere viridi.

4) Borax per se destillatus semper manifestum vaporem et odorem adusti cornu, vel olei cornu cervini edens, dimidia sui parte et ultra, abiit in aquam nonnihil istius odorem retinentem. Extumescendo spatium trigesies majus occupans, induit co-

*) Destillationibus copiosius repetitis tandem flores apparere desinunt.

colorem partim dilute flavum, partim fuscescentem. Ad vehementiorem ignem spiravit odorem adustae pinguedinis. In excipulo vestigia quaedam adipis apparere videbantur. Massa in fundo et ad dimidiam usque altitudinem e nigro viruit sine ullo sublimato. Quod si in aqua difficulter solubilem, eoque facto excalescentem, massam solveres; particulae quaedam nigrae carbonaceae e solutione praecipitabantur.

5) Quo odorem acidi sulphurosi in modo laudato experimento (2) amoverem, et vel hujus praesentiam plane evitarem, adeptum liquorem acidulum super boracem destillabam, qui vero antea tam multo sale sedativo saturatus erat, ut solutio hujus recens formati salis tincturam laccae caeruleae rubefaceret. Etenim sale Glauberi aliquo generato haud poterat fieri, quin liquor ab acido sulphuroso liberaretur.

6) Peculiare phaenomenon edidit sal sedativum, ubi saturatam ejus solutionem in aqua destillata valde diuturno calori exponeres. Hanc solutionem infudi vasi crystallino, cujus orificium obturabam rostro parvae retortae alte immerso, juncturae hiatu vesica et lino arcte occluso. Ope caloris ascendentes vapores in alvo retortae partim refrigescere poterant, partim refundi liquor paullatim collectus. Per priores hebdomades ne minima quidem mutatio percipienda venit. Fere mense elapso aqua mihi parumper turbari vel paullulum latescere videbatur. Ab initio verebar, ne opinionis errore fallerer; sed nunc certissima ratione per singulas hebdomades crescente fide mihi persuasum est. Namque illa solutio per duodeviginti menses, per hiemem supra calefactam fornacem, per aestatem vero in solis splendore servata, nunc ubi lux resplen-

splendet, ex albo caerulescit, et ferme pariter opaca est ut lac aqua dilutum; si adversus jubar diei illam conspexeris, translucida est et leviter e flavo infuscata; in fundo faex ingens fuscescens subsedit. Quod argumentum probat, sal illud tarde quidem, sed vere, hoc modo sola natura decomponi. Priori istae phialae, 3 abhinc mensibus, alteram similem adjeci, quae jam uno mense exacto parumper turbari coeperat. Quum verosimile esset, naturam compositionis salis nostri ex sedimento fuscescente, quod sponte fit, disci posse: haud ita pridem saturatam ejus solutionem in 5 libris aquae destillatae, eodem modo tractare aggressus sum, et avido desiderio eventum hujus experimenti exspecto, quod gravibus enodationibus circa veram salis illius naturam me certiorem facturum mihi polliceor.

OBSERVATIONES NONNULLAE

CIRCA COMMUNE CUPRI ET STANNI CUM ACIDO MURIATOSO CONNUBIUM.

AUCTORE

T. LOWITZ.

Conventui exhibita die 1. Sept. 1802.

Pluribus abhinc annis, anno nempe 1794mo Imperialis, quae Petropoli est, societas oeconomica compositionem quamdam metallicam, ut, quae sint partes ejus constitutivae, explorarem, mihi tradidit; eamque, peracta analysi, Cupri 76, Stanni 14, Zinci $6\frac{1}{2}$, et Plumbi $3\frac{1}{2}$ in centenaris partes continere, reperi.

Data hac occasione, cum metallicam illam compositionem acido muriatoso digestionis ope solverem; accidit, ut peculiaria quaedam Phaenomena observarem, quae, cum memoratu dignae mihi videantur, hic exponere mihi propositum est.

1) Solutio haec metallica id inprimis singulare obtulit, quod ad ebullitionem usque calefacta colorem flavum, ei vini Rhenani aemulum, refrigerata ex nigro bruneum, atramenti fere ad instar, ostenderet; quas alternas coloris mutationes, vidi, toties provocari posse, quoties memorata isto solutio binis illis sibi invicem contrariis temperiei gradibus submittitur.

2) Ad

2) Ad justum concentrationis gradum evaporata, solutio illa pellucidissimas albissimasque crystallos progenerat tetraedras illas et perfecte regulares, pyramidas triangulares aequilateras referentes.

3) Sal hoc triplex, cupro nimirum stannoque et acido muriatoso constans, a superstite post evaporationem liquore segregatum aqua non nisi difficillime, et vix ac ne vix quidem solvitur, quo fit, ut linguae vix ullum saporem metallicum impertiatur.

4) Sal hoc aqua ablutum, siccatumque et aëris liberi accessui expositum initio flavescit, dein in rubrum, denique in viridem colorem abit, quo facto, concretum hoc salinum, aëris humiditatem attrahens, in massam pultosam convertitur; quem vero humorem post aliquod temporis intervallum sponte iterum et plane deponit; hisceque mutationibus spontaneis omnibus absolutis, relicta massa salina aqua jam facillime solvitur, et viridem cum eadem solutionem exhibet.

5) Sali illi, tam recens crystallisato quam aëris contactu in massam pultosam jam jam converso, si acidum nitricum affunditur, nulla hujus in illud efficientia cernitur, elapso vero decem circiter minutarum intervallo, sal subito pulcherrimo sese colore purpureo induit, et insigni sub effervescentia et calore, vapores rubros aeris nitrosi eructans, plane et perfecte solvitur; quo ipso momento color purpureus modo dictus sensim et tantem plane disparet.

6) Cry-

6) Crystalli supra dictae recens concretae, omnisque adhuc coloris expertes, ammoniaco caustico immissae, plane facileque solvuntur, et liquori colorem illum amoenum coeruleum confestim impertiuntur, quem lixivium ammoniacale a cupro recipere consuevit.

7) Simul ac superstiti solutioni illae fusci coloris, a crystallis dictis decantatae (*n.* 2) aqua frigida adfunditur; color iste fuscus subito plane evanescit, largaque simul pulveris albissimi quantitas praecipitatur. Hicce pulvis, aqua probe lotus, omnibus supra descripti salis proprietatibus (n. 3 ad 6) gaudet.

8) Salinum hoc concretum reperi, quoque produci posse, si solutiones cupri et stanni, singulae cum acido muriatoso seorsim paratae, commisceantur.

Nova haec salium triplicium species memoratu ideo praecipue digna est, cum, tam cuprum quam stannum, acido muriatoso seorsim soluta, salia exhibent aquae facillime obedientia; adde, quod sal nostrum laudatum, non obstante insigni, qua pollet, cupri abundantia, colorem neutiquam viridem, sed albissimum exhibet.

METHO-

METHODI NOVAE

KALI BORUSSICUM, BARYTAE OPE, AB, ADHAERENTE EIDEM, ACIDO SULPHURICO DEPURANDI EXPOSITIO

AUCTORE

T. LOWITZ.

Conventui exhibita die 22. Dec. 1802.

Kali borussicum sueto modo si paratur, non ferreis modo, sed acidi quoque sulphurici particulis inquinari, chemicorum nulli non satis superque patet. Ferreas particulas quod attinet, eas separandi omnino omnes, etsi chemicorum, eorumque peritissimorum, permulti hac in re operam suam collocaverunt, hodienum tamen nullum invenire medium licuit.

Acidi sulphurici, praeparatum illud inquinantis, expellendi haud desunt quidem nonnulla artificia; quae tamen omnia eo inprimis vitio laborant, quod vel admodum praetiosa sint, vel non nisi nimis magno et complicato labore peragantur.

Decem circiter abhinc annis, Kali borussicum absque ullo acidi sulphurici inquinamento praeparandi methodum, sequenti modo absolvendam, invenire mihi licuit:

Debita Kali caustici sicci quantitas solvetur alcohole, quantum fieri potest, perfecte dephlegmato; solutioni huic spirituosae, a sedimento cautissime decantatae, coeruleum

ruleum Berolinense in tenuissimum pulverem redactum acidoque muriatoso a partibus heterogeniis depuratum et aqua probe lotum sub continua mixtionis agitatione, parvis subinde dosibus adjiciatur, donec ultimae adjiciendae ejusdem portiones non tantum colorem suum coeruleum non jam amittant; sed ipsa etiam solutio spirituoso-alcalina omni caustico sapore se exuat. Quo praestito, mixtio filtretur per chartam bibulam vel saccum linteum conoideum. Remanens in filtro sedimentum, oxido ferri et Kali borussico constans, edulcoretur alcohole, donec spiritus nullo jam colore tinctus per filtrum transeat; sedimentum dictum aqua frigida elixetur, liquorque filtratus evaporationis adminiculo ad crystallisandum disponetur.

Crystalli kali borussici hoc artificio obtentae etsi nullum acidi borussici vestigium ostendunt; ista tamen eas praeparandi methodus chemicorum quibusdam eo potissimum displicet, quod nimis larga alcoholis copia egeat, quod tamen alcoholis impendium, me quidem sentiente, tanti non est, cum longe major ejusdem quantitas, peracto labore, abstractionis ope, restitui et recuperari queat. Ceterum per se patet, methodum hanc, Kali borussicum absque ullo acido sulphurico inquinamento obtinendi eo praecipue niti, quod inhaerens potassino Kali sulphuricum alcohole neutiquam solvatur.

Alium prorsus obtato scopo respondentem, baryta auxiliante, procedendi modum Celeberrimus Henry proposuit *), qui sequentibus absolvitur:

Baryta

*) Scheerers allgemeines Journal der Chemie 5. Bd. S. 415.

Baryta carbonica calcinetur igne, ut omne, quod eidem inhaeret, acidum carbonicum expelletur. Baryta haec pura solvatur aqua ebulliente, solutionique huic coeruleum berolinense depuratum parvis subinde dosibus adjiciatur, dum colorejusdem coeruleus non jam varietur, Crystalluli flavi coloris, quae in filtrata hac solutione, dum frigescit, deponuntur, quaeque barytam borussicam exhibent, solutioni Kali carbonici calefactae eo usque addantur, donec color ruber, chartae succo heliotropico tinctae et acidi acetici ope rubefactae, a solutione hac jam non mutetur; attamen, ut Kali carbonicum omne omnino decompositum iri, eo certius sit, barytae borussicae portionem quamdam quasi supervacuam etiamnum addi convenit. Mistio haec digeretur per horam dimidiam et filtretur; quibus exacte peractis, lenissima liquoris evaporatione, pulcherrimae nascentur Kali borussici crystalli, eaeque omnis acidi sulphurici perfecte expertes.

Hisce praemissis, ad novae methodi expositionem progredior, quam tribus abhinc annis, quo tempore modo descripta methodus Celeberrimi Henry me plane latuit, invenire mihi licuit.

Kali borussici depurandae solutioni tantum adjiciatur acidi acetici, ut, quae sali nostro, consueto modo parato, inhaerere etiamnum consuevit, Kali carbonici pars plane destruatur: mixtioni sub perpetua ejus agitatione, barytae aceticae guttatim adjiciatur tantum, quantum requiritur, ut Kali sulphuricum plane decomponatur, id quod factum esse, eo indicio intelligere licet, sic exigua depurandae solutionis portio seorsim subinde examinanda, post-

quam sufficiente aquae copia fuerit diluta, barytae aceticae admixtione nullam jam mixtionem subeat. Hisce omnibus praestitis, ammoniaci carbonici quantum satis est, et quod paulo excedit, mixtioni addatur, solutio filtretur et lenta evaporatione ad crystallorum formationem disponatur.

NOUVELLES OBSERVATIONS SUR LES PIERRES DE ROCHE AGGREGÉES.

PAR

B. SEVERGUINE.

Présenté à l' Academie le 28. Avril 1803.

Après avoir detaillé dans mes dissertations précédentes*) tout ce qui regarde la classification, les différentes dénominations et les caractéres distinctifs des pierres de roche aggregées, revenons à leur forme arrondie, pour considerer les particularités qu' elles présentent dans les Provinces de notre Patrie, où je les ai trouvées sous cette forme dans l' abondance la plus remarquable.

Il y a trois manières d' envisager ces éspéces de pierres sous leur forme arrondie ou roulée, savoir: 1) suivant leur qualité intérieure; 2) suivant le sol qu' elles occupent actuellement; 3) suivant le lieu natif qu' elles devoient avoir occupé jadis. D'où resultent nécéssairement encore trois questions: 1) Quel est leur etat actuel; 2) Quels sont les changemens qu' elles subissent par

*) Nova Acta Academiae Scientiarum Petrop. Tom. VII. pag. 313. — Tom. VIII. pag. 301. — Tom. XII. pag. 307. — Tom. XIII pag. 376.

par le laps du tems; 3. Quelle est la cause probable qui les a arrachés du lieu natal et transmis en cet état dans des endroits, où elles ne semblent pas avoir existé auparavant?

Pour répandre quelque lumière sur cette matière, j'ai l'honneur de présenter ici l'apperçu d'un voyage que j'ai fait l'année passée à Semiatiez *) sur le Bog, de là à Moscou et puis de retour à St. Pétersbourg, dans une étendue de plus de 3500 Werstes.

Pour ce qui regarde les pierres de roche aggregées roulées des environs de St. Pétersbourg, elles sont assez connues et par les observations de nos savans et par les dissertations que j'ai eu l'honneur de présenter à l'académie, il y a quelques années.

Un sol sablonneux, entrecoupé de couches limoneuses et parsemé de ces éspéces de pierres, s'entend depuis la Résidence jusqu'à la ville de Dorpat. Cependant près de la ville de Jambourg (environ 113 Werstes de St. Pétersb.) les bords éscarpés de la petite riviere Louga sur laquelle cette ville est située, présentent des couches de pierre à chaux compacte grise et de sable blanchâtre, en partie teint en rouge par de l'ochre de fer. La pierre calcaire cõntient par-ci par-là des petrifications de Mitulites. J'ai vû ensuite la même pierre calcaire sur les cataractes de Narwa (183 W. de St. Pétersb.)

Sur

(*) Un petit Bourg dans la Pologne Prussienne.

Sur le chemin de Narwa à Dorpat, on rencontre le lac Peipus d' environ 80 Werstes de longueur et de 60 Werst. de largeur, dont les bords sont parsemés de pierres roulées de différentes grandeurs, et parmi les quelles on peut distinguer des Granits (en propre terme) rouges, jaunâtres et plus souvent gris, des Pierres de roche aggregées micacées, des Syenites, des Petrosilex, des Grés gris et quelques fois de la pierre calcaire grise. Les Granits consistent pour la plupart de Feldspath jaunâtre, de Quartz blanchâtre et de Mica noir.

Plus loin le terrein devient plus montueux, et ce qui est remarquable, les montagnes ou les collines semblent avoir leur direction pour la plupart vers le Sudouest et le Sudost. Elles conduisent presque vers Dorpat, environ 175 Werstes de Narwa.

De Dorpat à Wolmar (128 W.) les collines deviennent plus nombreuses et consistent en grande partie de Sablon rouge. Par-ci par-là on rencontre des couches argilleuses. Les pierres roulées sont à peu près de la même nature et en très-grande quantité. Il y en a des amas qui forment des collines entières, comme auprés de la Station Oudern. Ce que j' ai trouvé de plus remarquable, ce sont 1. des pierres de roche aggregées qui consistent de Quartz, de Mica, de l'Actinote verd, de Grenats et de Feldspath; 2. Pierres de corne brunes avec de la Hornblende noire, et 3. une pierre calcaire blanchâtre, écailleuse et ferrugineuse.

Sur les bords de la petite rivière Aa, sur laquelle est située la ville de Wolmar, on rencontre une argille grise, sem-

blable

blable à la terre à foulon, quelques pierres ferrugineuses sablonneuses en forme de petites boules, des debrits de Fungites et d'Astroites. Et Mr. l'Academicien Lowitz m'a montré un morceau de Quartz celluleux de couleur brunjaunâtre du même endroit, dont les cellules sont pour la plupart quadrangulaires et dont chacune contenoit un grain de Quartz laiteux; quelques fois ces grains s'en detachent et laissent les cellules vuides. A la premiere vue ce morceau ressemble au Quartz celluleux aurifère de Cathérinebourg, mais probablement c'est un grés devenu celluleux, par les grains de Quartz qui s'y sont introduics pendant que la pâte étoit molle.

Je passe au phénomêne le plus remarquable qui se presente ici par rapport aux pierres de roche aggregées roulées. Et effectivement on ne trouvera guères un cas semblable et si instructif pour la théorie de la terre. Tout en sortant de Wolmar on voit de vastes plaines élevées qui continuent jusqu' au village de Roop (prés de 40 W.) sur les quelles on trouve de gros blocs de granit disposés, à la portée de la vue en plusieurs rangs reguliers, qui ont tous leur direction vers le Sudouest, quelques fois plus au Sud, d'autres fois plus vers l'ouest et à la distance de prês de 10 Sagenes l'un de l'autre, comme si ces blocs étoient arrangés de la sorte par un travail exprés de l'homme. Presque tous ces blocs roulés sont oblongués, plus gros par un bout que de l'autre et inclinés par ce dernier vers le Sudouest, comme si les eaux qui se fixèrent dans le bassin de la Mer Baltique, étoient venues de ce coté des pays situés vers le Nordost, l'Ost ou le Nord, d'où elles semblent avoir arraché ces blocs pour les porter en ces endroits. Encore plus; en sortant de Roop, on voit à gauche de

de la route trois montagnes ayant toutes les trois la dite direction. Au reste tout le terrein depuis Wolmar est sablonneux. Ce sablon est entassé en forme de montagnes ou de collines qui sont plus nombreuses vers Riga et dont la plupart se detruisent par l'effet de la pluie et de la neige, qui arrachent et emportent les parties sablonneuses dont elles consistent. De sorte que les vastes plaines élevées dont j'ai parlé plus haut, semblent avoir été formées, comme dans plusieurs autres endreits, par la même cause. Ces montagnes étant si souvent sujettes à être detruites, leurs parties sablonneuses n'ont pû se reunir au point de former une pierre de grés. D'un autre coté il semble, que les gelées et les glaces propres à ces climats ont pû consolider ici tant soit peu les sables et les empecher de former des deserts sublonneux semblables à ceux de la Lybie si souvent funestes aux voyageurs.

Sur la route de Riga vers Mitau on ne voit plus qu'une vaste plaine d'un terrein noiratre et fertile qui ne contient que trés-peu de pierres roulées. Le même terrein va encore de Mitau presque jusqu'aux frontières du gouvernement de Wilna, mais à la station Meszkuci il devient encore plus argilleux. On sait au reste, que de Riga à Mitau, et encore plus de Mitau on tourne de plus en Sud et le Sudost pour aller à la ville Lithuanienne Kowno. Un terrein argillosablonneux et plus montagneux que jusqu'ici ne contenant que peu de pierres roulées qui vont cependant toujours en augmentant, continue encore jusqu'à la station Bobti (27 Miles allem. de Mitau). Il faut remarquer, que sur le chemin de Bobti jusqu'à Kowno, on est frappé de la vue de deux trés longues montagnes ou collines sablonneuses remplies de pierre de roche aggregées roulées, et qui suivent paral-

parallélement l'une les frontières Russes et l'autre les frontières Prussiennes. Dans la vallée profonde qu'elles forment, coule le fleuve Niemen, qui auprés de Kowno se joint à la rivière Wilia.

Le chemin de Kowno à la ville lithuanienne Wilna (13 Miles) mêne à des hautes montagnes, mais leurs pentes sont douces et leurs sommets semblent former des plateaux. Elles n'ont point cette direction regulière que j'ai remarquée plus haut, et on trouve dans leurs ravines une quantité de roches granitiques roulées, des cailloux de silex et des boules d'agate dans des couches de sable jaune.

De Wilna à Grodno (prés de 35 Miles) le chemin est plus uni au commencement et le terrein est sablonneux avec une quantité de roches granitiques roulées. On trouve ici, comme dans la route de Riga plusieurs collines sablonneuses detruites et remplis de sablon les profondeurs. Plus prés de Grodno les collines redeviennent plus nombreuses, le terrein est sablonneux, et on est étonné de voir tout d'un coup les plaines et les collines recouvertes d'une quantité innombrable de pierres roulées rouges, et surtout en commençant de la station Lapenicy (prés de 15 Miles de Wilna) dont voici les éspéces: 1. Quartz compacte ou grenu de couleur de tuiles avec des feuillets de Mica verdâtre; 2. Quartz opaque ou plutôt Petrosilex de couleur de chair; 3. Feldspath de couleur de chair ou de tuiles avec des grains arrondis de Quartz grisâtre; 4. Roche granitique de Feldspath rougeatre, de Quartz brun et de Mica gris ou argentin; 5. Roche aggregée de Feldspath rougeatre, de Quartz blanc, et de Mica brunâtre avec des

des veines et des taches d'argille endurcie de couleur céladon; 6. des morceaux considérables de Feldspath de couleur de tuiles. 7. Des vrais agates de couleur rouge ou brunrougeatre. Le reste des pierres roulées étoint des petits cailloux de silex blanc bleuâtre ou jaunâtre avec des veines brunes et violettes, ou jaunes, verdâtres, blancs, gris, bruns, d'une ou de plusieurs couleurs.

Cette différenee des pierres de roche aggregées roulées à celles qui se trouvent dans les endroits précédents, porte à croire qu' elles sont provenues des contrées différentes de celles, d'où semblent avoir été arrachées les roches granitiques grises. Mais où chercher leur lieu natal? Par la direction régulière des collines et des gros blocs de granit que j'ai remarquée plus haut, il semble que les eaux, dans quelque époque que cela fût, venoient des contrées situées vers le Nord-ost. Il est vrai qu' il y a dans le Nord de la Russie des roches quartzeuses compactes rouges. Seroit-ce de ces endroits ou encore de plus loin que ces pierres roulées ont été arrachées et amenées jusqu' ici? Des observations et des recherches repetées peuvent resoudre cette question importante.

Mais ces pierres de roche aggregées roulées semblent présenter ici un autre phenomêne aussi bien remarquable. On sait qu' on a différemment expliqué la formation des agates. Ceux de la Lithuanie semblent provenir du granit, ou les pierres de roche granitiques roulées changent avec le tems en agates*). Car

*) C'est ce que semble indiquer aussi le grand Buffon par le passage suivant: „On peut même dire qu' on trouve ces pierres (les agates) dans

Car on trouve ici en plusieurs endroits des pierres roulées, que chacun prendra, quant à l' extérieur, pour des agates, mais qui etant brisées, montrent toutes les parties constituantes du granit, et surtout dans les cassures plus proches du centre. Il y a plus de cent échantillons où j' ai observé la même transition. Dans les parties plus proches de la surface on voit du Quartz melé au Jaspe, ou de la Calcedoine, ou une sorte de Carneol melé de Jaspe ou de Petrosilex, ou même d' argille endurcie. Quelques fois ces substances y sont en taches, d' autres fois en veines: De sorte qu' il semble que les pierres de roche granitiques roulées subissent par le laps du tems les changemens suivants. Le Quartz reste tel qu' il est, ou il se condense, il se ternit et passe en Calcedoine, en Carnéol ou en Petrosilex; le Feldspath perd sa texture feuilletée, il se gérce et passe en jaspe ou en argille endurcie, et le Mica se décompose entièrement et s' en dégage. L' eau semble être ici le principal agent pour effectuer ce changement, et l' attraction particulière des particules qui les constituent et qui ne font que changer leurs combinaisons précédentes, en est la cause principale. Dans les roches granitiques qui n' ont pas encore subi ce changement, le Feldspath passe quelques fois en veines, ou en plaques; d' autres fois il est de deux couleurs, rougeatre et brune, dans le même échantillon. Encore plus; on voit presque partout que quand les granits se décomposent fortement, quand le Quartz

---

„dans toutes les parties du monde, et dans tous les terreins ou le „ *Quartz et le Granit* dominent etc.“ Histoire naturelle des mineraux, Vol. VII. Aux Deux-Ponts MDCCXC. pag. 164.

Quartz et le Feldspath changés, le premier en Calcedoine, en Carneol, Silex ou Petrosilex, l' autre en Jaspe ou Argille endurcie, viennent à se degager l' un de l' autre par la plus forte décomposition du Mica, on voit, dis-je, qu'alors il se forme des cailloux isolés qu'on trouve ici dispersés en si grande quantité. Plus gros au commencement, ils s' amincissent dans la suite par le frottement et par d' autres causes accidentelles. Les mêmes causes les changent en gravier, et le gravier par gradation en sable trés fin, dont sont recouvertes presque toutes ces contrées. Et tel est le dernier état visible de ces roches granitiques, que l' on considère en géologie sous le nom de primitives. Au moins il n'est que trop vrai, que les granits roulés sont ici plus gros que les agates; ceux-ci plus gros que les cailloux, et les cailloux passent, comme je l' ai dit, au sable le plus fin. Il est vrai encore, que les cailloux qui sont plus gros, ont pour la plupart leurs angles assez conservés et visibles, tandis que les granits roulés sont plus arrondis et les cailloux les plus petits sont arrondis le plus. Le tout semble confirmer ce que j' ai avancé plus haut, c'est à dire, que les gros cailloux sont arrondis moins parcequ' ils se sont formés plus tard par la décomposition des Granits, et que les petits cailloux sont arrondis le plus, parcequ' ils se sont formés des cailloux plus gros, par leur frottement et par leur décomposition ultérieure.

Mais revenons au fil de notre voyage, pour dire que les mêmes especes de pierres roulées dispersées en quantité innombrable dans les collines et les plaines sablonneuses, mênent non seulement à Grodno, mais de là jusqu' à la ville Polonoise Prussienne Bialystok, et même jusqu' au fleuve Bog sur les frontié-

res Autrichiennes (au delà de 24 Miles de Grodno). J' ai visité ce fleuve dans l'endroit où est située la ville de Drohiczyn. Les bords en sont montueux et éscarpés de ce coté, tandis qu' ils sont applatis du coté Autrichien. Ils consistent en sable grossier jaunâtre melé de cailloux de silex et de pierres granitiques rouges roulées que j' ai decrites si dessûs.

En revenant à Grodno j'ai continué mes observations et j'ai trouvé toujours les mêmes résultats. Aprés avoir passé le fleuve Niemen auprés de Grodno, et ses rives escarpées, et en tournant vers la ville Novogrodek (prés de 150 Werstes de Grodno, pour aller à la ville de Minsk) on a le même chemin que pour aller de Grodno à Wilna et ce n' est qu' à la station Novina (prés de 36 Werst. avant d' arriver à Novogrodek) qu' on prend une autre route.

Il faut que j'avertisse, que, quoïque j'aie dit auparavant que toutes ces contrées ont un terrein sablonneux et qu' elles surabondent de pierres de roche granitiques roulées et de cailloux de silex, cependant on y rencontre ça et là des pierres calcaires roulées et même des petrifications calcaires de Tubiporites, Madreporites, Milleporites, d' Encrinites et autres selon le catalogue des mineraux de feu Mr. Carosi, cidevant correspondant de notre Académie. Moi même j' ai trouvé outre quelques pierres à chaux roulées, des Porphyres, des Syenites et de la serpentine roulées auprés de Grodno.

C' est sur le chemin de Novogrodek à la ville de Minsk (141 W.) que la qualité du terrein change totalement. Tout en sortant de Novogrodek on voit que le terrein sablonneux devient

devient plus argilleux et les pierres roulées sont en beaucoup moindre quantité. A la place du Granit roulé on y trouve des pierres calcaires grises, des pierres marneuses, de l' argille brune endurcie avec des taches noires de Hornblende et des Porphyres. Le pays est montueux. Les montagnes ou les collines argilleuses sont assez hautes avec des pentes douces et semblent avoir souffert moins de changemens que les précédentes. Mais elles n' ont point cette direction régulière que j' ai remarquée plus haut. Elles sont entrecoupées de plaines marécageuses et par des marais plus prés de Minsk. La couche supérieure des premiéres est une terre limoneuse noire, au dessous de la quelle on trouve du sable blanc et trés-fin.

Des collines argillosablonneuses, entrecoupées de plaines marécageuses, conduisent encore de Minsk à la ville d' Orsza (prés de 197 Werst.) Ce n' est que plus prés d' Orza et notamment auprès de Toloczyn (environ 65 Werstes avant d' arriver à Orsza) que les collines redeviennent sablonneuses et les pierres roulées plus nombreuses. J' ai trouvé parmi ces dernieres: 1. du vrai Granit primitif roulé; 2. des Pierres de roche agregées micaceuses; 3. du Quartz aggregé; 4. des Porphyres roulés; 5. un vrai Lapis Lydius de *Karsten* avec quelques veines de Quartz blanc et en forme roulée; 6. Des Roches granitiques roulées qui changent en Agates, c' est à dire le Quartz en Calcedoine, le Feldspath en Jaspe, le Mica étant decomposé. Dans l' interieur on voit toutes les parties constituantes du Granit intactes.

En sortant d' Orsza pour aller à la ville de Smolensk (113 Werst. d' Orsza) on trouve sur le Dnieper, 1. de l' argille sablon-

sablonneuse brune-jaunâtre et grise; 2. du sable ferrugineux; 3. des Granits à gros grains rouges et gris; 4. du Feldspath brun-jaunâtre avec du Quartz brun; 5. des morceaux de Quartz detachés qui passent en Petrosilex; 6. des Cailloux de silex brun; 7. des pierres sablonneuses blanchâtres; 8. de l'argille endurcie; 9. des pierres calcaires, toutes dispersées en forme roulée. Le Sol est toujours argillosablonneux. J'ajouterai que sur tout le chemin depuis Orsza jusqu' à Smolensk on rencontre presque à chaque pas des gouffres plus ou moins profondes qui semblent avoir été jadis des ruisseaux qui se formoient dans ce pays élevé et marécageux et dont quelques unes contiennent encore de l'eau.

Arrivé à Smolensk j'observois les pierres roulés de ses environs, parmi les quelles on peut distinguer, 1. du Granit gris à gros grains et qui consiste de Feldspath blanc, de Quartz gris et de Mica noir; 2. de la Roche aggregée de Feldspath rouge, de l'actinote verdatre et qui se decompose, de Quartz gris et de Mica noir; 3. du Feldspath de couleur de tuiles avec des plaques de Quartz gris; 4. de l'Argille endurcie grise, jaune, blanchâtre et brune; 5. du Quartz rouge; 6. des Grés compactes rouges et blanchâtres; 7. des pierres calcaires compactes et spatiques.

De Smolensk à la ville de Dorogobousch (92 Werst.) le terrein est argilloferrugineux et trés-souvent marécageux. Avant d'arriver à Dorogobousch on trouve des Quartz roulés, de beaux Agates blancs avec des veines rouges et des cailloux de silex de couleur verte dans un sol plus sablonneux. Mais les bords du fleuve Dnieper sur le quel cette ville est située et les

les collines qui l'entourent sont argillosablonneuses avec une quantité de cailloux de silex gris et rouges, dont plusieurs ont l'air du Carnéol. Pour les pierres de roche granitiques, il y en a moins.

De Dorogobousch vers la ville de Wiasma (77 W.) le sol est d'abord sablonneux avec une quantité innombrable de cailloux de Silex de différentes couleurs et plus prés de Wiasma de beaux Agates blancs avec des veines rouges.

Quelques Werstes de Wiasma du coté de Moscou on trouve dans une colline argillo-sablonneuse un amas de pierres roulées qui sont: 1. des Pierres de roche micaceuses; 2. des Petrosilex gris et blancjaunâtres; 3. des Cailloux de silex de couleur grise et blanche avec des dendrites et des Trochilites. 4. Enfin des mines de fer limoneuses. Même toutes ces pierres roulées sont enduites d'une écorce argilleuse ferrugineuse.

Le chemin de Wiasma vers la ville de Gschatzk (60 Werst.) présente encore un sol argilloferrugineux avec une quantité de cailloux de silex. Les plaines élevées qui forment ce pays, sont souvent interrompues par des marais.

En passant quatre Werstes de Gschatsk du coté de Moscou, j'ai trouvé prés d'un petit village nommé Iwaschkina, 1. des Roches granitiques roulées; 2. des Porphyres avec de la Hornblende noire; 3. des Quartz jaunes et blancs; 4. des Cailloux de silex qui avoient l'air du Calcedoine et de Carnéol; 5. des cailloux de Silex gris, noir, blanc, jaune, brun etc.; 6. des

6. des Jaspes de couleur de caffé ou de rouge obscur; 7. des Géodes brunes avec des cristaux d'Amethyste; 8. des Cailloux de silex de couleur de tuiles avec des pétrifications de Chamites, de Mitulites, de Pectinites et de Madreporites.

Un sol argillosablonneux portant les mêmes pétrifications conduit de Gschatzk à la ville de Moschaisk (61 Werstes). Mais de Moschaisk à Moscou ce ne sont presque plus que des plaines argilleuses avec quelques petites élévations; quelque part le sol est marneux; partout il n'y a que peu de pierres roulées.

En sortant de Moscou on trouve des plaines argillolimoneuses melées de sable et de terre calcaire, et entrecoupées de quelques petites élévations. Pour les pierres roulées, il y en a moins. Vers la ville de Twer ce sont presque toujours des plaines; le sol est sablonneux avec beaucoup de Marais, et avec une quantité de pierres de roche granitiques roulées et de cailloux de silex jaunes, blanes et bruns. A 60 Werstes de la ville de Torschok du coté gauche prés d'un village Staritza on exploite une pierre calcaire jaune que l'on employe à Torschok pour les fondemens des batimens. Enfin les bords de la rivière Twertza et les collines qui l'entourent, sont presque partout sablonneuses avec une immense quantité de cailloux de silex, dont la plupart sont de couleur blanche et grise et quelques uns avec des pétrifications de Fungites, Madreporites etc. Puis viennent les monts Waldaiques, qui occupent une largeur de prés de 50 Werstes entre les villes de Twer et de Nowgorod et qui sont d'autant plus rémarquables qu'ils se trouvent ici tout d'un coup entre les immenses plaines marécageuses qui

vont

vont d' un coté jusqu' à Pétersbourg. Au reste ils se distinguent plus par les éscarpements qu' ils presentent et par leurs gouffres profondes, que par quelques Mineraux rémarquables, parcequ' ils ne contiennent ici que du sable, de l' argille, quelques paillettes de Mica et des Roches granitiques roulées grises. Ils n' ont point ici cette direction régulière que j'ai remarquée ailleurs, mais il semble plutôt que par l'effet d'une révolution souterraine, ils ont été, tout d'un coup arrachés du fond d'une mer ancienne.

Enfin de Nowgorod jusqu' à Pétersbourg on ne voit plus que des immenses plaines profondes, accompagnées des lacs, des marais, et des ruisseaux avec un sol pour la plupart limoneux et marecageux, parsemé de quelques blocs roulés de Roches granitiques, pour la plupart grises *).

Resumé.

On voit par tout ce qui a été dit plus haut:

1. Que les pays les plus sablonneux se trouvent entre Dorpat et Riga; entre Kowno et Grodno; puis entre Grodno et Novogrodek, et en quelques endroits sur le chemin de Smolensk et de Twer.

2. Les

*) Quiconque désire de connoitre plus en detail les endroits marqués ci dessus, les trouvera dans mon Journal de Voyage que l' Académie a publié en langue Russe sous le titre: записки путешествія по западнымъ провинціямъ Россійскаго Государства С. Петербургъ 1803.

2. Les pays les plus argilleux se trouvent entre Novogrodek et Minsk et entre Minsk et Orsza.

3. Les pays argilloferrugineux sont entre Smolensk et Wiasma, et entre Wiasma et Gschatsk.

4. On rencontres des pierres calcaires prés de Jambourg, prés de Riga, dans le territoire de Minsk, prés d'Orsza, dans quelques districts de Môscou et prés de Torschok.

5. La plus grande quantité des cailloux de silex se trouve sur le chemin de Wilna à Grodno, puis de Grodno vers le fleuve Bog, de Grodno à Novogrodek, de Smolensnk à Wiasma, prés de Moscou et dans le territoire de Twer.

6. Les pierres de roche granitiques roulées sont entremelées par-tout en plus ou moins grande quantité; mais les rouges se trouvent principalement entre Wilna et Grodno, puis vers le fleuve Bog et entre Grodno et Novogrodek. Les autres sont pour la pluspart grises.

7. Les pays les plus élevés semblent se trouver du coté de Smolensk à cause des grands fleuves qui y prennent leurs sources; et les pays les plus bas et les plus marecageux du coté de Pétersbourg.

8. En quelques endroits les collines et les montagnes semblent avoir une direction régulière vers le Sudouest et le Sudost. Elles sont toutes sont d'une date nouvelle.

9. En-

9. Enfin tout ce district semble avoir jadis été recouvert des eaux qui n'ont pu decouler avant que les grands bassins tels que celui de la mer Baltique et autres, ne furent ouverts par quelque révolution souterraine.

10. Les eaux pour remplir ces bassins, semblent avoir pris leur cours des contrées situées vers le Nordost ou vers le Nord.

DE VIBURNO OPULO,

AUCTORE

N. OZERETSKOVSKY.

Conventui exhibita die 3 Jul. 1803.

Viburnum Opulus est arbor non solum Botanicis, sed et vulgo notissima, et in tota Rossia adeo familiaris, ut nec infantes rossicum ejus nomen ubique ignorent. In systematico vegetabilium ordine refertur Viburnum ad pentandriam trigyniam, et viginti duas species hactenus notas sub se comprehendit. Inter species Viburni, Opulus distinguitur foliis oppositis lobatis, lobis incisis; petiolis glandulosis.

Descriptiones et figuram hujus arboris apud omnes fere auctores botanicos facile invenies; ast de usu ejus, et praesertim medico, scriptores vel plane tacent, vel ea tantummodo referunt, quae non magni momenti sunt. Apud cel. Gmelin in Florae Sibiricae tomo III. p. 146, leguntur sequentia: „Fructus „(Opuli) in Sibiria plurimae gentilium parti edules sunt, et „Russis Kalina dicuntur, nec usu suo, referente B. Stellero, „in Cat. medicam. Sibir. apud illos, praecipue tamen Sibiricos „et Casanienses, prorsus carent. Experimentum, ad quod baccas adhibent, nimis est curiosum, quam ut silentio prema-„tur. Non infirmum apud illos, inprimis qui mediocris sunt „conditionis, hospitalitatis signum est, si liquores convivis ap-„positos magis potatos quam gustatos etiam perinde adhuc sen-

„se-

„ ſerint. Quare quaevis potulentorum fermentatorum et spiritus „ ex his praeparati genera amica et voluntaria prodigalitate ap„ ponuntur. Sunt autem abstemii, praeter aquam nullum potus „ genus acceptantes. Hisce comes hospites fucum faciunt. Bac„ cas maturas Opuli ollae injiciunt novae, purae, cum sacchari „ aliqua quantitate, spiritus frumenti, vel simplicis, vel altera „ destillatione rectificati copiam pro lubitu addunt; ollam oper„ culo claudunt, glutine crasso ex farina firmant, ne facile spi„ ritus exhalare poſsit; reponunt ollam in clibano calefacto, do„ nec omnis baccarum rubor in spiritum transierit, cujus signa „ quaedam vel olla adhuc firmata habent. Baccae tunc cerae „ albae instar candidissimae apparent, spiritus autem omni odore „ et sapore destitutus, aquae vulgari simillimus, virtute valde „ inebriante praeditus esse perhibetur. Hoc igitur calidissimo „ theam Sinensium infundunt, scutellis sinensibus exceptum sor„ billandum praebent abstemiis illis, qui nihil sibi metuentes „ aliquot scutellas incauti hauriunt," (salva pace beati viri dicam, hic eum a vero aberrasse; unica enim scutella exhausta, inebrians virtus spiritus vini, licet infuso theae diluti, non potest non sentiri.) „ Sed intra aliquot minuta sauciis illis „ et vinolentia madidis non dissimiles evadunt."

Attamen baccae Opuli non solis infusionibus spiritus vini, ſed aliis etiam usibus tam in Rossia quam in Sibiria jam pridem inserviebant. Ex illis homines simplicis vitae et conditionis antea parabant et hodie conficiunt aliquod genus pultis esculentae, Kulaga dictae, cujus praeparatio haec est: sumitur voluntaria quantitas farinae et maltae tenuissime contritae, injicitur ollae, subigitur aqua, uti fit in praeparatione cerevisiae, subacta immittitur clibano et tamdiu in eo retinetur, donec mis-

cela

cela concoquatur et evadat dulcis; quo facto, admiscentur ipsi baccae Opuli, cum quibus iterum calori clibani exponitur. Pulti huic sapore baccarum impraegnatae, post coctionem adhuc tepidae, admiscetur aliquantum pastae farinae fermentatae, quae cum portione pultis conteritur, ac dein in tota olla agitatur, ut puls paulisper acescat et magis arrideat palato roboretque ventriculum.

Ejusmodi pultes non solum impune, sed et appetenter commeduntur a pueris, adultis et senibus, absque ut inde vomitus consequatur, vel alvus laxetur, licet baccis Opuli recentibus vires emeticae et purgantes a scriptoribus tribuantur, qui easdem exsiccatas adstringentes esse contendunt.

Delicatiores ditioresque matronae baccas Opuli maturas coquunt cum melle, imo etiam cum saccharo, et hac ratione paratas per integrum servant annum, ut eas, tamquam bellaria, mensis apponant. Confectio haec non solum dulcedine sua placet palato, sed medicatas etiam vires in corpore exserit, uti observata docuerunt experientissimum et eruditissimum virum Josephum Kamenetski, collegii Imperialis medici membrum, qui in litteris ad me datis, observationibus nisus, candide affirmat, confectionem baccarum Opuli plane easdem virtutes possidere, ac quibus gaudet lignum Quassiae, quod est exoticum.

Desunt nobis hucusque observationes, quibus effectus baccarum opuli praeparatarum satis superque demonstrari possint; sed observatio unius perspicacissimi viri, qualis est eximius Kamenetski, tot ponderis et momenti apud me habet, ut eam publici juris facere nullus dubitem. Tempore nimirum belli Turcici,

cici, unus ex praefectis exercitus Rossici quartana laborabat febri, quae tunc Moldavica vocabatur, quoniam in Moldavia potissimum saeviebat, eratque pertinacissima. Vir ille illustris, meritis, titulis, ordinibusque ornatissimus, morbo et medicamentis in illa regione debilitatus, rediit tandem Kioviam sub finem Jejunii quadraginta dierum, ad illam praecise hebdomadem, qua Christi patientis et morientis mysteria sancte recoluntur. Ibi imposita sibi abstinentia ab esu carnium per omnem sanctam hebdomadem, conduxit coquam, quae ipsi praepararet cibos ex plane ratione, quae incolis Kioviae in usu est; etenim in cibis etiam praeparandis inter incolas parvae et incolas magnae Rossiae notabilis datur differentia, quae non sine fructu describi posset. Muliercula illa spatio hebdomadis subministrabat domino suo baccas Opuli cum saccharo decoctas, quas ille pani albo inunctas quotidie adhibebat, et per septem dies multo melius convaluit quam a longissimo usu corticis Peruviani, ita ut die Paschatis templum adire potuisset. Continuato dein confectionis baccarum Opuli usu vir ille pristinam sanitatem perfecte recuperavit.

Creberrimus denique usus baccarum Opuli, qui in plurimis Rossiae urbibus jam pridem invaluit, omnem meretur attentionem medicorum, qui aegros suos, morbis et remediis debilitatos, brevi restaurare cupiunt. Mos nempe est apud Rossos, varias baccas dulcibus infundere vinis. Hoc scopo adhibentur baccae Pruni Cerasi, Rubi idaei, R. Saxatilis, R. Arctici, R. Chamaemori, Fragariae vescae, Sorbi aucupariae, Ribis rubrae et nigrae, Opuli et id genus alia. Vina fructibus hisce impraegnata, non odorem tantum saporemque fructuum, sed etiam virtutes eorum manifesto retinent et in corpus humanum exerunt.

Sic

Sic vinum, qnod super baccas Sorbi aucupariae per aliquot hebdomades constitit, recipit in se odorem earum et saporem, ita ut gustato hoc vino, rheum ipsi inesse non frustra credideris: etenim haustus aliquot hujus vini alvum semper movent et leniter purgant. Alia vina, baccis varii generis satiata, suos edunt effectus, quos nemo medicorum hucusque descripsit, licet illi accuratam observationem omnino mereantur. Vinum baccarum Opuli ventriculum roborare et tonum debilis fibrae restituere vulgo creditur, et cum prospero successu frequenter adhibetur. Omnia haec vina, quae baccis infunduntur, opus habent pauca portione spiritus vini, ne acescant, et, ut grato sapore linguam afficiant, sacharo edulcorantur.

Praeterea baccas Opuli tam crudas sed maturas, quam praeparatas quacunque ex dictis methodo, eximiam opem praestare in eruptionibus cutaneis in vulgus notum est; adeo ut non solum plebeii, sed et superioris conditionis homines subministrare eas soleant infantibus, qui laborant scrophulis, strumis aliisque morbis cutaneis, in quibus curandis vires earum summis extolluntur laudibus. Cel. Lepechin, qui medicamenta indigena maximopere praeferebat exoticis, non baccas modo, sed, deficientibus illis, etiam ramos Opuli adhibuit, et praestantissimos effectus inde est expertus. Lignum nempe opuli in taleolas concisum inserviebat ipsi pro decocto aquoso, quod pro usu interno praescribebat infantibus scrophulosis, strumosis et crusta capitis scatentibus. Ipse vir. egregius mirabatur effectus hujus decocti, quo puellam annorum circiter septem ab immani capitis crusta, spatio duarum hebdomadum, penitus liberavit.

Cum

Cum itaque baccae et ipsum lignum Opuli medicatas possideant vires, easdem expectari posse etiam a floribus et foliis hujus arbusculae admodum probabile est; idcirco operae praetium est, ut flores et folia ejus praeserventur ab insectis, quae hic Petropoli, qualibet fere aestate, stupendo numero ea obsident et parenchyma eorum funditus perforant atque corrodunt.

PROTEAE,

PLANTAE GENERIS, SPECIES NOVAE,

DESCRIPTAE A

C. L. THUNBERG.

Conventui exhibita die 13 Febr. 1805.

Proteae omnes e Regionibus prope Polum antarcticum sitis, et plurimae, si non singulae, e Promontorio bonae spei Africes proveniunt. Seculo decimo septimo una alterave species dudum innotuerat; plures vero a Peregrinatoribus seculo proxime praeterlapso fuerunt detectae et a Botanicis descriptae. Postquam autem mihi contigerat, sub trienni apud Hottentottos commoratione, plurimas elegantis hujus et singularis Generis species colligere, vivas examinare et describere, earum longe completiorem dare potui in Dissertatione Academica Catalogum, cum fusioribus descriptionibus et iconibus nonnullarum adjectis. Post id tempus aliae ad meam cognitionem, et has inter etiam novae quaedam species pervenerunt, illae quidem non minus speciosae et singulares, quam ceteri hujus tribus socii.

Has, ne occultae in Herbario meo diutius lateant, horis subcesivis descriptas, adjunctis plerarumque iconibus, cum Illustri Academia Scientiarum communicare volui, ut si dignae judicantur, quae Actis inserantur, Orbi Erudito et Botanico innotescant.

P.

P. Candicans: foliis trifido - bipinnatis filiformibus sericeis, capitulis subspicatis, bracteis ovatis acuminatis.
Protea candicans. Prodrom. Plantar. Capens. p. 186.
Crescit in interioribus Cap. *b.* spei provinciis.
Frutex erectus, superne ramosus, totus sericeo - tomentosus, bipedalis et ultra.
Rami subverticillati, parum ramulosi.
Folia trifido - subbipinnata, filiformia, argentea.
Capitula subsessilia, spicata, vix pisi magnitudine.
Bracteae subquaternae, ovatae, acuminatae.
Corolla apice valde hirsuta.

P. erecta: foliis bipinnatis filiformibus glabris, capitulo terminali sessili globoso.
Frutex totus, excepto capitulo, glaber.
Caulis teres, simplex, erectus, virescenti - brunneus, spithamaeus et ultra.
Folia sparsa, filiformia, pinnata et bipinnata, tri - et quadrijuga pinnulis sensim brevioribus, erecta, palmaria.
Capitulum sessile, foliis cinctum, solitarium, globosum, sericeo-tomentosum, magnitudine Cerasi majoris.
Differt a P. *phylicoide*: 1. capitulo solitario, minori, tomentoso nec lanato.
2. caule simplici, nec ramoso.

P. villosa: foliis trifido - pinnatis filiformibus pilosis, capitulis terminalibus, caule prolifero erecto.
Crescit in montibus promontorii bonae spei.
Frutex erectus, totus pilosus, proliferus, rufescens, bipedalis et ultra, ramulosus.

Rami terni, quaterni, verticillato-proliferi, ramulis similibus.
Folia trifido-pinnata, filiformia, acuta, pilosa, imbricata, pollicaria.
Capitula terminalia, in ramulis solitaria, globosa, hirsuta, nuce avellana majora.
Squamae calycinae extus hirsutae.

P. *spathulata*: foliis inferioribus pinnatis filiformibus, superioribus spathulatis.
Protea spathulata. Dissert. de Protea p. 14 et 44.
Postquam completius specimen obtinui, exinde videre licet, folia hujus speciei occurrere in eodem caule dissimilia, adeoque quod ad primam subdivisionem esse referendam.

P. *odorata*: foliis linearibus mucronatis glabris, capitulis terminalibus oblongis glabris.
Protea odorata. Prodrom. Pl. Capens. p. 187.
Crescit in montibus.
Caulis erectus, glaber, fuscus, ramosus, pedalis et ultra.
Rami subverticillato-terni divaricati.
Ramuli alterni, breves.
Folia sparsa, sessilia, linearia, mucronata, supra convexa, subtus concava a margine revoluto, integra, glabra, incurvato-erecta, pollicaria et ultra.
Capitula terminalia in ramis et ramulis, solitaria, oblonga, glabra, nuce avellana majora.
Calycis foliola lanceolata, cinerea, glabra.
Corollae villosae.

Tab. III. Fig. 1. P. *hirsuta*: foliis ellipticis acutis hirsutis caule capituloque terminali tomentosis.

Fru-

Frutex totus hirsutus, erectus.
Caulis teres, ramosus, pedalis et ultra.
Rami alterni, filiformes, simplices, spithamaei.
Folia sparsa, elliptica; mucronata, integra, nervosa, erecta, unguicularia.
Capitulum in singulo ramo solitarium, globosum, ferrugineo-tomentosum, ceraso paulo majus.

P. *obtusa*: foliis lineari-oblongis obtusis glabris, caule decumbente. Tab. III. Fig. 2.
Caulis fruticosus, teres, pulverulentus, rufescens, decumbens, parum ramosus.
Folia sparsa, sessilia, inferne linearia, superne obovata, obtusissima, integra, glabra, rugosa, secunda, pollicaria.
Capitulum in ramis et apice caulis terminale; tomentosum, magnitudine avellanae.

P. *virgata*: foliis ellipticis acutis callosis obliquis, capitulis terminalibus glabris subrotundis. Tab. III. Fig. 3.
Caulis erectus, glaber, ramosissimus.
Rami verticillati, elongati.
Ramuli superne alterni, virgati.
Folia sessilia, sparsa, approximata, elliptica, acuta, callosa, integra, glabra, erecta, pollicaria.
Capitula in ramulis terminalia, solitaria, ovata, obtusa, piso majora.
Calyx glaber; *corolla* hirsuta.
Differt a P. *parviflora*: foliis acutis capitulisque globosis majoribus.

P.

Tab. IV. Fig. 1. *P. truncata:* foliis obovatis acuminatis glabris, capitulis terminalibus truncatis hirsutis bracteis brevioribus.

Frutex totus, exceptis capitulis, glaber, filiformis, flexuoso-erectus, ultimo apice ramosus, pedalis et ultra.

Rami alterni, subfastigiati, circiter sex, pollicares vel paulo ultra.

Folia sparsa, sessilia, inferne attenuata, obovata, acuminata, integra, erecto-patula, unguicularia.

Capitula in apice ramorum solitaria, globosa, truncata, tomentosa, bracteis obvallata, magnitudine pisi.

Bracteae foliaceae, foliis similes, capitulo dimidio longiores.

Tab. V. Fig. 1. *P. ciliata:* foliis ellipticis glabirs venosis obtusis glandula mucronatis, capitulo terminali oblongo, bracteis lanceolatis coloratis.

Caulis fruticosus, simplex, erectus, villoso-tomentosus, pedalis et ultra.

Folia alterna, sessilia, elliptica, obtusa, glandula terminali mucronata, integra, glabra, venosa, basi subtus et margine inferne villosa, imbricata, bipollicaria et ultra.

Bracteae lanceolatae, pallidae, glabrae, capitulo longiores, foliis breviores.

Capitulum terminale, solitarium, oblongum, cylindricum, bracteis et foliis obvallatum.

P. tenuifolia: foliis lineari-ellipticis callosis glabris, capitulis terminalibus globosis.

Houttuyn Nat. Hist. 2. D. T. 19. fig. 2.

Frutex glaber, purpurascens, erectiusculus, apice ramulosus, pedalis et ultra.

Rami

Rami in summitate alterni, simplices, rarius ramulosi.
Folia linearia, vix apice latiora, integra, glabra, acuta cum callo, curva, unguicularia.
Capitula terminalia, solitaria, globosa, foliis non obvallata, pisi magnitudine.
Corollae hirsutae.

P. *pyramidalis*: foliis elliptico-oblongis obtusis callosis, ramis fastigiatis, capitulis terminalibus globosis glabris. Tab. IV. Fig. 2.

Protea pallens. γ. Diss. de Protea. n. 41.
Frutex erectus, glaber totus, summo apice ramosus, pedalis et ultra.
Rami alterni, simplices, subfastigiati.
Folia inferne valde attenuata, obovato-oblonga, obtusa cum callo, integra, laevia, imbricata, pollicaria.
Capitula terminalia, solitaria, globosa, obtusa, nucis avellanae magnitudine.
Bracteae rameae et capitulum obvallantes pallidiores.
Calycis squamae ciliatae.

P. *verticillata*: foliis lanceolatis calloso-obtusis sericeo-tomentosis, ramis verticillatis. Tab. V. Fig. 2.
Frutex cinereus inferne, superne sericeo-tomentosus, erectus, ramosus, pedalis et ultra.
Rami per intervalla verticillati, subquaterni, erecti, sericei.
Folia in caule decidua, in ramis approximata, imbricata, oblonga-lanceolata, callosa, obtusiuscula, integra, tota argenteo-tomentosa, vix pollicaria.
Capitula terminalia, solitaria, globosa, argentea, piso majora.

P.

P. macrocephala: foliis lanceolatis villosis, caule hirsuto, calycis squamis spathulatis ciliatis.

Boerhaav. Horti Lugduno B. Ind. alt. P. 2. Tab. p. 189.

Frutex simplex, curvato - erectus, totus valde hirsutus, pedalis et ultra.

Folia alterna, sessilia, lanceolata, villosa apice glabriuscula, integra, imbricata, digitalia.

Calycis squamae interiores oblongae, spathulatae, obtusae, margine ciliatae ciliis ferrugineis.

Tab. VI. Fig. 1. *P. laurifolia:* foliis oblongis calloso - acutis marginatis glabris, caule villoso, calycis squamae extus nigro - barbatis.

Frutex rigidus, hirsutus, simplex, erectus, pedalis et ultra.

Folia sparsa, subpetiolata vel basi angustata, oblonga, acuta cum callo, glabra, nervosa, nervo medio et marginali flavescentibus, viridia, erecta, sesquidigitalia.

Capitulum terminale, solitarium, oblongum, maximum.

Squamae calycinae tomentosae; exteriores ovatae, acutae; interiores lineares, apice spathulato - dilatatae, sub apice extus et margine nigro - barbatae.

P. reticulata: foliis lanceolatis glabris venosis, caule glabro, calycis squamis glabris.

Boerhaav. Ind. alt. Horti Lugd. P. 2. Tab. p. 186.

Frutex simplex, glaber, erectus, pedalis et ultra.

Folia sparsa, sessilia, lanceolata callo obtusiusculo, integra, glabra, valde venosa venis elevatis reticulatis, erecto - patentia, digitalia.

Capitulum terminale, solitarium, glabrum, pyri magnitudine.

Su-

Supremae squamae Calycis margine vix vel parum ciliatae.
Corollae sericeae, unguiculares.

P. *scabrida*: foliis lanceolatis marginatis glabris subscabridis, caule glabro, calycis squamis sub apice barbatis.

Boerhaav. Ind. alt. Horti Lugdun. P. 2. Tab. p. 188.
Frutex erectus, glaber, simplex, pedalis et ultra.
Folia sparsa, sessilia, lanceolata, integra, fusca, nervo medio et margine incrassato luteis, glabra, callis inconspicuis scabrida, imbricata, approximata, sesquidigitalia.
Capitulum terminale, solitarium, oblongum.
Calycis squamae inferiores ovatae, interiores oblongae, tomentosae, infra apicem extus nigro-hirsutae, margine barba ferruginea longiori.

P. *daphnoides*: foliis ellipticis callosis inferne villosis, capitulo globoso calyceque glabro. Tab. VI. Fig. 2.

Frutex erectus, albo-hirsutus, subsimplex, pedalis et ultra.
Folia sparsa, sessilia, elliptica, apice callosa, integra, imbricata, pallida, sesquipollicaria; superiora glabra; inferiora mollissimis pilis hirsuta.
Bracteae foliis latiores, glabrae, pallidae.
Capitulum solitarium, terminale, glabrum, nucis moschatae magnitudine.

Explicatio Tabularum.

Tab. III. Fig. 1. *P. hirsuta* magnitudine naturali.

a. corolla clausa.

b. — — explicata.

Fig. 2. *P. obtusa.*

Fig. 3. *P. virgata*, hae ut ceterae magnitudine naturali.

Tab. IV. Fig. 1. *P. truncata.*

Fig. 2. *P. pyramidalis.*

a. capitulum denudatum.

b. flos magnitudine naturali.

c. — — — aucta cum palea pilisque.

d. flos cum pistillo et germine denudato.

e. f. g. partes floris interiores: palea flosculi, squama calycina et pars inferior styli.

Tab. V. Fig. 1. *P. ciliata.*

b. particula caulis perpendiculariter secta, multoties aucta, ut villositas conspiciatur.

i. particula caulis suprema cum receptaculo communi floribus fere omnibus denudato, cum involucro uno residuo et folio florali, ut videatur villositas et calyx communis.

k. squama calycis communis.

l. uncis et pilis receptaculi auctus.

m. flosculus cum squamula magnitudine naturali.

n. squamula eadem seorsim.

o. squamula multoties aucta et a tergo visa.

p. eadem a latere visa.

q. unus e pilis, quibus obsita est squamula 30cies auctus.

r.

r. flosculus magnit. multoties aucta.

s. pistillum, stylo inferne omnino nudo, magnit. multoties aucto.

Fig. 2. *P. verticillata.*

Tab. VI. Fig. 1. *P. laurifolia.*

a. squama intima calycis communis e latere interiosi visa.

b. flosculus unus.

c. limbus laciniae latioris corollae cum duabus antheris.

d. basis pistilli cum lana, magnitudine parum aucta.

Fig. 2. *P. daphnoides.*

e. capitulum bracteis denudatum.

f. corolla cum squama.

g. pistillum.

COMMENTATIO BOTANICA

IN

GENUS ZIZIPHORA DICTUM

AUCTORE

I. HENRICO RUDOLPHO. D.

Conventui exhibita die I. Maii. 1805.

Sectio prima

etymologico-historica.

Si quid est in me scientia botanica copia aliqua, eam pro amplitudine provinciae meae in censendis ac rimandis plantarum speciebus Rossiae indigenis ex omni parte convertere, meum esse arbitror. Conscripturus itaque epicrisin generis cujusdam regni vegetabilis Rossici, ex prioribus classibus systematis sexualis, selegi Ziziphoram genus quod civitate botanica donavit eques sempiternae memoriae Linné et Rutheniae indigenum et cujus forsan species omnes coluntur in horto botanico Academiae Scientiarum Petropoli florentis. Quodsi Linnaei principis rei botanicae miraris aciem ingenii, cognitionis rerum naturalium amplitudinem, noli divum colere instar nonnullorum discipulorum suorum qui illum nunquam per errorem lapsum fuisse; sibi assentiuntur cum devinum esse in illo fingunt: *nam Deum honor* (teste Tacito Annal. 15. 74. 5.), *principi non ante habetur, quam agere inter homines desierit.* Homo erat, et nihil

nihil humani a se alienum esse, saepius in scriptis suis confessus est: *neminem tam esse circumspectum, cujus non diligentia sibi ipsi aliquando excidat* (a). Ego omni officio, ac potius pietate erga Linnaei merita obstrictus, rem tractare incassum non credo si et rimando et elucitando dicta illius principis rei botanicae vera adipisci, curam ago.

Morisonum (b) sequutus in recepto nomine barbaro semetipsum accusat Linnaeus: *Quasimodogenita*, inquit (c), „*assu-* „*mimus nomina barbara, dum vocabula excludenda nova reddimus,* „*formata e lingua graeca aut latina.*" Huc et retulit *Ziziphoram* absque ulla supposita etymologia; melius sibi dictisque consuluisset, quodsi nomen istud regulae datae haudquaquam accomodatum ad nomina sequentia (l. c.) *gratis recepta* retulisset.

Omnes vere scriptores botanici conveniunt, originem nominis *Ziziphorae* a *Zizi* indorum duxisse, liceat in medium ferre novissimi decennii Viros praeclaros, scilicet: *G. R. Boehmerum* (d); *Ventenat.* (e) *Ziziphora*, inquit, „*qui porte le Zizi;* „*de deux mots, dont l'un est indien et l'autre grec.*" Quid

autem

(a) Vide Introitum Syst. Naturae.

(b) Plant. hist Oxon. Tom. III. p. 374. n. 5. *Clinopodium humile Syriacum, breviori Folio, Ziziferum dictum.*

(c) Philos. bot. Edit. I. p. 163.

(d) Lexicon rei herbariae. Lips. 1803. p. 245.

(e) Tableau du regne végétal. A Paris, an VII. Tome II. p. 329.

autem significat *Zizi*, ubivis silentium; opinione ex *Ziziphi* cognomine arboris veteribus bene noti, aliquid veri erui posse, pervolui frustra auctorum rei herbariae vasta Opera *Plinii*, *Palladii*, *Columellae*; exquisivi graecorum monumenta botanica eorumque commentatores absque emolumento, nisi quod fructus *Rhamni Ziziphi* L. Ζίζιφα, Ζίζυφα, Ζίνζιφα, Ζίτζυφα, Ζίτζινφα et Ζίτζυφα nuncupari. Sunt et Ζυγία (*Carpinus*, *Acer*, *Evonymus*, Cici (*Ricinus*) quod vero graece Κίκι audit. Omnia haec allegata nomina vanum et sterilem dant etymologiam. Tandem duce *Mentzelio* (*f*), pervenit in manus: *Nardi Antonii Recchi* opus de historia naturali mexicana singulare (*g*), quo in opere (Libr. VIII, c. 6.) obviam mihi venit: *Cicimatic* Phaseoli species; ibidem p. 369: *Cicipeni* semen esculentum; exinde non opus est Oedipo, *Zizi* designare fructum esculentum. Omitto convenientiam nominis graeci et mexicani scrutatoribus linguarum prisci aevi. Num vero stabilita etymologia nominis *Zizi* potes similitudinem extricare inter nomen indicum *Zizi* et plantam de qua agimus id est plantam semen esculentum ferentem et Ziziphoram Linnaei, quodsi inveneris Συμφώνησιν notionum, magnus mihi eris Apollo.

Quae cum ita sunt, non dubito, quin plerique judicaturi sint, commutandum esse nomen barbarum, contra regulas botanicae critices compositum, quam sententiam et jamdudum amplexi

---

(*f*) Index nominum plantarum universalis. Berol 1682. Fol.

(*g*) Nova plantarum, animalium et mineralium mexicanorum historia. Romae 1651, 4to.

amplexi sunt *Micheli* et *Heister*; quorum alter proposuit *Hedyosmon* (*h*); alter in memoriam cujusdam praeclari botanici ex Stirpe Zwingeriana (Theodori) *Zwingeriam* (*i*).

Quum vero nomen Hedyosmos accipere summis viris in re herbaria non placuit et in mnemosynen Zwingeri Cl. *Schreberus* (*k*) aliud plantarum genus selegit; nomen genericum aptius proponendum et illud barbarum delendum esse videatur: velim meminisse *Dioscoridis Zygin*, plantam similem Serpylli (*l*), et genus plantarum de quo agitur nuncupare *Zygiphoram*; repugnat nomen neque formae sive habitui plantarum hujus generis describendarum (*m*) neque

---

(*h*) Act. Nat. Cur. 1718. app. 211. (Ἡδυσμὸς aroma).

(*i*) *Fabric.* hort. Helmst. Edit. II. p. 107.

(*k*) *Linnaei* genera plant. ed. *Schreberi* No. 1752. Quod Genus *Haencke* in edit. Generum plantatum neglexit; cui *Gmelin* (Ed. Syst. Nat. T. II. p. 700) sub nomine *Simala* locum naturalem addixit, solertissimus de re botanica meritissimus Willdenow (Edit. Spec. plant. T. II. S. I. p. 569.) restituit.

(*l*) Ζύγις ἀγρία (ἀγρεῖα): *Zygis appellatum* (de Serpyllo agit.) *non serpit, sed in altitudinem crescit.* Dioscorid. L. III. 41. et V. c. 3. *Zygis non humi serpens, ut hortuale, sed suberectum. Apul.* de herb. c. 99. Confer. *Clusii* rari r. plant. hist. L. III. c. 43. p. 358. *Mentz.* Ind. p. 280.

(*m*) *Ζύγιον jugo conjunctum* apprime et egregie refert et ramulorum et foliorum oppositorum conjunctionem: nolo repugnare siquis mavult sequi *Bodaeum* (in Edit. Theophr. Eresii hist. pl. p. 693.) et derivate

neque plane diversum imo fere consonum Τὸ ὁμόιοτονον, abhorret nomen propositum *Wolffii Epheffaerc* (n).

---

derivare a *Ζέυγνύω jungo*, *quia*, inquit, *ramuli juncti in altitudinem ecrescunt*.

(n) Genera et Species plant. vocabulis characteristicis definita. Marienwerder 1781. p. 40. et Sect. II. p. 14.

COMMEN-

COMMENTATIO ANATOMICA

ABORTUS HUMANI MONSTROSI RARISSIMI DESCRIPTIONEM AC DELINEATIONEM SISTENS.

AUCTORE

P. ZAGORSKY.

Conventui exhibita die 4. Sept. 1805.

Inter innumera, quotquot recensentur a variis scriptoribus, ludentis Naturae prodigia, quibus hanc rerum omnium foecundissimam genitricem quasi delectari videmus, non infimum gradum obtinere meretur abortus humanus sexus sequioris, capite et artubus superioribus orbus, obque alia rariora momenta maxime memorabilis.

Monstrorum cujusvis generis, tanto magis humanorum multifaria ostenta omnis aevi eruditorum attentionem in se vertisse, demonstrant quamplurimae observationes, quae, si vel ad remotiora hinc tempora ascendamus, vel proximiora spectemus, ubivis nobis occurrent, tum sparsae tum industria magni nominis virorum collectae. In adeo tamen ingenti copia perpaucas dari, quibus adnexae sunt historiae anatomicae, sane miraberis. Defectum hunc jam seculi nuper elapsi indefessus incisor clarissimus annotavit Hallerus, qui inter quingentas circiter observationes, ex probatioribus scriptis congestas, vix ultra sexagin-

xaginta anatomice illustratas numerare potuit. Pleriqae scriptorum, superioris praesertim aetatis, sectiones monstrorum nullius frugis censuisse videntur; hinc, verosimile est, eas neglexerunt, solaque artuum externorum, a naturali ordine plus minus deflectentium, descriptione contenti fuere. Talis autem perlustratio superficiaria, nisi ipsi accedat scrutinium partium absconditarum, quae saepenumero variant mirum in modum, nequaquam potest curioso satisfacere animo.

Non oppono, neque ullum inficias iturum spero, ex anatomia corporum, ad leges ac debitam Naturae normam constructorum, plus utilitatis praestari in cognoscenda penitiore fabrica, plusve lucis affulgere in determinanda justa organorum functione, quam ex sectione subjectorum monstrosorum; non ideo tamen haec est plane negligenda. Si prior emolumento eminet, posterior, cui etiam hoc in totum denegari nequit, non minus gratia novitatis se commendat. Omnino anatomia monstrorum, praeterquod non prorsus destituatur utilitate in solvendis vel confirmandis quibusdam conjecturis physiologicis, habet insuper suas illecebras: ministrat enim crebras occasiones inveniendi nova, detegendi rara, quae nunquam non grate sensus nostros afficiunt, mentemque in admirationem et voluptatem persaepe rapiunt. E contra res suetae, objectaque magis familiaria tantum abest ut nostram stimulent attentionem, ut etiam vilia videantur, immo taedio fieri non raro soleant.

Probandae amoenitati, quam mens curiosa novitatisque avida ex sectione monstrorum capere potest, quamque reapse experiuntur simili exercitatione serio sese occupantes, non immorabor, quippe quae non est instituti mei ratio: sed raritates tantum

tum in abortu nostro, cultro anatomico subjecto observatas, quas ad naturam delineari curavi, hac commentatione breviter proponam.

Perlustratio externa.

Abortus, cujus descriptionem aggredior, mediam graviditatem jam superasse videtur. Externum ejus habitum inspiciens, non potui non animadvertere primo intuitu, illum quam maxime a sueta norma abludere, a capite ad calcem. Inprimis caput ejus, vel potius tuber id mentiens (ut postea innotuit), pilis brevibus, raris, mollibus, flexuosis obsitum, deorsum inclinatum pectori incumbebat; emittens prolongationem quandam cutaneam, ad attactum mollem, cui parva appendicula subrotunda, duriuscula, sinisteriora versus affixa cernebatur.

Collum apparebat nullum.

Extremitatum superiorum plenarium defectum, posteriorum manifestam deformitatem vidi. Femora ambo, sed praecipue sinistrum, justo crassiora, crus sinistrum longe brevius, parteque inferiore sursum et extrorsum versum, erant. Pes extremus dexter introrsum, sinister, simili ratione ac crus ejusdem lateris, sursum scilicet extrorsumve cum planta inversa, spectabat. Numero digitorum uterque pes peccabat. Dexter enim quatuor, sinister tres tantum digitos, quorum unguiculi erant breves, molles, imperfecti, possidebat.

Porro tergo hujus monstrosi foetus appensus erat saccus amplus, maculis fuscis frequentibus, maxime in media et postica

sui parte, notatus, qui a summitate corpusculi incipiens ad lumbos usque protendebatur, gradatim ampliatus. Longitudo ipsius 5 circiter, latitudo $3\frac{1}{2}$ ad finem praecipue, altitudo 3 pene pollicibus aequalis erat.

Praeterea partes quoque thoracis laterales tumidiores, quam fieri solent ac debent, videbantur.

Ipse foetus, $9\frac{1}{2}$ pollices longus, lancibus impositus duas circiter libras ponderis medici ponderabat.

Sacco, qui tactus signa fluctuationis dabat, aperto, inter musculos dorsi et integumenta in conspectum prodiit cavitas spatiosa, latice seroso, turbido, partim in grumos et floccos coacto albos, impleta, qualis etiam in lateribus thoracis, sed parca quantitate, integumentis incisis deprehensus est.

Tum appendicem, capitis putatitii parti anteriori adhaerentem, simulque ipsum hoc caput a thorace dimovi et elevavi, sed vultus vestigia deprehendi nulla; in superiore autem appendicis parte vidi foramen subrotundum, semipollicem circiter latum, intra quod reperiebatur particula subglobosa, cum foraminis ambitu nexa, indolis fere corneae, et cujus marginem superiorem cingebat linea leviter arcuata, supercilii formam prae se ferens. Particula illa oculi male formati, ni fallor, foramen orbitae vicem gerebat. Orae appendicis inferiori, dexteriora versus, aderant duae aliae appendiculae consistentiae densioris, duritie et forma verrucarum similes, quarum inferior major erat.

Demum

Demum integumntis super tubere, quod caput putavi, linea recta incisis, non sine admiratione nulla capitis ossa inveni. Incisione autem altius inflicta, tumorem hunc totum quantus erat constare ex substantia paene gelatinosa, satis solida, ultra pollicem crassa, in parte elevatiore praecipue, mihique capitis formam imposuisse, vidi. Sub sectione tamen tumoris continuanda percepi, ad partem ejus posteriorem, resistentiam corporis duri, quod, cum denudaverim, atlantem esse cognovi. Ante hanc vertebram visa est apertura triangularis, cui stilus ferreus immissus alte in specum vertebralem penetrabat.

Disquisitio interna.

His omnibus ordine descripto a me notatis, et ab artifice, quem praesto habui, accurate, ut rei gravitas postulabat, delineatis, ad cavitates trunci lustrandas accessi, hic quoque aliquid naturae contrarium occursurum esse, minime dubitans.

Eventus spem meam non fefellit. Aperto enim thoracis cavo, quod nimis angustum erat, nulla viscera functionibus vitalibus dicata inveni, excepta massa quadam oblonga, deformi, solidiuscula, ad dextra situm occupante, superius impressione sat profunda donata, quae principis humorum circulandorum organi (dabat enim originem vasis) locum tenuisse videtur, quamvis figura ejus nec non aliae conditiones penitus erant cordi dissimiles. Quanta nunc detentus fui admiratione! Admiratio mea multo magis increvit, cum etiam in cavo abdominis quaedam viscerum chylopoeorum defuisse perspexerim. Non reperi epiploa, ventriculum, neque quod fundo hujus vicinum est vis-

cus, lienem deprehendi; tubum vero intestinalem, qui mesenterio in varios gyros convolutus, terminabatur ut mos est in anum, observavi incipere fine coeco et libero in regione epigastrica sub diaphragmate, ad vertebrus lumborum. Reliqua viscera hujus cavi, praeter renem sinistrum, qui major dextro erat, perfecte naturae conformabantur.

Defectus lienis, deficiente eodem tempore ventriculo, addere videtur pondus sententiae cl. Moreschi, qui aenigmaticum illud viscus non ad hepatis sed ventriculi functionem contribuere arguit. Obiter hoc monendum duxi.

Exemtis denique hepate, pancreate et intestinis, persequutus sum vasa, quorum originem a spurio illo corde in cavo pectoris annotavi. Unum horum mediam fere partem abdominis ad vertebras occupabat, initioque erat angustum; quo autem inferius descendebat, eo plus latitudine crescebat et, quartam lumborum vertebram attingens, findebatur in duo vasa iliaca, quorum dextrum amplitudine superabat et sinistrum et ipsum truncum. Truncus in itinere suo insignes impertiebat ramos hepati, mesenterio et reni utrique. Duo alia, utrinque ad lumbos visa sunt vasa, quae itidem originem suam ducebant a parte sinisteriori et inferiori massae, cordis officium supplentis, descendendo ampliabantur et infra divisionem praecedentis copulabantur inter se trunco transverso peramplo; postea iterum discedendo, alterum dextram, alterum sinistram regionem pelvis petebant. Prius vas, ob majus robur tunicarum, pro arteria Aorta, posteriora pro vena cava duplici assumere non dubitavi.

Haec sunt notabiliora ostenta, quae in rarissimo hoc monstro, a me secto sese obtulerunt! Reliquas minoris momenti abnormitates omitto.

Expli-

Explicatio tabularum.

Tabula VII.

Fig. I. Sistit monstrum acephalum et extremitatibus superioribus destitutum, sexus sequioris.

A. Tuber pilis obsitum, caput pectori incumbens, mentiens.

B. B. Partes laterales pectoris.

C. C. Vestigia mammarum.

D. Saccus cutuneus a summitate corporis per dorsum ad lumbos protensus, a parte dextra visus.

E. Appendix seu prolongatio membranacea cum minori alia appendicula duriuscula, sinisteriora versus e. spectante.

F. Umbilicus.

G. Partes pudendae.

H. H. Femora, quorum sinistrum longe crassius dextro.

I. Crus dextrum.

K. Pes extremus ejusdem lateris, introrsum flexus, 4 digitis instructus.

L. Crus sinistrum, deforme, justo brevius, sursum et extrorsum reflexum.

M. Pes extremus ejusdem lateris cum planta sursum et extrorsum inversa et tribus digitis instructus.

Fig. II. Majorem partem trunci repraesentat, ubi tuber s. caput nothum sursum et sinistrorsum est retractum.

A. A. Partes larerales thoracis.

B. B. Mammae.

C. Umbilicus.

D. D. Abdominis pars infraumbilicalis.

E. Tuber, caput mentiens sinistrorsum retractum.

F. Sacci dorsalis portio, a sinistra et superiore parte extra tuber prominens.

G. Appendix.

H. Foramen, in quo

I. Particula indolis fere corneae inventa est.

K. Linea distincta, arcuata, marginem foraminis superiorem cingens, supercilio haud absimilis.

L. Duae aliae appendiculae, verrucarum similes.

Fig. III. Partem superiorem abortus s. tuber capitis formam imponens, longitudinaliter dissectum exhibet.

A. A. Partes laterales pectoris.

B. Appendix.

C. Adumbratio foraminis Fig. II. descripti H.

D. D. Partes laterales tuberis dissecti.

E. E. Substantia tuberis ultra pollicem crassa in medio.

F. Initium columnae vertebralis.

G. Apertura triangularis, ante primam vertebram, cum specu vertebrali communicans.

Tabula VIII.

Figura I. Eundem foetum monstrosum e latere sinistro visum repraesenrat, ut saccus dorsalis et appendix cum suo foramine in conspectum prodeant

A. Tuber.

B. Appendix.

C. Saccus, maculis fuscis notatus.

Fig.

Figura II. Exhibet truncum cum parte extremitatum inferiorum, vertebris colli denudatis et cavitatibus pectoris ac abdominis apertis.

A. Vertebrae colli, a pectore dimotae (erant enim inclinatae), elevatae et sinistrorsum reflexae.

B. Apertura fere rotunda inter duas primas vertebras, cum specu vertebrali communicans.

C. Cavitas pectoris aperta, nimis angusta.

D. Massa deformis, cordis vicem gerens, cum impressione in superiore et sinistra sua parte.

E. Diaphragma.

F. Initium tubi intestinalis, s. intestinum duodenum sub diaphragmate ad vertebras lumborum incipiens extremitate libera, obtusa, coeca.

G. Intestinum coecum cum suo processu vermiformi.

H. Finis ilei intestini in regione iliaca dextra.

I. Colon, quod transversim fere, vel levi arcu formato infra umbilicum, pergebat sinistrorsum et factis pluribus convolutionibus in regione iliaca sinistra, continuabatur in rectum.

L. L. Renes, quorum sinister totus cum vase suo, dexter ex parte tantum apparet.

Figura III. Eaedem cavitates, diaphragmate, intestinis et hepate ablatis, repraesentantur, ut vasa in cavitate pectoris ortum ducentia appareant in abdomine.

A. Vertebrae colli.

B. Foramen, cum specu communicans.

C. C. Partes thoracis laterales.

D. Cavitas thoracis.

E. Massa s. cor male formatum.

F. Impressio.

G. Origo vasis quod pro arteria Aorta habui, cum ramis abscissis.

H. Origo alteriis vaſis duplicis, quod pro vena cava inferiore aſſumo.

I. Ren ſuccenturiatus ſiniſter.

L. L. Renes.

M. M. Ureteres.

N. Diviſio Aortae in arterias iliacas.

O. Truncus transverſus amplus, venam duplicem inter ſeſe nectens

P. P. Venae iliacae.

Q. Inteſtinum rectum abſciſſum.

SUR

SUR UN MÉLANGE GRANITIQUE PARTICULIER DE FINNLANDE

PAR

BASILE SEWERGUINE.

Présenté et lû en Conférence le 30 Octobre 1805.

Parmi la quantité nombreuse de pierres de roche aggregées de Finnlande il y en a une qui me paroit meriter l'attention des Mineralogistes, par une substance particulière qu'elle contient et dont la nature n'est pas encore parfaitement determinée.

Au premier coup d'oeil elle a l'apparence de n'être autre chose qu'une varieté de Feldspath, mais en l'examinant de plus près et surtout dans les échantillons les mieux caractérises, on trouve qu'elle en diffère à plusieurs égards et semble approcher de l'espèce de pierres que le célebre Haüy a designée par le nom de la *Diallage*, de sorte qu'elle doit en faire une varieté particulière, ou bien qu'elle peut être considerée comme une espèce de pierres qui tient le milieu entre la Diallage et le Feldspath, de la manière que j'aurai l'honneur de proposer ci-dessous.

Pour pouvoir mieux apprécier les conformités et les différences qui s'y trouvent, je vais rapporter les caractères de la Diallage de Haüy et ceux de la substance en question, comme il suit.

Diallage de Haüy *).

Caractère essentiel. Une seule coupe nette. Lames cassantes. Couleur verte ou d'un gris éclatant.

Pésanteur spécifique: 3.

Dureté. Rayant toujours la chaux carbonatée et quelque fois légérement le verre.

Caractères géometriques. Substance lamelleuse, ayant des joints naturels asséz nets dans un sens, et d'autres ternes, sensibles seulement à la lumière d'une bougie et qui paroissent *à peu près perpendiculaires sur les précédens.* Les lames sont souvent *fendillées* dans un autre sens, en sorte qu'elles paroissent tendre à se diviser en rhombes.

Substance particulière de la Finnlande.

Le même. Excepté que la couleur passe d'un vert clair, au gris verdâtre et au verd jaunâtre.

Celle de notre substance à 2,500.

Rayant sensiblement le verre.

Les mêmes. Ce n'est que dans un seul morceau que j'ai remarqué une tendance à former un cristal asséz gros à prisme indistincte tetraèdre.

Ca-

*) Traité de Minéralogie Tom. 3. Paris 1801. pag. 125. Haüy cite les synonymies suivantes: *Smaragdite* de Saussure: Voyage dans les Alpes Nro. 1313 et 1362. *Feldspath Vert* de Delisle. Tom. II. p. 544. *Schorl feuilleté verdâtre en grandes lames.* Born. Catal. Tom I p. 380 *Emeraudite*, *Smaragdite* de Daubenton Tabl. p 15. — Enfin peut être l'Allochroite de *Dandrada* appartient elle à la substance en question.

Caractère chimique. Fusible au chalumeau, en email gris ou verdâtre.

Variétés.

a) laminaire.
b) compacte.

Couleurs et chatoyemens.

a) verte.
b) sattinée.
c) metalloide. C'est la *Labradorische Hornblende* des Mineralogistes allemands.

Fusible en un verre asséz transparent d'une couleur grise noirâtre et avec une perte de 0,03 pour Cent *).

Les mêmes et en outre reniforme et annulaire.

Les mêmes. Excepté qu'il y en a une de couleur verte jaunâtre, et une autre talcqueuse. La variété métalloide de Haüy se trouve quelque fois de couleur noire bleuâtre.

J'ajouterai à ces caractères, par rapport à notre substance, qu'elle est peu luisante, que ses lames sont asséz fines et pour la plupart d'une forme irregulière, que je ne les ai jamais vû d'une parfaite transparence et qu'elles sont tout-au-plus translucides; enfin qu'elle est mediocrement seche au toucher et un peu froide.

On voit par ce qui a été exposé que notre substance se distingue du Feldspath vert et même en quelque sorte de la Dial-

*) C'est dans un creuset de Hesse et dans un fourneau de reverbere, que cette expérience a été faite et ce ne sont que les coins des lames les plus minces qui se sont fondus.

Diallage de Haüy, et que plutôt elle semble tenir le milieu entre ces deux éspèces de pierres, sur quoi cependant l'analyse chymique doit décider.

C'est à 18 verstes vers le Sud de la forteresse Davydoff, située entre Willmanstrand et Fridrichsham et à 3 verstes d'un petit village, nommé *Lotala*, que j'ai trouvé les échantillons de cette substance les mieux caracterisés, en allant visiter une ancienne minière de plomb qui devoit s'y trouver. Tout le terrein entre Davydoff et Lotala est rempli de rochers éscarpés granitiques et de marais.

La montagne qui devoit contenir ces mines de plomb, a une pente assez douce et se prolonge du Sudest vers le Nord-ouest. Le puit qui y a été effectivement pratiqué autre fois se trouva sur le sommet de la montagne. Il avoit à peu près trois Sagènes de profondeur. Cependant je n'y ai trouvé aucune veine particulière. Au contraire toute la montagne consiste d'une masse uniforme de granit à gros grains, dont les parties constituantes sont: 1) du Feldspath de couleur rougebrunâtre en plaques, quelque fois d'un pouce et plus de diamètre; 2) des grains de Quartz gris; 3) de minces feuillets de Mica noire et 4) de notre substance verte, que j'ai crû devoir designer par un nom particulier et notamment par celui de *Lotalalite* (ou en l'abrégeant: *Lotalite*) du lieu de son gîte; un nom qui lui semble appartenir d'autant plus qu'elle differe, comme je l'ai prouvé, et du Feldspath et de la Diallage, à la quelle cependant elle s'approche beaucoup.

Quant à la mine de plomb, elle ne contient que de la galène de plomb ferrugineuse et même celle-cy ne s'y trouve que

ça

ça et là dispersée en forme de grains, de noeuds ou de reins dans la masse granitique décrite ci-dessûs.

En examinant depuis de plus près les masses granitiques qui se trouvent le long du Golfe de Wybourg, j'ai retrouvé la même substance.

C'est ainsi que les superbes colonnes granitiques qu'on exploite dans ce dernier endroit, pour decorer la nouvelle Eglise cathédrale de la St. Vierge de Kazan qui se batit à St. Pétersbourg, contiennent, outre les parties ci-dessûs mentionnees encore de la Lotalite. Etant poli, ce granit par le mélange et l'arrangement des couleurs rougeâtre, noire et verte fait un très bel effet.

Comme cet endroit aussi me semble mériter l'attention des géologues, je vais en donner une description plus détaillée.

La carrière d'où l'on tire les colonnes mentionnées, se trouve sur le coté méridionale d'une Isle dans le golfe de Wybourg qui fait une partie du golfe de Finnlande. Cette Isle a à peu-près une verste de longueur sur une demie verste de largeur. Elle présente sur sa surface en partie une masse de pierre uniforme et denuée de toute végétation, en partie elle est récouverte de différentes éspèces de mousses, d'Erica, de Mirtilles, de menu bois de pin, de quelques génévriers etc. Il est rémarquable encore que cette roche toute granitique qu'elle est, présente sur sa surface de marais. Dans quelques endroits elle est recouverte de gravier qui provient de la décomposition du granit.

Toute

Toute la partie méridionale et presque la totalité de l'Isle consiste d'une seule masse de granit de la qualité decrite ci-dessûs. Mais vers les bords où cette masse se plonge dans l'intérieur de la mer pour en former une partie du fond, on la croit voir comme divisée en couches de l'epaisseur de presque quatre Archines qui vont en s'inclinant vers les bords dans la direction du sud. Je ne saurois dire si on doit attribuer ces couches à l'infiltration des eaux qui aidées du tems peuvent effectivement occasionner des fissures et des séparations semblables dans des masses de pierres les plus dures, comme on le voit ailleurs? Ou est ce encore de la nature du granit, de se déposer en couches épaisses dans l'acte de sa formation, comme plusieurs Naturalistes semblent l'attester? Ou enfin faut il régarder ces couches comme une suite de ces parties naturellement detachées que les Mineralogistes allemands comprennent sous le nom de *abgesonderte Stücke?* Ce qui est certain c'est que cette circonstance soulage beaucoup les travailleurs qui s'occupent de l'exploitation de ce granit, au point, qu'aussitôt qu'ils sont parvenû en travaillant à la première de ces séparations naturelles, il leur coute très peu de peine d'en détacher les blocs nécessaires. Le même arrive quand ils parviennent à la seconde couche etc. Au reste cette carrière avoit de mon tems près de 16 Sagènes de longueur et l'on en avoit retiré des blocs pour soixante colonnes de quatre Sagènes de longueur sur un diamêtre proportionné.

Pour revenir à la Lotalite ou à la substance particulière qui se trouve dans ce granit, en l'envisageant de plus près, elle me paroit enfin être un mélange très intime de Feldspath et de la Diallage, comme le Quartz est très intimément melé avec du Strahlstein dans l'espèce de pierre nommée Prase. Et si

si l'on a eu raison de donner à ce dernier un nom particulier, notre substance doit être dans le même cas. J'ai deja dit qu'elle se trouve en lames, reniforme etc. Ce qu'il y a de très-remarquable, ce sont ces anneaux, ayant quelque fois jusqu'à un pouce de diamètre, qu'elle forme autour des parties du Feldspath proprement dit, ou dans les quels les parties du Feldspath brun du granit, semblent être comme encastrées. C'est dans les granits qui ont une tendance à la décomposition que ces anneaux sont les plus visibles et qui viennent ainsi à l'appui de ce que j'ai avancé tantôt. Et en effet la décomposition semble être ici accompagnée d'une récomposition des particules detachées du Mica et du Feldspath, qui auront pû former la Diallage verte sattinée de Haüy et puis en se mêlant intimément avec le Feldspath, l'ont pû faire passer à l'état de la Substance que j'ai designée par le nom de Lotalite. Du moins il seroit très-difficile d'expliquer autrement cette forme singulière d'anneaux que prend la Lotalite, dans les granits de Finnlande. Il faut y remarquer encore que le Feldspath des granits de ce pays se fait voir ordinairement en plaques rondes ou en forme de reins entourés des grains de Quartz et de feuillets de Mica, dont le développement ultérieur sera exposé dans une des dissertations que je me propose de présenter à l'Académie, sur les granits de Finnlande en général.

ASTRONOMIE.

OBSERVATIONS
DE L'ECLIPSE DE SOLEIL LE 11 FEVRIER ET DE CELLE DES PLÉJADES LE 12 AVRIL, N. ST.
FAITES À L'OBSERVATOIRE DE L'ACADÉMIE EN 1804.

PAR

F. T. SCHUBERT.

Présenté le 16 Mai 1804. lû le 7. Septembre 1804.

Le commencement de la grande éclipse de Soleil le 11 Fevrier, et la plupart des phases furent observées par Mr. Wisnefski seul, parceque j'etois appellé à la cour, pour assister à l'observation que S. M. l'Impératrice vouloit faire de cette éclipse. Le reste des phases et la fin a été observé tant par Mr. Wisnefski que par moi. Nous nous sommes servi d'une lunette achromatique de $3\frac{1}{2}$ pieds faite par Dollond, avec un grossissement de 60, et d'un teléscope Grégorien de 2 pieds, garni d'un héliomètre, fait par Short, grossissant 40 fois, avec lequel nous avons mesuré plus de trente phases dont j'ai choisi seize des plus exactes, rejetant celles qui, étant trop peu éloignées l'une de l'autre, ne pourroient donner une grande exactitude.

Le *commencement* fut observé à $1^h\ 15'\ 6'',781$; la *fin* à $3^h\ 35'\ 33'',167$ tems moyen de St. Pétersbourg; la *plus grande* phase de 11 doigts 6 minutes, et la *durée* de $2^h\ 20'\ 26'',4$.

La

La valeur des parties du micromètre objectif a été déterminée par le diamètre du Soleil, lequel étant mesuré avec le plus grand soin, l'index marqua 4 pouces, 5 parties de 20, et 6 parties de 25, de la règle et du Vernier. Le diamètre du Soleil étant ce jour-là de 32′ 20″,32; il s'en suit qu'un pouce du micromètre vaut 7′ 38″,03664; une partie de 20 = 22″,9018; et une partie de 25 = 0″,9161.

Le point de zéro, ou le premier point de la division fut vérifié par des étoiles de la septième grandeur, ce qui donna l'erreur de collimation = — deux parties de 25, c'est-à-dire = — 1″,8.

Pha-

Phases, et distances des cornes de la Lune, mesurées avec l'héliomètre.

Tems moyen	Largeur de la partie éclairée du Soleil, ou phases négatives		Distances des cornes		Inclinaison à l'horison
	en parties de l'héliomètre	en minutes et secondes d'un degré	en parties de l'héliomètre	en min. et secondes d'un degré	
			20 25		
1ʰ.17′.23″,8.	–	–	1. 1. 10.	8′. 9″,33.	44°. 30′.
1. 22. 22,8.	–	–	1. 16. 22,5.	14. 5,12.	45.
1. 24. 29,8.	–	–	2. 1. 23.	16. 0,36.	45.
1. 25. 56,8.	–	–	2. 4. 18.	17. 4,64.	45. 30.
1. 27. 7,8.	–	–	2. 7. 0.	17. 57,03.	46.
1. 28. 29,8.	20 25		2. 9. 2.	18. 44,80.	46.
2. 23. 22,6.	0. 7. 12,5.	2′. 49″,93.	–	–	6.
2. 25. 32,6.	0. 6. 10,5.	2. 25,50.	–	–	32.
2. 29. 18,6.	0. 6. 20.	2. 34,96.	–	–	70.
3. 20. 28,5.	–	–	2. 12. 13,5.	20. 11,76.	48.
3. 24. 15,5.	–	–	2. 7. 3.	18. 7,65.	49.
3. 25. 27,5.	–	–	2. 4. 22.	17. 16,17.	49.
3. 26. 33,4.	–	–	2. 2. 6.	16. 15,33.	49.
3. 28. 25,4.	–	–	1. 18. 0.	14. 37,62.	
3. 30. 53,4.	–	–	1. 9. 20.	11. 28,39.	
3. 33. 25,4.	–	–	1. 1. 15,5.	8. 19,35.	

Immersions et émersions des taches du Soleil.

Tab IX. Fig. 1.

Immersion de la tache **A**, du premier bord = 1ʰ. 19′. 4″,8.
du dernier bord = 1. 19. 32,8.

Im-

Immersion de la tache B,	du premier bord	=	$1^h. 20'. 48'',8$.
	du dernier bord	=	1. 21. 14,8.
Immersion de la tache C,	du premier bord	=	1. 47. 45,7.
	du dernier bord	=	1. 48. 29,7.
Immersion de la tache D,	du premier bord	=	2. 21. 19,6.
	du dernier bord	=	2. 21. 44,6.
Emersion totale de la tache B	(un peu douteuse)	=	2. 32. 28,6.

La fin de l'éclipse est un peu douteuse, et il est très-possible qu'elle a eu lieu 2 ou 3 secondes avant cette époque, parceque malheureusement, le Soleil étant couvert par intervalles pendant plusieurs secondes par la grosse fumée d'une cheminée voisine, l'époque indiquée est l'instant où le Soleil, après avoir été invisible 4 ou 5 secondes à cause de cette fumée, se fit voir, sans être éclipsé. Quant aux phases, il étoit impossible d'atteindre une grande précision, parceque le Soleil, à cause du froid excessif et des vapeurs dont l'atmosphère étoït chargée, surtout vers la fin de l'éclipse, ondoioit d'une maniere extraordinaire.

Pour calculer ces observations, je me suis servi des tables solaires de M. de Zach, et de celles de la Lune, qu'on trouve dans la troisieme édition de l'*Astronomie* de M. Lalande. J'ai supposé l'applatissement de la terre $= \frac{1}{330}$, la latitude de St. Pétersbourg $= 59° 56' 23''$, et sa longitude comptée du méridien de Paris $= 1^h 51' 58''$. J'ai diminué le demi-diamètre du Soleil de $3'',5$ à cause de l'irradiation, et celui de la Lune (tiré des tables de Mr. Lalande, où il est déjà diminué de $1'',5$) de $1'',5$ à cause de l'inflexion, comme celà se pratique généralement. Le calcul m'a donné les résultats suivans.

Tems

	Pour le commencement	Pour la fin
Tems moyen	1^h. 15'. 6",781.	3^h. 35'. 33",167.
Ascension droite moyenne du Soleil	21. 21. 16,265.	21. 21. 39,335.
Obliquité de l'écliptique	23°. 28'. 8",60.	23°. 28'. 8",60.
Longitude vraie du Soleil = ☉'	10^s.21°.36'. 7",50.	10^s.21°.42'. 2",43.
Longitude vraie de la Lune = ☾	10. 21. 30.24,36.	10. 22. 52. 16,38.
Latitude vraie de la Lune = b	+ 40.59,66.	+ 48. 29,30.
Parallaxe horisontale de la Lune sous l'équateur	58.48,92.	58. 52,20.
— — — — pour St. Pétersbourg	58.40,10.	58. 43,38.
— — — du Soleil	8,60.	8,60.
— — — relative = Q	58.31,50.	58. 34,78.
Mouvement horaire du Soleil = h	2.31,62.	2. 31,62.
— — — de la Lune en longitude = H	34.56,03.	34. 59,54.
— — — de la Lune en latitude = β	+ 3.12,15.	+ 3. 12,06.
Demi-diamètre du Soleil = r	16.15,16.	16. 15,16.
— — — de la Lune = R	16. 2,07.	16. 2,96.
Le même corrigé par la hauteur = R'	16. 6,32.	16. 4,84.
Parallaxe de longitude = λ	— 25.27,40.	— 38. 42,93.
Longitude apparente de la Lune = ☾'	10. 21. 4.56,96.	10. 22. 13. 33,45.
Latitude apparente de la Lune = b'	— 9.37,35.	+ 4. 57,84.
Somme des demi-diamètres, ou distance apparente des centres au moment du contact = s'	32.16,50.	32. 15,00.
Différence des longitudes apparentes par l'observation = a'	30.48,44.	31.51,94.
La même par les tables	☉'-☾'=31.10,54.	☾''-☉''=31.31,02.
Erreur des tables en longitude	22,10.	20,92.

Il s'en suit que les tables donnent la longitude de la Lune trop petite, ou bien celle du Soleil trop grande d'environ 21'',5. En supposant que la fin a été observée trop tard de 3 secondes, on trouveroit ☾'' — ☉'' = 31' 29'',62 (le mouvement apparent relatif de la Lune étant de 1'',403 en 3 secondes),

par conséquent l'erreur des tables = 22″,32 presque égale à celle du commencement, ce qui donneroit le milieu = 22″,21.

La seule observation de cette éclipse, qui est venue à ma connaissance, est celle de Gotha (Voy. *Zachs monatl. Corresp. Märtz 1804.*) où la fin fut observée à 2^h 7′ 12″,15 tems moyen. M. de Zach, ayant employé dans le calcul de cette observation de nouvelles tables du Soleil et de la Lune, plus correctes que celles dont je m'etois servi, trouve pour cet instant la vraie longitude du Soleil = 10^s 21° 41′ 14″,8; celle de la Lune = 10^s 22° 46′ 31″,2; sa latitude = + 48′ 0″,8; et l'erreur des tables lunaires en longitude = + 4″,3. En réduisant ces lieux vrais à l'instant de la fin de l'eclipse à St. Pétersbourg, moyennant les mouvemens horaires, et la difference des meridiens de St. Pétersbourg et de Gotha = 1^h 18′ 23″, on obtient la vraie longitude du Soleil = 10^s 21° 41′ 40″,0; celle de la Lune = 10^s 22° 52′ 19″,96 ou bien corrigée par l'erreur des tables = 10^s 22° 52′ 15″,66; et sa latitude = + 48′ 32″,7: partant ☾ — ☉ = 1° 10′ 35″,66 au lieu de 1° 10′ 13″,95 que j'ai trouvé: d'où il résulte que l'erreur des tables lunaires de M. Lalande n'est que = + 0″,72; celle des tables solaires de M. de Zach = + 22″,43; et l'erreur totale de la longitude rélative de la Lune = — 21″,71: ce qui est très-bien d'accord avec le milieu de — 21″,5 ou — 22″,21 que j'ai trouvé par notre observation.

Cette éclipse ayant été à St. Pétersbourg presque centrale, l'erreur en latitude n'y peut avoir qu'un effet insensible, d'autant que par l'observation de Gotha, elle ne parait être que de — 3″,4; et l'on verra que le calcul des phases observées ici m'a donné à-peu-près la même erreur.

Nom-

Nommant x, y, z, les corrections dont la longitude rélative de la Lune, sa latitude, et sa parallaxe ont besoin, et u le nombre de secondes dont l'observation a été faite trop tard, le calcul des observations de St. Pétersbourg m'a dónné les équations suivantes:

I. pour le *commencement*, $\partial s' = + 22'',59 - 0,9556 \,.\, x - 0,2947 \,.\, y + 0,6706 \,.\, z + 0,5318 \,.\, u$;

II. pour la *fin*, $\partial s' = - 19'',19 + 0,9877 \,.\, x + 0,1561 \,.\, y - 0,7688 \,.\, z - 0,5428 \,.\, u$;

$\partial s'$ étant la correction des demi-diamètres. Supposant donc $\partial s' = 0$, l'observation du commencement juste, et celle de la fin trop tard de 3 sec. $= u$, les deux équations deviendront:

I. $0 = + 22'',59 - 0,9556 \,.\, x - 0,2947 \,.\, y + 0,6706 \,.\, z$;

II. $0 = - 20'',82 + 0,9877 \,.\, x + 0,1561 \,.\, y - 0,7688 \,.\, z$.

Faisant $y = + 3'',4$ conformément à l'observation de Gotha, on aura

I. $0 = + 21'',63 - 0,9556 \,.\, x + 0,6706 \,.\, z$;

II. $0 = - 20'',29 + 0,9877 \,.\, x - 0,7688 \,.\, z$.

Comme les coefficiens de z sont presqu'égaux et de signes contraires, et que d'ailleurs la correction de la parallaxe ne peut être que peu considerable, on peut égaler z à zero, et ensuite prendre le milieu des deux équations. Alors la première équation donne $x = + \frac{21'',63}{0,9556} = + 22'',635$; la seconde $x = + \frac{20'',29}{0,9877} = + 20'',543$: dont le milieu est $= + 21'',59$ à-peu-près le même que ce que j'ai trouvé ci-dessus, et ce

Rrr 2 que

que l'observation de Gotha a donné. La petite différence entre les deux valeurs de x provient de ce que nous avons supposé $\partial s'$ et $z = 0$.

Dans le calcul de la conjonction vraie, je supposerai donc $x = + 21'',6$; c'est-à-dire qu'il faut augmenter la longitude rélative de la Lune de $21'',6$: ce qui donne pour le commencement ☾ $= 10^s 21^\circ 30' 46''$, pour la fin ☾ $= 10^s 22^\circ 52' 38''$: par conséquent la différence des longitudes vraies $5' 21'',5$ et $1^\circ 10' 35',6$. On convertira ces différences en tems, moyennant les mouvemens rélatifs de la Lune, qui sont de $32' 24'',41$ et de $32' 27'',92$; ce qui donne $9' 55'',25$ et $2^h 10' 27'',92$: d'où il résulte le *tems moyen de la vraie conjonction*, par le commencement $= 1^h 15\ 6',78 + 9' 55'',25 = 1^h 25' 2',03$; et par la fin $= 3^h 35' 33'',17 - 2^h 10' 27'',92 = 1^h 25' 5'',25$: ce qui fait encore croire que la fin a été observée trop tard de 3 secondes. Par la même méthode, on trouve le tems de la conjonction vraie à Gotha $= 0^h 6' 42'',10$: ce qui donne la difference des meridiens $= 1^h 18' 20''$ ou $23''$, par conséquent celle des méridiens de St. Petersbourg et de Paris $= 1^h 51' 55''$ ou $58''$. La difference de ces meridiens est, selon M. Lexell, par l'occultation de α♉ $= 1^h 51' 55'$, par celle de γ♉ $= \ldots 57''$, selon M. Krafft, par une éclipse de Soleil $= \ldots . 57'',5$; selon M. Roumofski, par une éclipse de Soleil $= \ldots 58''$.

Le calcul des seize phases, quoique assés différentes l'une de l'autre, m'a donné, en prenant le milieu, presque les mêmes résultats. Je ne présenterai ici que les résultats du calcul, savoir, la distance apparente des centres déduite immédiatement de la phase mesurée, $= s'$, la longitude et la latitude apparente de la Lune, ☾$'$ et b' calculées moyennant les parallaxes, la dif-

différence des longitudes apparentes de la Lune et du Soleil, a', concluе de s' et de b', enfin l'erreur des tables en longitude x, tirée de la comparaison de a' avec ☾′ — ☉′. Voici les résultats.

Phases	Tems moyen	s'	☾′ — ☉′	b'	a'	a''	x
I.	1ʰ.17′.23″,8.	31′.13″,61.	—30′.11″,84.	—9′.23″,72.	29′.46″,79.	29′.47″,77.	—24″,07.
II.	1. 22. 22,8.	29. 2,23	—28. 3,74.	—8. 53,97.	27. 38,40.	27. 39,40.	—24,34.
III.	1. 24. 29,8.	28. 1,44.	—27. 9,33.	—8. 41,34.	26. 38,58.	26. 39,60.	—29,73.
IV.	1. 25. 56,8.	27. 23,04.	—26. 32,06.	—8. 32,68.	26. 1,00.	26. 2,02.	—30,04.
V.	1. 27. 7,8.	26. 49,16.	—26. 1,64.	—8. 25,62.	25. 27,65.	25. 28,68.	—32,96.
VI.	1. 28. 29,8.	26. 16,13.	—25. 26,51.	—8. 17,46.	24. 55,56.	24. 56,59.	—29,92.
VII.	2. 23. 22,6.	2. 42,37.	— 1. 26,24.	—2. 33,57.	0. 52,76.	1. 2,73.	—23,51.
VIII.	2. 25. 32,6.	2. 17,92.	— 0. 28,38.	—2. 19,96.	- - -	- - -	-
IX.	2. 29. 18,6.	2. 27,34.	+ 1. 12,22.	—1. 56,29.	1. 31,31.	1. 35,37.	—23,15.
X.	3. 20. 28,5.	25. 8,77.	+24. 28,00.	+3. 24,35.	24. 54,86.	24. 54,44.	—26,44.
XI.	3. 24. 15,5.	26. 40,52.	+26. 14,15.	+3. 47,87.	26. 24,22.	26. 23,77.	— 9,62.
XII.	3. 25. 27,5.	27. 14,30.	+26. 47,81.	+3. 55,25.	26. 57,29.	26. 56,84.	— 9,03.
XIII.	3. 26. 33,4.	27. 51,33	+27. 18,63.	+4. 2,06.	27. 33,74.	27. 33,28.	—14,65.
XIV.	3. 28. 25,4.	28. 44,62.	+28. 11,00.	+4. 13,63.	28. 25,93.	28. 25,47.	—14,47.
XV.	3. 30. 53,4.	30. 8,45.	+29. 20,20.	+4. 28,93.	29. 48,37.	29. 47,90.	—27,70.
XVI.	3. 33. 25,4.	31. 9,47.	+30. 31,28.	+4. 44,64.	30. 47,67.	30. 47,19.	—15,91.

On voit que la conjonction apparente tombe entre la VIII et la IX phase, et l'on trouve par une interpolation, en tenant compte de l'erreur en longitude trouvée ci-dessus, qu'elle a eu lieu à 2ʰ 25′ 46″, 5 où la latitude apparente fut de — 2′18″, 5 et la distance des centres de 2′15″, 3: ce qui donne l'erreur en latitude = — 3″, 2, égale à celle trouvée ci-dessus. Presque la même erreur résulte immédiatement de la VIII phase, très-peu éloignée de la conjonction, où la distance des centres est par l'observation = 2′17″, 92 et la latitude apparente selon les tables = 2′19″, 96: d'où il suit que l'erreur des

des tables en latitude est entre 2″ et 3″. J'ai donc refait le calcul avec cette correction de la latitude de 3″,2: ce qui m'a donné les différences corrigées des longitudes, marquées *a*″. Le milieu entre ces quinze résultats donne l'erreur des tables en longitude = — 22″, 37; c'est-a-dire que les tables de Lalande et de Zach donnent la longitude de la Lune moins celle du Soleil trop petite de 22″, ou bien la longitude du Soleil moins celle de la Lune trop grande de 22″, ce qui est bien d'accord avec l'erreur que nous avons trouvée par l'immersion et l'émersion à St. Pétersbourg, et par l'émersion à Gotha.

Le 12. Avril, entre 9 et 10 heures du soir, presque toutes les étoiles des Plejades ſurent éclipsées par la Lune, deux jours après sa conjonction avec le Soleil: de sorte que les immersions se firent dans la partie obscure de la Lune, et les émersions dans la partie éclairée. Le peu de lumiere que la Lune avoit alors, auroit donné une grande facilité de faire ces observations avec la plus grande précision, si la Lune ne se ſût déja trouvée dans les grosses vapeurs de l'horison (sa hauteur n'étant que de 7 à 15 degrés), au point qu'il étoit presqu' impossible de saisir l'instant de l'émersion de ces petites étoiles dont la plupart étoit de la 7 grandeur. D'ailleurs, aucune de ces occultations n'ayant été annoncée dans les Ephémérides de Berlin, je n'avais pu calculer les points et les instans des émersions, ainsi que je le fais ordinairement: et cette intéressante observation aurait été tout-à-fait perdue, si par un heureux hasard je n'avois pas été à l'observatoire, dans l'intention de mesurer

mesurer avec le micromètre la distance d'Alcyone à la Lune, qui devoit être très-petite. Mais à peine avais-je dirigé la lunette vers la Lune, que j'apperçus un tas de petites étoiles que la Lune alloit éclipser. Dans l'espace d'une heure j'ai observé conjointement avec M. Wisneſki, douze immersions et deux émersions qui se succédèrent si rapidement qu'il étoit impossible d'en observer d'avantage: p. ex. entre l'immersion de l'étoile XI et celle de l'étoile XII il s'écouloit à peine une seconde. Il n'y eut jamais entre mon observation et celle de M. Wisnefski une difference d'une demi-seconde, et nous continuames d'observer les immersions jusqu'à ce que la Lune fut si près de l'horison qu'il n'y avait plus moyen de distinguer les petites étoiles, quand elles approchoient de la Lune. Voici nos observations en tems moyen.

I. *Immersion* d'une étoile de la 7 grandeur, No. 60 dans le grand catalogue de M. Bode . . .	à	8^h. 59′. 41″, 47.
II. *Immersion* de *Mérope* de la 5 grandeur	à	9. 3. 18, 66.
III. *Immersion* d'une étoile de la 7 grandeur, No. 70 de Bode . .	à	9. 7. 14, 65.
IV. *Immersion* d'une étoile de la 7 grandeur	à	9. 9. 32, 45.
V. *Immersion* d'une étoile de la 7 grandeur, No. 86 de Bode, 24. *p* de Flamstead	à	9. 21. 25, 43.
VI. *Immersion* d'*Alcyone* de la 3 grandeur	à	9. 24. 15, 53.
VII. *Emersion* de *Maja* de la 6 grandeur	à	9. 25. 31, 92.

VIII.

VIII. *Immersion* d'une étoile de la 7 grandeur, peut-être No. 79. de Bode à $9^h. 29'. 32''$, 81.

IX. *Immersion* d'une étoile de la 7 grandeur, No. 95 de Bode . . à 9. 31. 11, 40.

X. *Immersion* de *Plejone* de la 7 grandeur . . . . . . à 9. 59. 29, 76.

XI. *Immersion* d'*Atlas* de la 6 grandeur à 10. 0. 41, 36.

XII. *Immersion* d'une étoile de la 8 grandeur, apparemment No. 109. de Bode à 10. 11. 35, 33.

XIII. *Immersion* d'une étoile de la 8 grandeur, très-proche de XII à l'occident . . . . . . à 10. 11. 36, 03

XIV. *Emersion* d'*Alcyone* de la 3 grandeur . . . . . . à 10. 13. 22, 33.

Parmi ces étoiles il y a quelques unes que je n'ai pu reconnoitre, parceque le catalogue et le dessein le plus détaillé des Plejades, savoir celui que Jeaurat en a donné dans la *Connoiss. des tems pour l'année* 1787, n'est pas très-exact, comme je m'en suis apperçu à cette occasion. Il parait que la constellation des Pléjades merite encore les soins particuliers des astronomes.

Aucune observation corréspondante n'étant jusqu'ici venue à ma connaissance, je n'en ai pu tirer de résultat pour déterminer la longitude géographique. J'ai calculé cependant quelquesunes de ces occultations, pour en conclure les erreurs des tables. Quant aux étoiles, j'ai employé la table que M. Bode a donnée dans sa *déscription des constellations* 1801. Voici les résultats de mon calcul, l'obliquité de l'Ecliptique étant supposée de $23^\circ\ 28'\ 9''$.

Immer-

	Immersion de No. 60	Immersion de *Merope*	Immersion de No. 70	Immersion de No. 86
Ascension moyenne de l'étoile	53°. 29′. 42″, 3	53°. 41′. 0″, 0.	53°. 42′. 31″, 7.	53°. 55′. 59″, 0.
Déclinaison moyenne	23. 43. 11, 1.	23. 19. 50, 2.	23. 38. 11, 1.	23. 30. 7, 8.
Ascension apparente	53. 29. 37, 35	53. 40. 55, 1.	53. 42. 26, 8.	53. 55. 54, 0.
Déclinaison apparente	23. 43. 16, 1.	23. 19. 55, 2.	23. 38. 16, 1.	23. 30. 12, 9.
Longitude apparente	56. 53. 29, 3.	56. 58. 1, 67.	57. 3. 44, 5.	57. 13. 51, 2.
Latitude apparente	4. 21. 18, 2	3. 56. 9, 94	4. 13. 39, 8.	4. 2. 55, 8.
Longitude vraie de la Lune	57. 25. 6, 73.	57. 27. 22, 44.	57. 29. 49, 90.	57. 38. 41, 30.
Latitude vraie	4. 50. 6, 63	4. 50. 3, 29.	4. 49. 59, 66.	4. 49. 46, 48.
Demi-diametre	16. 39, 83.	16. 39, 69.	16. 39, 55.	16. 39, 02.
Parallaxe de longitude	— 41. 12, 73.	— 41. 5, 50.	— 41. 3, 53.	— 40. 41, 55.
Latitude apparente	4. 7. 58, 88	4. 7. 42, 88.	4. 7. 26, 03.	4. 6. 23, 55.
Longitude apparente	56. 43. 54, 0.	56. 46. 16, 94.	56. 48. 46, 37.	56. 57. 59, 75.
Différence des longitudes par l'observation	— 10. 2, 27.	— 12. 2. 35.	— 15. 29, 50.	— 16. 19, 66.
La même par les tables	— 9. 35, 30.	— 11. 44, 73	— 14. 58, 13.	— 15. 51, 45.
Erreur des tables	+ 26, 97.	+ 17, 62.	+ 31, 37.	+ 28, 21.

	Immersion d'*Alcyone*	Emersion d'*Alcyone*	Immersion de No. 95	Immersion d'*Atlas*
Ascension moyenne de l'étoile	53°. 58′. 0″, 0.	- - -	53°. 59′. 0″, 3.	54°. 23′. 8″, 00.
Déclinaison moyenne	23. 29. 26, 9.	- - -	23. 40. 56, 8.	23. 26. 42, 53.
Ascension apparente	53. 57. 55, 1.	- - -	53. 58. 55, 4.	54. 23. 3, 30.
Déclinaison apparente	23. 29. 32, 0.	- - -	23. 41. 1, 9.	23. 26. 47, 55.
Longitude apparente	57. 15. 29, 8.	- - -	57. 19. 6, 0.	57. 37. 19, 61.
Latitude apparente	4. 1. 49, 9.	- - -	4. 12. 47, 6.	3. 53. 46, 79.
Longitude vraie de la Lune	57. 40. 27, 33.	58°. 11′. 7″, 88.	57. 44. 47, 26.	58. 3. 57, 56.
Latitude vraie	4. 49. 43, 83	4. 48. 56, 82.	4. 49. 37, 34.	4. 49. 8, 87.
Demi-diamètre	16. 38, 91.	16. 37, 06.	16. 38, 65.	16. 37, 54.
Parallaxe de longitude	— 40. 37, 08.	— 38. 30, 35.	— 40. 14, 76.	— 39. 24, 70.
Latitude apparente	4. 6. 11, 05.	4. 2. 28, 79.	4. 5. 42, 19.	4. 3. 39, 34.
Longitude apparente	56. 59. 50, 45.	57. 32. 37, 53.	57. 4. 32, 50.	57. 24. 32, 86.
Différence des longitudes par l'observation	— 16. 6, 61.	+ 16. 38, 78.	— 15. 5, 89.	— 13. 24, 42.
La même par les tables	— 15. 39, 35.	+ 17. 7, 73.	— 14. 33, 50.	— 12. 46, 75.
Erreur des tables.	+ 27, 26	+ 28, 95.	+ 32, 39.	+ 37, 67.

L'erreur des tables est partout positive, c'est-à-dire que les tables donnent la longitude de la Lune par rapport à l'etoile trop grande, ou bien celle de l'étoile trop petite. Je n'ai pas employé dans ce calcul la diminution du demi-diamètre de la Lune de $1\frac{1}{2}''$ à cause de l'inflexion. Nommant ∂R et y, les corrections qu'exigent le demi-diamètre et la latitude de la Lune moins celle de l'étoile, on trouve le tems T de la conjonction vraie de la Lune avec *Alcyone*,

par l'immersion $= 8^h\, 45'\, 1'', 06 + 1, 65.\, \partial R - 0, 43.\, y$,
par l'émersion $= 8^h\, 45'\, 3'', 86 - 1, 60.\, \partial R + 0, 06.\, y$:
Supposant donc $\partial R = 0$, on obtient $y = -5'', 6$ et $T = 8^h\, 45'\, 3'', 47$; mais en faisant $\partial R = -1'', 5$: on a $y = -15'', 2$ et $T = 8^h\, 45'\, 5'', 28$.

Dans le premier cas, on trouve l'erreur des tables en longitude $= + 28', 8$ c'est-à-dire la correction qu'exige la longitude de la Lune moins celle de l'étoile $= - 28'', 8$; et dans le second cas $= - 29'', 9$.

ANIMAD-

ANIMADVERSIONES DE METHODO DETERMINANDI LOCUM COMETAE OPE PROIECTIONIS.

AUCTORE

F. T. SCHUBERT.

Conventui exhibita die 28. Jun. 1804.

§. 1. Elementa orbitae cometae trium vel plurium observationum ope determinata rigoroso constat subjicienda esse examini, quod absolvitur comparando omnes cometae locos, quotquot observationes suppeditant, iis cum locis, quos cometa iisdem temporibus occupare debebat in orbita ex elementis computata. Hos quidem locos calculo satis cognito reperire licet, neque sine ejusmodi calculo summa exactitudo obtineri potest. Cum autem simile examen pluries sit instituendum, quo elementa gradatim ad majorem exactitudinem provehantur, cumque supputatio loci cometae dato observationis tempori convenientis non parum difficilis sit atque prolixa, satius videtur, ipsum calculum ultimo examini summaeque hinc obtinendae exactitudini reservare, examina vero praecedentia, ubi maxima exactitudo obtineri nondum potest, methodo projectionum longe expeditiore ac faciliore instituere. Methodus haec in eo consistit, quod orbitae cometae nec non telluris, vero quem erga se invicem habent situ delineentur, tumque utraque orbita in dies, horas, minuta, etc. dividatur, inchoando a transitu cometae per perihelium, cujus epocham elementa suppeditant. Quibus praemis-

 sis,

sis, nihil jam est facilius, quam ad quodvis tempus locos cometae tellurisque respondentes definire, ideoque et longitudinem cometae geocentricam elementis assumtis convenientem: sicque vix ullo temporis vel operae impendio, elementa orbitae cum innumeris observationibus comparare licet, ac si non conveniant, primus intuitus plerumque docet, quo pacto elementa sint mutanda, ut melius conveniant.

§. 2. Methodus haecce projectionum sequente modo optime absolvi posse videtur. Orbita cometae juxta elementa constructa ad Eclipticam est reducenda; orbitamque reductam construendi, et quodvis in ea punctum puncto in orbita vera dato respondens determinandi, modum facillimum docuimus in nostra *Astronomia Theoretica Vol. II.* §. 319. Datis jam per elementa
Tab. IX. linea nodorum SN, lineae perihelii projectione SP, atque linea
Fig. 2. aphelii telluris SA, capiatur SC eccentricitati telluris aequalis, et radio orbitae telluris CA = 1 describatur circulus AT, qui ope tabularum solarium, per anomalias AST, ASE, in dies, horas, etc. facillime dividitur. Restat itaque similis divisio orbitae cometae, verae aut reductae, siquidem una ex altera facile deducitur.

§. 3. Methodum orbitam parabolicam ita dividendi facillimam docuit Neutonus in *Princ. Phil. Math. Lib. I. Problem.* 22. quae nititur sequente propositione: *Quodsi cometa in Para-*
Fig. 3. *bola PC, cujus vertex in P, focus in S, juxta Kepleri leges progreditur, circuli per quemvis cometae locum C nec non per puncta P, S, ducti centrum F in linea recta AF, lineam PS normaliter bisecante, celeritate uniformi progreditur.* Quare cum cometa per perihelium P transeunte, circuli hujus centrum necessario

cessario sit in A, quovis alio momento, quo cometa in puncto C haeret, linea AF proportionalis erit tempori, quo cometa arcum parabolicum PC descripsit. Quoniam autem orbitae cometarum non sunt parabolae sed ellipses aut hyperbolae, haud inutile duxi, examen instituere, quatenus praestantissima haec proprietas, aut alia similis, ceteris coni sectionibus conveniat, hasque speculationes, quae simul Theorematis Neutoniani elegantissimi concinnam demonstrationem praebebunt, Academiae offerre.

§. 4. Sit itaque PC *Ellipsis*, cujus alter focus in S, Fig. 3. perihelium in P, axis major $= a$, semidistantia focorum seu eccentricitas $= \frac{1}{2} ae$, distantia perihelii PS $= p = \frac{1}{2} a (1 - e)$: quamobrem e quovis ellipsis puncto C demisso ad axem perpendiculo CD $= y$, captisque abscissis a vertice PD $= x$, aequatio ad ellipsin erit

$$y^2 = (1 - e^2)\, x\, (a - x),$$

seu posito $1 - e^2 = c^2$, $\frac{x}{a} = u$,

$$y = c\sqrt{ax(1-u)} = \tfrac{1}{2} acu^{\frac{1}{2}} (2 - u - \tfrac{1}{4}.u^2 - \tfrac{1.3}{4.6}u^3 - \tfrac{1.3.5}{4.6.8}u^4 - \text{etc.}),$$

unde sequitur

$$\text{area PDC} = a\int y\partial u = a^2 cu^{\frac{3}{2}} (\tfrac{2}{3} - \tfrac{u}{5} - \tfrac{1}{4}.\tfrac{u^2}{7} - \tfrac{1.3}{4.6}.\tfrac{u^3}{9} - \text{etc.}).$$

Praeterea habemus aream trianguli

$$\text{SDC} = \tfrac{1}{2} (x - p)\, y = \tfrac{a}{4} (2u - 1 + e)\, y$$

$$= \tfrac{a^2}{8} cu^{\frac{1}{2}} (2 - u - \tfrac{1}{4} u^2 - \tfrac{1.3}{4.6} u^3 - \text{etc.}) (2u - 1 + e)$$

$$= \tfrac{a^2}{4} cu^{\frac{3}{2}} (2 - u - \tfrac{1}{4} u^2 - \tfrac{1.3}{4.6} u^3 - \text{etc.})$$

$$- \tfrac{1-e}{8} a^2 cu^{\frac{1}{2}} (2 - u - \tfrac{1}{4} u^2 - \tfrac{1.3}{4.6} u^3 - \text{etc.}):$$

unde

unde resultat area sectoris elliptici PSC =

$$S = a^2 c u^{\frac{3}{2}} \left[\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} - \left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}.\tfrac{1}{4}\right) u - \left(\tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}.\tfrac{3}{6}\right)\tfrac{u^2}{2} - \text{etc.}\right]$$

$$+ \tfrac{1-e}{4} a^2 c \sqrt{u} + \tfrac{e}{8} a^2 c u^{\frac{3}{2}} \left(1 + \tfrac{1}{4} u + \tfrac{1.3}{4.6} u^2 + \tfrac{1.3.5}{4.6.8} u^3 + \text{etc.}\right)$$

$$= a^2 c u^{\frac{3}{2}} \left(\tfrac{1}{24} + \tfrac{3u}{160} + \tfrac{5u^2}{448} + \tfrac{35u^3}{4608} + \text{etc.}\right) + \tfrac{1-e}{4} a^2 c \sqrt{u}$$

$$+ \tfrac{a^2}{8} c u^{\frac{3}{2}} \left(1 + \tfrac{u}{4} + \tfrac{u^2}{8} + \tfrac{5u^3}{64} + \text{etc.}\right) - \tfrac{1-e}{8} a^2 c u^{\frac{3}{2}} \left(1 + \tfrac{u}{4} + \tfrac{u^2}{8} + \tfrac{5u^3}{64} + \text{etc.}\right).$$

§. 5. Ducta jam FE ad CD normali, est

$$FS^2 = \tfrac{1}{4}p^2 + (y - CE)^2, \text{ et } FC^2 = (x - \tfrac{1}{2}p)^2 + CE^2:$$

quare cum sit FS = FC, oritur

$$y^2 - 2y.CE = x(x-p),$$

ideoque $CE = \frac{y^2 - x(x-p)}{2y}$,

unde obtinetur distantia centri ab axe, h. e.

$$AF = z = \frac{y^2 + x(x-p)}{2y} = \frac{x(c^2 a + e^2 x - p)}{2ac\sqrt{u}} (1-u) - \tfrac{1}{2}, \text{ sive}$$

$$z = \frac{au^{\frac{1}{2}}}{4c} (1 + e - 2e^2 + 2e^2 u)\left(1 + \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1.3}{2.4}u^2 + \tfrac{1.3.5}{2.4.6}u^3 + \tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}u^4 + \text{etc.}\right)$$

$$= \frac{(1-e)(1+2e)}{4c} a u^{\frac{1}{2}} + \frac{(1-e)(1+2e)}{8c} a u^{\frac{3}{2}} \left(1 + \tfrac{3}{4}u + \tfrac{5}{8}u^2 + \text{etc.}\right)$$

$$+ \tfrac{a}{2c} u^{\frac{3}{2}} \left(1 + \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1.3}{2.4}u^2 + \tfrac{1.3.5}{2.4.6}u^3 + \text{etc.}\right) - \tfrac{1-e^2}{2c} a u^{\frac{3}{2}} \left(1 + \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1.3}{2.4}u^2 + \text{etc.}\right).$$

§. 6. Priusquam ulterius progrediamur, non e re erit, formulas praecedentes ad parabolam applicare. Scilicet cum parabolae parameter sit $= 4p$, ideoque $y^2 = 4px$, reperitur

area $PDC = \int y \partial x = \frac{4}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} xy$,

area $SDC = \frac{1}{2}(x-p)y$, proinde $S = \frac{y(x+3p)}{6}$, et

$$z = \frac{y(3px + xx)}{2y^2} = \frac{y(x+3p)}{8p} = \frac{3S}{4p};$$

quae est propositio Neutoniana. Cum enim, per theoriam Kepleri,

pleri, area sectoris S tempori quo describitur proportionalis sit, aequatio $z = \frac{3}{4p} S$ docet, esse quoque AF tempori proportionalem, sive centrum circuli, de quo hic sermo est, in recta AF uniformiter procedere. Per eandem theoriam constat, esse tempora, quibus duo planetae vel cometae quemvis arcum permeant, directe ut areas sectorum descriptorum, et inverse ut radices parametrorum. Quare si in orbitis cometae atque telluris, tempora designentur literis, T, t, sectores S, s, parametri B, b, erit

$$T = \frac{S \sqrt{b}}{s \sqrt{B}} t.$$

Si porro, posito radio orbis terrestris $= 1$, loco t substituitur annus sideralis $=$ A, s erit area totius ellipsis terrestris, proinde $s = \pi \sqrt{\frac{b}{2}}$, denotante π rationem perimetri circuli ad diametrum: unde sequitur

$$T = \frac{S\sqrt{2}}{\pi \sqrt{B}} A,$$

atque in parabola, ubi est $B = 4p$,

$$T = \frac{A S}{\pi \sqrt{2p}}.$$

Quodsi jam annus diebus exprimitur, erit

$$A = 365, 256379; \frac{A}{\pi \sqrt{2}} = 82, 2116 = m:$$

unde fit $T = \frac{2mS}{\sqrt{B}} = \frac{m}{\sqrt{p}}$, atque $z = \frac{3T}{4m\sqrt{p}}$,

in qua formula p exprimere oportet partibus radii orbis terrestris, T autem est tempus a transitu cometae per perihelium elapsum integrisque diebus expressum.

§. 7. Formulae (§. 4. 5.) quae quantitates S, z, in ellipse definiunt, primo intuitu docent, relationem inter aream vel tempus et distantiam centri F ab axe admodum intricatam esse, neque in genere simpliciter exhiberi posse. Cum autem hic nonnisi de cometarum orbitis sermo sit, seu de ellipsibus quarum eccentricitas ingens est, ut quantitas e (§. 4.) propemodum

dum unitati sit aequalis, posita $e = 1 - 2\epsilon$, ϵ quantitas erit valde parva, quarum potestates altiores spernere licet. Cum praeterea cometas nonnisi circa perihelium observare liceat, plerumque x non major erit distantia perihelii p, quapropter $\frac{x}{a} = u$ quantitas minima erit, quarum dignitates altiores pariter rejicere licet. Quibus praesuppositis, erit

$$e^2 = 1 - 4\epsilon;\ c = 2\sqrt{\epsilon},\ (1 - e)(1 + 2c) = 6\epsilon, \text{ ideoque}$$

$$S = a^2 c u^{\frac{1}{2}} \left[\frac{u}{6} + \frac{u^2}{20} + \frac{3u^3}{112} + \frac{5u^4}{288} + \text{etc.} + \frac{\epsilon}{2}\left(1 - \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} - \frac{u^3}{16} - \text{etc.}\right)\right]$$

$$= a^2 \epsilon^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}} \left[\frac{u}{3} + \frac{u^2}{10} + \frac{3u^3}{56} + \frac{5u^4}{144} + \text{etc.} + \epsilon\left(1 - \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} - \frac{u^3}{16} - \text{etc.}\right)\right]$$

$$\text{et } z = \frac{a u^{\frac{1}{2}}}{4\sqrt{\epsilon}} \left[u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1.3}{2.4}u^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6}u^4 + \text{etc.} + \epsilon\left(3 - \frac{5}{2}u - \frac{7}{8}u^2 - \frac{9}{16}u^3 - \text{etc.}\right)\right]$$

Rejectis jam potestatibus quantitatis u secunda altioribus, fit $S = a^2 \epsilon^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}} (\epsilon + \frac{u}{3})$, et $z = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{u}{\epsilon}}(3\epsilon + u)$, ideoque $z = \frac{3S}{4a\epsilon}$. Cum itaque sit (§. 4.) $p = \frac{1}{2}a(1 - e) = a\epsilon$, erit $z = \frac{3S}{4p}$, non secus ac in parabola (§. 6.), modo observetur, aream S in ellipse alium induere valorem. Supra (§. 6.) reperimus $S = \frac{T\sqrt{B}}{2m}$: quare cum ellipsis parameter B sit $= a(1 - e^2)$, seu proxime $B = 4a\epsilon = 4p$, fiet $z = \frac{3T}{4m\sqrt{p}}$, non secus ac in parabola. Perspicimus igitur, methodum istam elegantissimam et simplicissimam a Neutono inventam a parabola ad ellipsin transferri posse, si observationes a perihelio tam parum fuerint remotae, ut potestates $\frac{x}{a}$ secunda altiores respui queant.

§. 8. Major autem obtinebitur exactitudo, formulis prioribus (§. 7.) adhibitis, unde relationem quae inter S et z obtinet, sequente modo eruemus. Cum posita $u = v^2$ et $\epsilon = \eta^2$, sit $\frac{S}{a^2} =$

$$\frac{S}{a^2} = \eta v\left[\varepsilon + \left(\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{2}\right)v^2 + \left(\frac{1}{10} - \frac{\varepsilon}{8}\right)v^4 + \left(\frac{3}{7} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{v^6}{8} + \frac{5.8}{144} + \text{etc.}\right], \quad (A)$$

$\frac{S}{a^2} = s$ oportet esse quantitatem minimam: quamobrem ope reversionis serierum assumere licet

$$v = \alpha s + \beta s^3 + \gamma s^5 + \delta s^7 + \text{etc.}$$

quo valore in aequatione (A) substituto oritur

$$\frac{S}{\eta} = \eta^2 \alpha s + \left[\alpha^3\left(\frac{1}{3} - \frac{\eta^2}{2}\right) + \eta^2 \beta\right]s^3 + \left[\frac{\alpha^5}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{\eta^2}{4}\right) + \alpha^2\beta\left(1 - \frac{3}{2}\eta^2\right) + \eta^2\gamma\right]s^5$$
$$+ \left[\frac{\alpha^7}{8}\left(\frac{3}{7} - \frac{\eta^2}{2}\right) + \frac{\alpha^4\beta}{2}\left(1 - \frac{5}{4}\varepsilon\right) + \alpha\beta^2\left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon\right) + \alpha^2\gamma\left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon\right) + \eta^2\delta\right]s^7 + \text{etc.}$$

unde coefficientium α, β, γ, etc. sequentes resultant valores:

$$\alpha = \frac{1}{\eta^3}; \quad \beta = -\frac{2 - 3\varepsilon}{6\eta^{11}}; \quad \gamma = \frac{40 - 132\varepsilon + 105\varepsilon^2}{120\eta^{19}};$$
$$\delta = -\frac{2240 - 11424\varepsilon + 19086\varepsilon^2 - 10305\varepsilon^3}{5040\,\eta^{27}}.$$

Videmus itaque, coefficientes α, β, etc. semper majores evadere, ideoque seriem qua v exprimitur, non convergere, nisi s fuerit quantitas minima, seu observationes perihelio fuerint vicinae, quemadmodum hic assumimus. Hoc etenim casu habemus (§. 7.)

$$z = \frac{av}{4\eta}\left[3\varepsilon + \left(1 - \frac{5}{2}\varepsilon\right)v^2 + \left(1 - \frac{7}{4}\varepsilon\right)\frac{v^4}{2} + \left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon\right)\frac{3v^6}{8} + \text{etc.}\right],$$

ideoque substituto valore pro v assumto,

$$z = \frac{as}{4\varepsilon}\left[3 - \frac{s^2}{\varepsilon 3} + \frac{6 - 10\varepsilon}{5\varepsilon 7}s^4 - \frac{175 - 614\varepsilon + 525\varepsilon^2}{105\varepsilon^{11}}s^6\right], \text{ sive}$$

$$z = \frac{3S}{4p}\left[1 - \frac{S^2}{3ap3} + \frac{6 - 10\varepsilon}{15ap7}S^4 - \frac{175 - 614\varepsilon + 525\varepsilon^2}{315ap^{11}}S^6 + \text{etc.}\right].$$

Ubi si substituitur (§. 7.) $S = \frac{T\sqrt{B}}{2m}$, et $B = 4a\varepsilon(1 - \varepsilon) = 4p(1 - \varepsilon)$, ideoque $\sqrt{B} = 2p^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8} - \text{etc.}\right)$, nascitur tandem

$$z = \frac{3T}{4m\sqrt{p}}\left[1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8} - \frac{(2 - 3\varepsilon)T^2}{6m^2ap^2} + \frac{(6 - 25\varepsilon)T^4}{15m^4ap^5} - \frac{(350 - 2453\varepsilon)T^6}{630m^6ap^8} + \text{etc.}\right]$$

cujus expressionis terminus primus cum valore, quem z in parabola suscipit (§. 6., prorsus congruit, sequentes autem termini correctionem orbitae ellipticae debitam continent.

§. 9. Eaedem formulae orbitae *hyperbolicae* facile accommodantur. Cum enim in *hyperbola* axis transversus a sit negativus, et e unitate major (§. 4.), posito $e^2 - 1 = c^2$, eodem modo nanciscimur (§. 4.)

$$S = a^2 c u^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{24} - \frac{3u}{160} + \text{etc.}\right) + \frac{e-1}{4} a^2 c \sqrt{u} + \frac{e}{8} a^2 c u^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{u}{4} + \text{etc.}\right)$$

et (§. 5.) $z = \frac{(e-1)(2e+1)}{4c} a \sqrt{u} + \frac{a u^{\frac{3}{2}}}{4c} \left(\frac{2e^2+e+1}{2} - \frac{2e^2+3e+3}{8} u + \text{etc.}\right)$.

Ubi si substituitur $e = 1 + 2\varepsilon$, similes formulae pro S et z resultant, quas autem ulterius hic evolvere non opus videtur.

§. 10. Perspicimus hinc, centrum circuli quovis momento per solem, cometam, et perihelium descripti, in orbita parabolica uniformiter progredi, in ellipse vero celeritate aliquanto minore, at in hyperbola velocitate majore, quam in parabola. Quo denique dijudicari possit, utrum termini a nobis neglecti sine detrimento omitti possint, non inutile erit, formulam nostram cum observationibus comparare.

§. 11. Insignis cometa, qui annis 1305, 1380, 1456, 1531, 1607, 1682, apparuit, cujusque reditum ad annum 1759 praedixerat Hallejus, Clairaltius calculo demonstraverat, observatus fuit anno 1759 a 21 die Januarii inde ad tertium Junii. Quare cum 12 die Martii in perihelio fuerit (V. *Cométographie par Pingré, Tome II. pag. 63. sqq.*), maximus temporis T valor est 83 dierum, seu $T = 83$ et $\frac{T}{m} = 1$, proxime (§. 6.)

(§. 6.). Cum praeterea cometae hujus distantia a sole in perihelio sit 0, 5838 $= p$, ac periodus revolutionis 28070 dierum, unde sequitur axis transversus $a = 36,1519$: habemus (§. 4.) $e = 1 - \frac{2p}{a}$, ideoque $\varepsilon = \frac{p}{a} = 0,0161$; et $\sqrt{p} = 0,76\ldots$: unde resultat proxime $\frac{3T}{4m\sqrt{p}} = 1$. Perspicimus inde, centri circuli per solem, cometam ac perihelium ducti distantiam ab axe 82 diebus post transitum hujus cometae per perihelium aequalem esse radio orbis telluris (§. 8.), quatenus orbita cometae ceu parabola consideratur. Reliquorum terminorum correctionem ellipticam continentium (§. 8.) maximus valor in hujus cometae orbita est

$$- 0,0080 - 0,0264 + 0,1522 - 1,0106 + \text{etc.}$$

Unde patet, seriem pro z inventam non convergere, si T = vel > 82, ideoque hanc methodum non esse adhibendam, si observationes tanto intervallo a perihelio distantes sint conferendae. Plurimis autem casibus series ista ita convergit, ut reliquos terminos tuto respuere liceat. Velut ex. gr. ejusdem cometae observationes ante perihelium factae plus quam 50 diebus ab eo non fuerunt remotae. Posito jam $\frac{T}{m} = \frac{1}{2}$, series nostra fit

$$1 - 0,0080 - 0,0066 + 0,0095 - 0,0158 + \text{etc.}$$

Posito denique $\frac{T}{m} = \frac{1}{4}$, ita ut hujus cometae observationes non majori intervallo quam trium hebdomadum a perihelio distantes conferantur, valor quantitatis z erit

$$z = \tfrac{1}{4}(1 - 0,0080 - 0,0016 + 0,0006 - 0,0002 + \text{etc.}),$$

quae series satis convergit. Quodsi igitur observationes conferendae perihelio admodum propinquae fuerint, pro theoria elliptica assumi potest $z = \frac{3T}{4m\sqrt{p}}(1 - \frac{\varepsilon}{2})$, h. e. tempori proportionalis, cum in orbita parabolica sit $z = \frac{3T}{4m\sqrt{p}}$.

DÉTERMINATION

DE LA LATITUDE ET DE LA LONGITUDE

DE QUELQUES ENDROITS DE L'EMPIRE RUSSE.

Présenté le 1 Septembre 1804 et lû le 23 Octobre 1805.

Un des plus importans objets pour la géographie, et le seul moyen d'obtenir de bonnes cartes, d'un si vaste empire que la Russie, est sans doute, de determiner, par des observations astronomiques, la position des points les plus marquans de chaque province. Notre Auguste Souverain, persuade de cette verité, voulut que les officiers de Sa suite, après avoir levé le plan geometrique d'une province, fussent en état de verifier et d'orienter ces cartes par des observations astronomiques. S. M. I. daigna me charger, non-seulement de leur enseigner la partie de l'astronomie théoretique et pratique, et de leur procurer les instrumens qui sont nécessaires pour cet effet, mais aussi de donner une instruction particulière à chacun qui seroit envoyé pour une pareille expédition. Le chef de ce corps d'officiers, le Général du Génie, van Suchtelen, s'est empressé avec son zèle pour les sciences et son activité ordinaire, d'exécuter ces intentions de notre Auguste Souverain, et d'en faciliter les moyens, de sorte que plusieurs de ces officiers auxquels j'ai donné des leçons d'astronomie, m'ont déjà communiqué quantité d'observations faites avec beaucoup de soin et d'exactitude. Je les ai calculées, et je crois devoir en presenter à l'Académie les

les résultats, c'est-à-dire, les latitudes et les longitudes qui n'avoient pas encore été bien déterminées, comme aussi celles qui me seront communiquées par d'autres astronomes de l'empire; les mémoires de l'Académie des sciences étant les archives, dans lesquelles il faut déposer tout ce qu'on a fait en Russie, pour enrichir les sciences et surtout la connaissance du pays, et où il faut rassembler et conserver des observations qui, sans cela, seroient peut-être perdues ou oubliées. Je prie donc l'Académie de regarder ce que je vais lui présenter, comme un article permanent que je tacherai de continuer de tems en tems.

I. *Latitude de Riga.*

La latitude de cette ville n'avait pas été vérifiée, depuis que Mr. Grischow l'eut determinée de 56° 56′ 24″. M. le Conseiller de College Brückner s'est occupé pendant deux ans de cette vérification, et il m'a envoyé plus de cent observations de la hauteur du soleil, qu'il a faites avec des sextans à reflexion, et sur lesqu'elles j'ai donné à l'Académie un rapport détaillé. Le résultat de ces observations qui sont très-bien d'accord entre elles, donne la *latitude de Riga* = 56° 57′ 0″.

II. *Position de Polotzk.*

La longitude de cette ville n'étoit pas du tout connue, et sa latitude avait été determinée d'environ 55° 29′. Je fis donc la proposition à l'Académie, d'y envoyer un de mes éléves, M. le Lieutenant Thesleff, pour observer la grande éclipse solaire du 30 Janvier 1804. Cette proposition ayant été agréée par S. M. I. qui daigna lui agréger mon fils; ces deux officiers parti-

tirent d'ici le 16 Janvier, munis d'une lunette achromatique de $3\frac{1}{2}$ pieds, d'un sextant à réflexion de Troughton, d'un horizon à Mercure, et d'un chronomètre de Brockbanks, que je leur avais fournis. Pendant leur séjour à Polotzk, le ciel fut si peu favorable, que dans quinze jours il n'y eut pas quatre, où ils pûrent prendre des hauteurs circum-méridiennes et correspondantes du soleil, et aucun jour où il fût possible d'observer des distances de la lune. Le jour de l'éclipse le ciel étoit si nébuleux qu'il falloit regarder le soleil sans verres foncés, et qu'il étoit impossible de prendre des hauteurs corréspondantes: ce qui laisse une incertitude de quelques secondes sur le vrai tems de l'observation. Cependant, les hauteurs du soleil, observées pendant l'éclipse deux à trois heures après midi, m'ont servi à déterminer la marche du chronomètre, qui se trouve assés bien d'accord avec celle que m'ont donnée les hauteurs corréspondantes de la veille et du lendemain. Il en résulte que le *commencement* de cette éclipse a été observé à $1^h\ 8'\ 4'',2$ et la *fin* à $3^h\ 31'\ 49'',2$ tems moyen de Polotzk. Le calcul de cette observation, et de celle que nous en avions faite ici, comparé à celle de Gotha, m'a donné la *vraie conjonction* à $1^h\ 25'\ 18''$ tems moyen de St. Pétersbourg, et à $1^h\ 19'\ 11''$ tems de Polotzk: la différence est de $6'\ 7''$.

Les dix hauteurs circum-méridiennes observées à Polotzk dans quatre jours différens, donnent la latitude de $55°\ 28'\ 49'',5$; $50''$; $51''$; $54'',5$; $55''$; $57''$; $57'',3$; $60'',5$; $60'',5$; $61'',5$: dont le milieu est $55'',7$. Celà donne les résultats suivans.

Latitude du Collège des Jésuites à Polotzk = $55°\ 28'\ 55'',7$.

Longitude par rapport à l'Observatoire de St. Pétersbourg = $6'\ 7''$ ou $1°\ 31'\ 45''$ Ouest.

III.

III. *Position d'Archangel, d'Onéga, de Powenetz, de Wytegra, et des embouchures du Swir.*

La carte des gouvernemens d'Archangel et d'Olonetz ayant été levée, S. M. I. y envoya deux officiers de Sa suite, les Lieutenans Thesleff et mon fils, les mêmes qui avaient été à Polotzk, pour déterminer la latitude et la longitude des principaux points de ces provinces; et je fus chargé d'assigner les endroits les plus convenables. Je choisis les quatre villes susmentionnées, parce qu'étant à une juste distance l'une de l'autre, elles serviraient en même tems à déterminer tant les embouchures des rivières de Dwina et d'Onéga, que la situation et l'étendue du lac d'Onéga. Ils y ajoutérent de leur propre mouvement, l'origine et l'embouchure de la riviere de Swir. Ces officiers se mirent en route le 19 Mars 1804, et furent de retour le 15 Juillet, ayant traversé la mer blanche, le lac d'Onéga et celui de Ladoga. Dans le cours de ce voyage, ils ont observé 2418 hauteurs du soleil pour déterminer la marche du chronomètre, 820 hauteurs du soleil pour trouver la latitude, et 811 distances de la lune au soleil avec 522 hauteurs du soleil et 379 hauteurs de la lune, pour déterminer la longitude des lieux: ils ont donc fait en tout 5000 observations. Le parfait accord qui se trouve entre ces observations, dont j'ai calculé la meilleure partie, m'a fait voir qu'elles ont été faites avec une précision qui surpasse mon attente.

Plus de cent hauteurs du soleil au midi, que j'ai calculées, donnent la *latitude d'Archangel*, en prenant le milieu $= 64° 31' 39'',45$. En rejetant celles qui la donnent trop grande ou trop petite de plus de $10''$, il en reste 70 dont le

milieu

milieu est 64° 31′ 39″,73. En rejetant encore celles qui la donnent trop grande ou trop petite de plus de 5″, les 40 hauteurs qui restent, donnent le milieu = 64° 31′ 40″,545 : de sorte qu'on peut supposer la

latitude d'Archangel = 64° 31′ 40″.

Pour déterminer la *latitude d'Onéga*, j'ai calculé plus de quarante hauteurs du soleil au méridien, qui donnent le milieu = 63° 53′ 35″,20. En rejetant six, et ensuite dix autres, dont la différence est de plus de 10″ ou bien entre 5″ et 10″, on obtient les milieux 63° 53′ 35″,73 et 63° 53′ 36″,56. Je supposerai donc la

latitude d'Onéga = 63° 53′ 36″.

Le milieu de 90 hauteurs méridiennes du soleil m'a donné la *latitude de Powenetz* = 62° 50′ 39″,49. En rejetant, comme ci-dessus, celles dont la différence est de plus de 10″ ou entre 5″ et 10″, j'ai trouvé les milieux 62° 50′ 40″,31 et 62° 50′ 40″,63. On peut donc supposer la

latitude de Powenetz = 62° 50′ 40″.

Pour la *latitude de Wytegra*, j'ai calculé plus de cent hauteurs méridiennes du soleil, qui donnent le milieu = 61° 0′ 15″,345. En rejetant 5, et ensuite 30 autres, dont la différence est de plus de 10″ ou entre 5″ et 10″, j'ai obtenu les milieux 61° 0′ 15″,51 et 61° 0′ 16″,44: de façon qu'on peut supposer la

latitude de Wytegra = 61° 0′ 16″.

En

En prenant le milieu entre six hauteurs circum - méridiennes du soleil, j'ai trouvé la

latitude du village de Wosnesénie $= 61° 0' 41'',9$.

Cet endroit est situé sur le bord gauche du *Swir*, où il sort du lac d'Onéga, vis - à - vis le couvent de Wosnesénie.

Six hauteurs circum - méridiennes du soleil m'ont donné

la *latitude du couvent de Nicolsk* $= 60° 31' 39'',6$.

Le lieu de l'observation est situé auprès du village de *Storogine*, endroit où les eaux du *Swir* se jettent dans le lac de Ladoga.

Quant à la *longitude* de ces lieux, je l'ai calculée de deux manieres différentes, d'abord par les distances de la lune au soleil, et ensuite par la marche du chronomètre de Brockbanks. Pour cet effêt, j'ai vérifié le chronomêtre à l'observatoire de l'Académie, à l'instant du départ de ces deux officiers, et à celui de leur retour, comme aussi plusieurs jours auparavant et après. Ces doubles résultats se sont trouvés très - bien d'accord entre eux, à l'exception d'Archangel, où il reste encore une incertitude de quelques secondes, ce qu'il faut sans doute attribuer à l'imperfection des tables lunaires et solaires. Moyennant la marche du chronomètre, j'ai calculé la longitude de deux manieres différentes, d'abord en prenant pour époque le départ de St. Pétersbourg, époque que je comparai au jour de l'arrivée à un tel endroit, et ensuite en prenant pour époque le jour du départ de cet endroit, pour la comparer à la marche

du chronomètre à son arrivée à Pétersbourg. J'ai pris le milieu entre ces deux résultats qui différoient très-peu l'un de l'autre.

La combinaison de 90 distances de la lune au soleil, en prenant le milieu, donne la *longitude d'Archangel* = $2^h\ 32'\ 36''$, à l'Orient de Paris. La marche du chronomètre la donne = $2^h\ 32'\ 20''$. On s'éloignera donc peu de la vérité, en supposant la

longitude d'Archangel = $2^h\ 32'\ 30''$.

Les distances de la lune au soleil donnent la

longitude d'Onéga = $2^h\ 22'\ 14''$ Est de Paris.

La marche du chronomètre la donne = $2^h\ 22'\ 13'',38$: ce qui est parfaitement d'accord.

Le milieu pris entre 72 distances de la lune au soleil, donne la

longitude de Powenetz = $2^h\ 9'\ 26'',4$ Est de Paris.

La marche du chronomètre = $2^h\ 9'\ 26'',16$; précisément la même.

Le milieu d'entre 75 distances de la lune au soleil donne la *longitude de Wytegra* = $2^h\ 15'\ 42'',5$; le Chronomètre donne = $2^h\ 15'\ 39''$. Je supposerai donc la

longitude de Wytegra = $2^h\ 15'\ 41''$ par rapport à Paris.

La marche du chronomètre donne la *longitude de Wosnesénie* à l'Ouest de Wytegra = $3'\ 40''$, partant la

longitude de Wosnesénie = $2^h\ 12'\ 1''$ par rapport à Paris.

D'après

D'après le chronomètre, la *longitude de Nicolsk* est à l'Ouest de Wytegra = 14′ 38″,5 ; par conséquent la

longitude de Nicolsk = 2^h 1′ 2″,5 Est de Paris.

Récapitulation.

	Latitude boréale	Longitude par rapport au méridien de Pétersbourg en tems	de Pétersbourg en degrés	de Paris en tems	de Paris en degrés
Riga	56°. 57′. 0″.	- - -	- - -	- - -	- - -
Polotzk	55. 28. 55,7.	0^h.6′. 7″.Occ.	1°.31′.45″.	1^h.45.′ 51″.	26°. 27′. 45″.
Archangel	64. 31. 40.	0. 40. 32. Or.	10. 8. 0.	2. 32. 30.	38. 7. 30.
Onéga	63. 53. 36.	0. 30. 16.Or.	7. 34. 0.	2 22. 14.	35. 33. 30.
Powenetz	62. 50. 40.	0. 17. 28,3.	4. 22. 5.	2. 9. 26,3.	32. 21. 35.
Wytegra	61. 0. 16.	0. 23. 43.	5. 55. 45.	2. 15. 41.	33. 55. 15.
Wosnesénie	61. 0. 41,9.	0. 20. 3.	5. 0. 45.	2. 12. 1.	33. 0. 15.
Nicolsk	60. 31. 39,6.	0. 9. 4,5.	2. 16. 7.	2. 1. 2,5.	30. 15. 37.

La grande différence qui se trouve entre ces déterminations et les anciennes, fait voir l'importance de ces observations p. ex. les anciennes observations donnent la latitude d'Archangel trop grande de 1′ 56″, et la longitude trop petite de 1° 44′; d'après les observations de M. Abrossimof la différence seroit encore plus grande. La latitude d'Onéga dans nos meilleures cartes est trop grande de 18′, celle de Powenetz de 7′, celle de Wytegra de 3′; la longitude d'Onéga est trop petite de 1° 51′, celle de Powenetz de 53′, celle de Wytegra de 41′; etc.

OBSERVATIONES
VENERIS ET SATURNI
HABITAE
IN SPECULA ACADEMIAE SCIENTIARUM IMPERIALIS
A
V. WISNIEWSKI.

Conventui exhibita et praelecta die 28 Nov. 1804.

Infra exponendas observationes peregi tubo meridiano Ramsdeni pedum 3. cum semisse et quadrante murali octo pedum, Birdii. Tempus sidereum motumque horologii oscillatorii ex fixarum culminationibus elicui, et ad hoc Negotium ascensiones rectas medias praecipuarum stellarum e cathalogo Cel. Maskelyne desumpsi, aliarum nonnullarum autem fixarum ascensiones rectas, propriis observationibus determinavi. Explorato hoc modo culminationis planetarum tempore sidereo, ascensiones rectae apparentes eorum immediate obtinebantur; declinationes autem deductae sunt ex eorum et fixarum distantiis a vertice observatis.

Solis, Veneris et Saturni positiones, ex tabulis quae Astronomiae Celeb. de la Lande insunt computavi, et Eclipticae obliquitatem apparentem ex Ephemeridibus Parisiensibus (Connaissance des tems pour l'an XII.) excepi.

Ve-

Venio jam ad expositionem observationum

Saturni.

Licuit mihi nonnullas observationes hujus planetae tempore ejus cum Sole oppositionis instituere; tempus sidereum deduxi ex fixarum β γ' et δ Virginis observato transitu. Ascensiones rectas medias Stellarum γ et δ Virginis ad 1 Januarii 1804. reductas, praebent observationes meae, ut sequitur:

γ' Virginis praecedens duplicae .	$12^h\ 31'\ 43'',83$.
δ Virginis	12 45 44,10.

Declinationes mediae dictarum fixarum e cathalogo magno Clar. Piazzi depromptae sunt.

En Saturni observationes jam reductas:

Anno 1804.	Ascensio recta apparens Limbi occidentalis Saturni.	Declinatio borealis Limbi superioris Saturni.
Die $\frac{8}{20}$ Martii $12^h\ 12'\ 5'',5$ t. m.	$181°\ 14'\ 53'',82$.	$2°\ 16'\ 45'',97$.
die $\frac{9}{21}$ — 12 7 52, 7.	181 10 39, 72.	— —
die $\frac{10}{22}$ — 12 3 39, 7.	181 6 24, 22.	2 20 34, 43.
die $\frac{12}{24}$ — 11 55 13, 7.	180 57 48, 12.	2 24 23, 07.

Solis ascensiones rectae apparentes in meridie observatae sunt:

Die

Die $\frac{8}{20}$ Martii 1804. Ascensio recta Centri ☉lis in tempore $23^h\ 58'\ 35'',740$.
Die $\frac{9}{21}$ — . . . . 0 2 13,917.
Die $\frac{10}{22}$ — . . . . 0 5 52,070.

Ex quibus in partes Aequatoris reductis, ope obliquitatis Eclipticae $= 23°\ 28'\ 6'',3$ eruitur:

	Longitudo Solis apparens	Correctio tabular:
Die $\frac{8}{20}$ Martii . .	$11^s\ 29°\ 37'\ 2'',10$.	— $11'',23$.
Die $\frac{9}{21}$ — . .	0 0 36 29, 90.	— 11, 54.
Die $\frac{10}{22}$ — . .	0 1 35 57, 07.	— 10, 30.

Correctio media = — $11'',02$.

Facta correctione longitudinis Solis ex tabulis depromptae et adjectis $20''$ pro aberratione luminis, supputavi ex longitudine et latitudine heliocentrica Saturni ex tabulis computata, ejus longitudinem et latitudinem geocentricam veram, uti sequens tabella declarat:

	Long. geoc. ♄	Lat. bor. geoc. ♄
Die $\frac{8}{20}$ Martii $12^h\ 12'\ 5'',5$ t. m.	$6^s\ 0°\ 14'\ 20'',65$	$2°\ 35'\ 23'',65$.
Die $\frac{9}{21}$ — 12 7 52,7 .	6 0 9 39, 03	2 35 25, 80.
Die $\frac{10}{22}$ — 12 3 39,7 .	6 0 4 57, 70	2 35 28, 34.
Die $\frac{12}{24}$ — 11 55 13,7 .	5 29 55 35, 99	2 35 33, 10.

Semidiameter apparens Saturni invenitur $= 8'',74$ supponendo diametrem in media Solis distantia $= 2'\ 28'',8$ *). Parallaxis ho-

*) Astron. de la Lande II. 1393.

horizontalis fuit = 1″,01. Reductis itaque obſervationibus ſupra allatis ad centrum Saturni, reperitur:

	Aſc. recta obſervata ♄	Decl. borealis ♄
Die $\frac{8}{20}$ Martii	181° 15′ 2″,56	2° 16′ 38″,08.
Die $\frac{9}{21}$ —	181 10 48, 45	— —
Die $\frac{10}{22}$ —	181 6 33, 00	2 20 26, 54.
Die $\frac{12}{24}$ —	180 57 56, 85	2 24 15, 18.

Ex quibus elicitur:

	Long. ♄ apparens	Lat. bor. ♄
Die $\frac{8}{20}$ Martii . .	6^s 0° 14′ 23″,42	2° 35′ 12″,88.
Die $\frac{9}{21}$ — . .	6 0 5 4, 98	2 35 19, 28.
Die $\frac{12}{24}$ — . .	5 29 55 40, 17	2 35 23, 37.

Adhibita correctione longitudinis Saturni ex aberratione luminis = + 13″47, ex Nutatione = + 12″,65, et correctione latitudinis ob aberrationem luminis = − 0″,12 non neglecta, prodit:

	Long. geoc. vera ♄	Latitudo vera borealis ♄
Die $\frac{8}{20}$ Martii . .	6^s 0° 13′ 57″,30	2° 35′ 13″,00.
Die $\frac{10}{22}$ — . .	6 0 4 38, 86	2 35 19, 40.
Die $\frac{12}{24}$ — . .	5 29 55 14, 05	2 35 23, 49.

Unde ſequentes tabularum Saturni correctiones obtinentur:

Ex

	Corr. in longit:	Corr. in latit:
Ex observatione Die $\frac{8}{20}$ Martii instituta	— 23″,35	— 10″,65.
— $\frac{10}{22}$ Martii . .	— 18, 84	— 8, 94.
— $\frac{12}{24}$ —	— 21, 94	— 9, 61.

Die $\frac{9}{21}$ Martii Saturni distantiam a vertice exacte observare mihi non licuit; ex observata autem hujus planetae ascensione recta supra allata, et latitudine geocentrica ex tabulis computata correctaque, eruitur longitudo apparens pro die $\frac{8}{20}$ Martii $12^h\ 7'\ 52''7$ $= 6^s\ 0°\ 9'\ 45'',26$, quae ope correctionis ex aberratione luminis et nutatione ortae ad veram $= 6^s\ 0°\ 9'\ 19'',14$ reducitur. Hinc nascitur correctio tabularum $= - 19'',89$.

Sumpto ex correctionibus inventis medio arithmetico, patet tabulas longitudinem Saturni quantitate 21″,0 et latitudinem quantitate 9″,7 majorem exhibere.

Ex allatis Saturni positionibus, reperitur planetam attigisse oppositionem cum Sole die $\frac{8}{20}$ Martii; tabulae solares ut supra correctae dant pro hoc die hora 12 12′ 5″,5 t. m. longitudinem Solis veram . . . . . $0^s\ 0°\ 7'\ 5'',3$.

Longitudo Saturni geocentrica habetur eodem tempore . 6 0 13 59,65.

Distantia ab oppositione 6′ 54″,35.

Motus horarius Solis per id tempus fuit = 2′ 28″,724 et motus Saturni = 11″,771, hinc colligitur motus relativus ☉ et ♄ = 2′ 40″,495; unde liquet arcum 6′ 54″,35 intervalo temporis solari medii 2^h

$2^h\ 34'\ 54'',12$ perfectum. Contigit itaque oppositio Saturni cum Sole Anno 1804 die $\frac{8}{20}$ Martii $14^h\ 46'\ 59'',6$ t. med. Pro quo instanti habetur longitudo vera ♄ ab aequinoctio medio $= 6^s\ 0^o\ 13'\ 29'',26$. Latitudo borealis geocentrica $= 2\ 35\ 14,2$.

Observationes Veneris.

Ex observatis culminationibus fixarum β Geminorum, β Leonis, α Virginis et α Bootis, deduxi tempus sidereum motumque horologii. Ascensionem rectam apparentem Veneris dabat tempus transitus ejus per meridianum; declinatio autem ex differentia diſtantiarum a vertice Planetam inter et Arcturum obtinebatur.

Tabella sequens exhibet observationes hujus Planetae jam reductas, quae prope maximam ejus a Sole digressionem orientalem institutae sunt.

1804.	Tempus medium Solare	Ascensio recta apparens limbi occidentalis ♀	Declinatio borealis apparens limbi superioris ♀
Die $\frac{12}{24}$ Maii	$3^h\ 13'\ 43'',1$	$110^o\ 21'\ 14'',26$	$25^o\ 1'\ 17'',80.$
— $\frac{13}{25}$ —	3 13 59, 5	111 24 31, 05	24 51 51, 23.
— $\frac{14}{26}$ —	3 14 13, 3	112 27 4, 98	24 41 53, 25.
— $\frac{15}{27}$ —	3 14 24, 0	113 28 55, 30	24 31 28, 93.

Ut correctionem tabularum Solarium obtinerem, sequentes observationes Solis ad tubum meridianum peregi:

Die $\frac{13}{25}$ Maii Mediatio Centri Solis $4^h\ 7'\ 36'',696$ t. sider.
— $\frac{14}{26}$ — . . . . 4 11 38, 719.

Facta temporis siderei in partes Aequatoris conversione, ope obliquitatis ecliptiсae = 23° 28′ 5″,7 elicitur:

	Long. Solis appar.	Correctio tab.
Ex observatione diei $\frac{13}{25}$ Maii .	2ˢ 3° 54′ 28″,65	+ 2″,46.
— — — $\frac{14}{26}$.	2 4 51 56, 60	— 2, 31.
sumpto medio arithmetico sequitur correctio		+ 0, 07.

Adplicatis longitudini heliocentricae ex tabulis Celeb. de la Lande computatae aequatiunculis ex perturbatione Veneris a Terra Joveque ortis, sequentes positiones geocentricas veras hujus planetae supputavi:

	Tempus solare med.	Longit. geoc. vera ♀	Latit. geoc. boreal. ♀
Pro die $\frac{12}{24}$ Maii	3ʰ 13′ 43″,1	3ˢ 18° 23′ 56″,60	2° 50′ 48″,40.
— $\frac{13}{25}$ —	3 13 59, 5	3 19 22 6, 12	2 49 37, 60.
— $\frac{14}{26}$ —	3 14 13, 3	3 20 19 48, 42	2 48 14, 35.
— $\frac{15}{27}$ —	3 14 24, 0	3 21 17 3, 50	2 46 42, 15.

Semidiameter apparens *) et parallaxis horizontalis ♀ invenitur:

	Semidiameter ♀	Parallaxis horiz. ♀
Pro die $\frac{12}{24}$ Maii .	11″,04	11″,87.
— $\frac{13}{25}$ — .	11, 16	12, 00.
— $\frac{14}{26}$ — .	11, 29	12, 14.
— $\frac{15}{27}$ — .	11, 42	12, 28.

Ob-

*) Diameter ♀ in media ☉ distantia = 16″,0.

Observationes supra allatae, ope semidiametri in ascensione recta expressae et differentiae semidiametrum inter et parallaxin altitudini correspondentem, ad centrum ♀ reducuntur ut sequitur:

	Ascensio recta apparens centri ♀	Declinatio apparens centri ♀
Die $\frac{12}{24}$ Maii .	110° 21′ 26″,41	25° 1′ 13″,56.
— $\frac{13}{25}$ — .	111 24 43, 33	24 51 46, 97.
— $\frac{14}{26}$ — .	112 27 17, 40	24 41 48, 97.
— $\frac{15}{27}$ — .	113 29 7, 87	24 31 24, 63.

Ex quibus eruitur:

	Long. geoc. appar.	Latit. geoc. boreal.
Die $\frac{12}{24}$ Maii .	3ˢ 18° 23′ 53″,11	2° 50′ 40″,46.
— $\frac{13}{25}$ — .	3 19 22 5, 75	2 49 29, 01.
— $\frac{14}{26}$ — .	3 20 19 49, 40	2 48 5, 30.
— $\frac{15}{27}$ — .	3 21 17 2, 94	2 46 33, 45.

Correctiones in longitudinem latitudinemque ♀ ex aberratione luminis habentur:

	Aberr. in long.	Aberr. in latit.
Pro die $\frac{12}{24}$ Maii . .	— 14″,26.	+ 0″,29.
— — $\frac{13}{25}$ — . . .	— 13, 99.	+ 0, 33.
— — $\frac{14}{26}$ — . . .	— 13, 72.	+ 0, 36.
— — $\frac{15}{27}$ — . . .	— 13, 54.	+ 0, 38.

Aequatiuncula ob Nutationem = + 13″,20.

Adplicatis his correctionibus, positiones apparentes ♀ ex observationibus ut supra deductae, in veras convertuntur:

	Longit. vera ♀	Latit. vera bor. ♀
Die $\frac{12}{24}$ Maii .	$3^s\ 18°\ 23'\ 54'',17$	$2°\ 50'\ 40'',17$.
— $\frac{13}{25}$ — .	3 19 22 6, 54	2 49 28, 68.
— $\frac{14}{26}$ — .	3 20 19 49, 92	2 48 4, 94.
— $\frac{15}{27}$ — .	3 21 17 3, 28	2 46 33, 07.

Quae cum positionibus ex tabulis computatis collatae, sequentes tabularum Veneris correctiones praebent:

	Corr. in longit.	Corr. in latit.
Ex observatione diei $\frac{12}{24}$ Maii	$-\ 2'',43$	$-\ 8'',23$.
— — — — $\frac{13}{25}$ —	+ 0, 42	— 8, 93.
— — — — $\frac{14}{26}$ —	+ 1, 50	— 9, 41.
— — — — $\frac{15}{27}$ —	— 0, 22	— 9, 08.
Correctio media .	— 0, 21	$-\ 8'',91$.

Unde sequitur exiguam imminutionem inclinationem orbitae Veneris exigere.

OB-

OBSERVATIONES

CERERIS, PALLADIS, JUNONIS, SATURNI URANIQUE

HABITAE

IN SPECULA ACADEMIAE SCIENTIARUM IMPERIALIS

A

V. WISNIEWSKI.

Conventui exhibita die 11. Sept. 1805.

Antequam ad expositionem observationum accedam, monendum habeo: eas eadem methodo iisdemque instrumentis in Meridiano collocatis institutas esse, quorum in commentatione de observationibus ♄ et ♀ anno praeterito praelecta mentionem feci.

Positiones Solis, Saturni Uranique ex tabulis Cel. de Lambre, quae exstant in Astronomia Cel. de la Lande, calculo subduxi; positiones autem Cereris, Palladis Junonisque computatae sunt ex elementis a Cel. Gauss determinatis. Pro invenienda correctione tabularum solarium, observationum Solis ad tubum culminatorium peractarum usum adhibui, quas hic breviter exponere convenit.

A° 1804.

A°. 1804. Die 17. Septemb: N. St. transitus centri Solis per Meridianum observatus fuit . $11^h\ 38'\ 55'',018$ t. s.

— 18. . . .	11	42	30, 414.
— 21. . . .	11	53	16, 692.
— 22. . . .	11	56	52, 463.
— 23. . . .	12	0	28, 366.

Unde, supponendo obliquitatem eclipticae apparentem $= 23^\circ\ 27'\ 59'',6$, deducitur

	Long. ⊙ observata	Correctio tabul. solarium
Die 17. Septembris	$5^s\ 24^\circ\ 15'\ 25'',39$	— $9'',35$
— 18. . . .	5 25 14 2, 95	— 9, 20
— 21. . . .	5 28 10 5, 27	— 10, 84
— 22. . . .	5 29 8 53, 34	— 8, 40
— 23. . . .	6 0 7 43, 85	— 5, 37

Patet itaque, correctionem longitudinis Solis $= - 8',63$ ad tempus intermedium statui posse. Quoniam autem a die 7[ma] Septembris usque ad diem 5. Octobris, ob inclementiam coeli, illas tantum observationes Solis instituere licuit; ideo correctionem modo assumtam, dicto temporis intervallo constantem spectare coactus fui, eamque longitudinibus Solis, ad expediendum calculum positionum geocentricarum ⚳, ⚴ et ⚵ computatis, adplicavi. — Culminationes Solis ante et post oppositionem ♄ observatae sunt sequentes:

A° 1805.

A° 1805. Die 2. Aprilis N. St.			0^h	44′	57″,802	t. s.
	— 3. —	—	0	48	36, 239.	
	— 4. —	—	0	52	14, 541.	
	— 5. —	—	0	55	53, 248.	
	— 7. —	—	1	3	10, 961.	

Ex quibus, posita obliquitate apparenti ecclipticae = 23° 27′ 57″, 8 concluditur

	Long. ☉ observ.	Correctio tabul. solar.
Die 2. Aprilis	0^s 12° 13′ 39″,16	— 9″,59
— 3. —	0 13 12 34, 68	— 8, 46
— 4. —	0 14 11 32, 66	— 11, 33
— 5. —	0 15 10 32, 60	— 10, 14
— 7. —	0 17 8 22, 27	— 11, 24

Hincque correctio longitudinis Solis media prodit = — 10″, 15 quam in computo positionum geocentricarum ♄ et ♅ adhibere placuit.

Notandum adhuc venit, declinationes infra relatas parallaxi affectas esse. His praemissis ad observationes planetarum exponendas progredior.

Observationes Cereris.

A° 1804.	Tempus solare medium	Asc. recta ⚳ observata	Decl. ⚳ australis
Die 8. Sept. N. St.	13^h 44′ 33″,4	13° 42′ 31″,28	10° 55′ 0″,53
— 14. — —	13 15 58, 8	12 42 32, 19	11 30 15, 18
— 16. — —	13 6 39, 8	12 20 39, 88	11 41 26, 14

A° 1804.

A° 1804.	Tempus solare medium	Asc. recta ⚳ observata	Decl. ⚳ australis
Die 17. Sept. N. St.	13ʰ 1′ 59″,6	12° 9′ 34″,18	11° 47′ 4″,46
— 18. — —	12 57 18, 3	11 58 12, 19	11 52 43, 12
— 22. — —	12 38 25, 9	11 10 53, 17	12 13 53, 30
— 23. — —	12 33 42, 1	10 58 52, 29	12 19 6, 40
— 28. — —	12 9 53, 8	9 56 30, 30	12 43 0, 30
— 30. —	12 0 20, 8	9 31 8, 74	12 51 31, 51
— 1. Octob. —	11 55 34, 5	9 18 31, 05	12 55 29, 44
— 2. — —	11 50 47, 8	9 5 47, 40	12 59 23, 71
— 5. — —	11 36 27, 9	8 27 37, 93	13 10 18, 41

Pro allatis observationum momentis supputavi ex elementis X^{mis} *) positiones Cereris heliocentricas, quae per aequationes ex perturbatione a Jove oriundas correctae, praebent

	Long. ⚳ geocentr. veram	Latit. ⚳ geoc. australem
Die 8. Septembris	0ˢ 8° 13′ 54″, 45	15° 26 49″,84
— 14. —	0 7 3 16, 26	15 35 24, 13
— 16. —	0 6 38 10, 68	15 37 13, 12
— 17. —	0 6 25 24, 06	15 37 55, 25
— 18. —	0 6 12 28, 42	15 38 29, 17
— 22. —	0 5 19 38, 67	15 39 19, 65
— 23. —	0 5 6 13, 28	15 39 10, 66
— 28. —	0 3 58 29, 93	15 36 13, 33
— 30. —	0 3 31 24, 51	15 34 0, 39
— 1. Octobris	0 3 18 2, 98	15 32 40, 57
— 2. —	0 3 4 30, 12	15 31 12, 57
— 5. —	0 2 24 45, 01	15 25 55, 96

Quanti-

(*) Monatliche Corresp. März. 1805.

Quantitates ad reductionem observationum inserviendae se habent ut sequitur:

	Parallax. horizont.	Aberr. Lum. in longit.	Aberrat. in latitudine	Nutatio
Die 8. Septembris	4',33	+ 7'',47	— 1'',13	+ 14'', 20
— 14. —	4, 39	+ 8, 33	— 0, 67	- - -
— 17. —	4, 41	+ 8, 55	— 0, 42	- - -
— 22. —	4, 44	+ 8, 88	+ 0, 07	- - -
— 28. —	4, 45	+ 8, 95	+ 0, 66	- - -
— 1. Octobris	4, 45	+ 8, 90	+ 0, 96	- - -
— 5. —	4, 43	+ 8, 74	+ 1, 25	+ 14'', 40

Habita jam ratione parallaxis altitudinis, declinationes observatae sequentes induunt valores:

	Declin. ♀ austr.		Declin. ♀ austr.
Die 8. Septemb.	10° 54' 56'',44	Die 23. Sept.	12° 19' 2'',17
— 14. —	11 30 11, 02	— 28. —	12 42 56, 05
— 16. —	11 41 21, 96	— 30. —	12 51 27, 26
— 17. —	11 47 0, 27	— 1. Oct.	12 55 25, 19
— 18. —	11 52 38, 93	— 2. —	12 59 19, 46
— 22. —	12 13 49, 07	— 5. —	13 10 14, 17

Ex quibus et ascensionibus rectis allatis, computavi positiones ♀ respectu eclipticae, quas sequenti in Tabula ob oculos pono:

	Long. ♀ appar observata	Latit. ♀ australis
Die 8. Septembris.	0ˢ 8° 14' 2'',99	15° 26' 53'',27
— 14. —	0 7 3 25, 56	15 35 28, 66

 Die

	Long. ♀ apparens observata	Latit. ♀ australis
Die 16. Septembris.	0ˢ 6° 38 22″,58	15° 37′ 2″,44
— 17. —	0 6 25 42, 20	15 37 49, 78
— 18. —	0 6 12 46, 04	15 38 29, 58
— 22. —	0 5 19 55, 61	15 39 6, 03
— 23. —	0 5 6 35, 08	15 39 6, 31
— 28. —	0 3 58 44, 12	15 36 10, 90
— 30. —	0 3 31 41, 10	15 33 53, 15
— 1. Octobris.	0 3 18 20, 35	15 32 29, 21
— 2. —	0 3 4 55, 95	15 30 59, 47
— 5. —	0 2 25 6, 15	15 25 45, 38

Hincque applicatis aberratione et nutatione colligitur.

	Long. ♀ vera observata	Elementa praebent.	Latit. ♀ austr. observata	Elementa praebent.
Die 8. Septembris.	0ˢ 8° 13′ 41″,41	+ 13″,14	15° 26′ 54″,40	— 4″,56
— 14. —	0 7 3 2. 99	+ 13, 27	15 35 29, 33	— 5, 20
— 16. —	0 6 37 59. 84	+ 10, 83	15 37 2, 91	— 10, 21
— 17. —	0 6 25 19, 40	+ 4, 66	15 37 50, 20	+ 5, 05
— 18. —	0 6 12 23, 18	+ 5, 24	15 38 29, 90	+ 0, 73
— 22. —	0 5 19 32, 43	+ 6, 24	15 39 5, 96	+ 13, 69
— 23. —	0 5 6 11, 88	+ 1, 40	15 39 6, 12	+ 4, 54
— 28. —	0 3 58 20, 83	+ 9, 10	15 36 10, 24	+ 3, 09
— 30. —	0 3 31 17, 83	+ 6, 68	15 23 52, 29	+ 8, 10
— 1. Octobris.	0 3 17 57, 10	+ 5, 88	15 32 28, 25	+ 12, 32
— 2. —	0 3 4 32, 72	— 2, 60	14 30 58, 45	+ 14, 12
— 3. —	0 2 24 43, 01	+ 2, 00	15 25 44, 13	+ 11, 83

Sumto medio arithmetico ex differentiis a die 22. Septembris usque ad diem 5. Octobris inventis, reperitur ad tempus

pus oppositionis correctio longitudinis ⚳ ex elementis computata $= - 4'', 10$ similique modo prodit correctio latitudinis $= - 9'', 67$. His assumtis, positoque moto horario relativo ⚳ et ☉ $= 181'', 5$ computum oppositionis jam expedire licet.

Ex elementis habetur longitudo Cereris vera geocentrica pro die 27. Septembris $4^h\ 59'\ 0'', 0$ . . $0^s 4^\circ\ 16'\ 11'', 84$
Correctio . . . . . $-\ 4'', 10$

Longitudo ⚳ correcta $0^s\ 4^\circ\ 16'\ 7'', 74$
Longitudo ☉ vera ab Aequinoctio medio
ad idem tempus computata . . . . $6^s\ 4^\circ\ 15'\ 56'', 31$
Ideo Arcus $= 11'', 43$ relativo ☉ et ⚳ motu ante oppositionem percurrendus erat, cui spatium temporis solaris medii $= 0^h\ 3'\ 46'', 71$ respondet. Unde concluditur tempus medium oppositionis $= 5^h\ 2\ 46'', 71$ die 27 Septembris,

Longitudine Cereris vera existente	. . .	$0^s\ 4^\circ\ 16'\ 5'', 60$
Latitudine geocentrica } australi	. . . .	$15^\circ\ 37'\ 10'', 98$
— heliocentrica } australi	. . . .	$10^\circ\ 20'\ 37'', 61$

Observationes Palladis.

A°. 1804.	Tempus solare medium	Asc. recta ⚴ apparens observata	Declinatio ⚴ borealis
Die 7. Septemb.	$10^h\ 59'\ 49'', 0$	$331^\circ\ 40'\ 30'', 45$	$3^\circ\ 21'\ 7'', 33$
— 17. —	10 13 51, 0	330 0 30, 70	1 13 52, 94
— 18. —	10 9 19, 8	329 51 39, 31	1 1 2, 78
— 19. —	10 4 48, 7	329 42 50, 74	0 48 25, 70
— 21. —	9 55 49, 8	329 26 1, 78	0 22 59, 65
— 22. —	9 51 21, 5	329 17 54, 97	0 10 24, 19

 Ostendit

Ostendit tabula sequens positiones Palladis geocentricas ad momenta observationum allata, ex elementis VIII *) computatas.

	Long. ⚴ geoc. vera	Latit. ⚴ borealis
Die 7. Septembris.	11ˢ 4° 55′ 18″,98	14° 1′ 32″,51
— 17. —	11 2 32 32, 90	12 38 9, 09
— 18. —	11 2 19 18, 02	12 29 22, 83
— 19. —	11 2 6 18, 13	12 20 32, 48
— 21. —	11 1 41 2, 35	12 2 41, 64
— 22. —	11 1 28 47, 57	11 53 41, 73

Pro reductione observationum habetur:

	Parallaxis horizont.	Aberr. Luminis in longitud.	Aberr. in latitud.
Die 7. Septembris.	3″,80	+ 11″,54	+ 6″,15
— 17. —	3, 76	+ 10, 45	+ 6, 83
— 18. —	3, 76	+ 10, 28	+ 6, 89
— 19. —	3, 75	+ 10, 11	+ 6, 96
— 21. —	3, 73	+ 9, 75	+ 7, 07
— 22. —	3, 73	+ 9, 57	+ 7, 13

Nutatio die 7. Sept. = + 14″, 20 et 23. Sept. = + 14″, 30. Quare declinationes observatae applicata parallaxi altitudinis, erunt ut sequitur:

Die

(*) Monatliche Correspondenz. April 1805.

	Declin. ⚵ borealis		Declin. ⚵ borealis
Die 7. Septemb.	3° 21′ 10″,50	Die 19. Sept.	0° 48′ 28″,92
— 17. —	1 13 56, 16	— 21. —	0 23 2, 87
— 18. —	1 1 2, 78	— 22. —	0 10 27, 41

Hincque positiones ⚵ observatae ad Eclipticam relatae ita elicientur:

	Longit. ⚵ appar. observata	Latit. ⚵ borealis
Die 7. Septembris.	11ˢ 4° 55′ 26″,64	14° 1′ 13″,17
— 17. —	11 2 32 48, 82	12 38 5, 35
— 18. —	11 2 19 40, 95	12 29 12, 40
— 19. —	11 2 6 41, 38	12 20 30, 08
— 21. —	11 1 41 26, 51	12 2 35, 72
— 22. —	11 1 29 9, 92	11 53 38, 63

Unde, adhibitis correctionibus ex aberratione luminis nutationeque oriundis, sequentes deducuntur comparationes:

	Longit. ⚵ vera observata	Elementa praebent	Latit. ⚵ vera observata	Elementa praebent
Die 7. Sept.	11ˢ 4° 55′ 0″,90	+ 18″,08	14° 1′ 7″,02	+ 25″,49
— 17. —	11 2 32 24, 12	+ 8, 78	12 37 58, 52	+ 10, 57
— 18. —	11 2 19 16, 42	+ 1, 60	12 29 5, 51	+ 17, 32
— 19. —	11 2 6 17, 01	+ 1, 12	12 20 23, 12	+ 9, 36
— 21. —	11 1 41 2, 48	— 0, 13	12 2 28, 65	+ 12, 99
— 22. —	11 1 28 46, 06	+ 1, 51	11 53 31, 50	+ 10, 23

Obser-

Observationes Junonis.

Tres tantum hujus planetae observationes communicabo, quia eum post diem 5. Octobris 1804. ob aerem saepe vaporosum, in meridiano exacte observare non licuit.

1804.	Tempus solare medium	Asc. recta ⚵ appar. observata	Decl. ⚵ appar. australis
Die 1. Octobris.	11^h 19′ 41″,1	357° 48′ 16″,80	5° 49′ 34″,49
— 2. —	11 5 7,0	357 38 42,45	6 2 12,71
— 5. —	10 51 29,4	357 11 9,90	6 39 12,01

Positiones Junonis geocentricae ad eadem observationum momenta, ex Elementis V *) inveniuntur ut sequitur:

	Longitudo ⚵ vera	Latit. ⚵ australis
Die 1. Octobris.	11^s 25° 39′ 16″,66	4° 28′ 20″,23
— 2. —	11 25 25 30,64	4 36 7,19
— 5. —	11 24 45 32,20	4 58 58,98

Quantitates ad reductionem observationum inserviendae:

	Parallaxis horizont.	Aberr. lumin. in longitud.	Aberratio in latitud.
Die 1. Octobris.	7″,46	+ 5″,43	— 3″,07
— 2. —	7,46	+ 5,38	— 3,04
— 5. —	7,43	+ 5,21	— 2,95

Nutatio

(*) Monatliche Correspondenz. May 1805.

Nutatio = + 14″,40.

Declinationes observatas per parallaxin altitudinis corrigendo erit:

Die 1. Octobris	declinatio ♃	5°	49′	27″,68
— 2.	—	—	6	2	5,90
— 5.	—	—	6	39	5,19

Ex quibus et ascensionibus rectis allatis reperitur:

	Long ♃ appar. observ.	Latit. ♃ australis
Die 1. Octobris.	11ˢ 25° 39 51″,81	4 28 6″,85
— 2. —	11 25 26 3,08	4 35 53,72
— 5. —	11 24 46 2,87	4 58 52,84

Quae per nutationem aberrationesque luminis correctae, sequentes praebent comparationes:

	Longitudo. ♃ vera observata	Elementa praebent	Latit. ♃ vera australis	Elementa praebent
Die 1. Oct.	11 25 39 31″,98	15″,32	4 28′ 9″,92	+ 10″,31
— 2. —	11 25 25 43,30	— 12,66	4 35 56,76	+ 10,43
— 5. —	11 24 45 43,26	— 11,06	4 58 55,79	+ 3,19

Observationes Saturni.

A°. 1805.	Tempus solare medium	Asc. recta appar. limbi occid. ♄	Declinatio austr. limbi super. ♄
Die 1. Aprilis N. St.	12 12 30″,4	192 56′28″,23	2° 34′ 17″,41
— 2. — —	12 8 17,8	192 52 16,66	2 32 26,53
— 3. — —	12 4 5,0	192 48 3,03	2 30 3,73
— 4. — —	11 59 51,9	192 43 44,02	2 28 49,06
— 5. — —	11 55 39,0	192 39 28,71	2 26 59,71
— 6. — —	11 51 26,1	192 35 13,20	2 25 15,29

Loca

Loca geocentrica ♄ ex tabulis pro allatis observationum momentis computata ita se habent:

	Longit. ♄ vera geocentrica	Latit. ♄ geocentr. borealis
Die 1. Aprilis.	6ˢ 12° 54′ 26″,51	2° 44′ 58″,12
— 2. —	6 12 49 48,02	2 44 59,83
— 3. —	6 12 45 9,52	2 45 0,67
— 4. —	6 12 40 31,62	2 45 1,36
— 5. +	6 12 35 53,72	2 45 1,78
— 6. —	6 12 31 16,19	2 45 1,85

Pro reductione observationum ad centrum Saturni, assumsi semidiametrum ejus apparentem = 8″,62, quae per cosinum declinationis divisa praebet semidiametrum in ascensione recta = 8″,63. Parallaxis ♄ horizontalis reperitur = 1″,00 quae in cosinum altitudinis ducta, dat parallaxin altitudinis = 0″,89. Ideoque ascensiones rectae ♄ augendae sunt quantitate = 8″,63, declinationibus autem quantitatem = 7″,73 adhibere oportet. Erit ergo:

	Ascensio recta centri ♄	Declinatio centri ♄ australis
Die 1. Aprilis.	192° 56 36″,86	2° 34′ 25″,14
— 2. —	192 52 25,29	2 32 34,26
— 3. —	192 48 11,66	2 30 39,46
— 4. —	192 43 52,65	2 28 56,79
— 5. —	192 39 37,34	2 27 7,44
— 6. —	192 35 21,83	2 25 23,02

Unde

Unde eruitur

Die	Longitudo ♄ appar. observata	Latit. ♄ apparens borealis
Die 1. Aprilis.	6ˢ 12° 54′ 31″,00	2° 44′ 46,92
— 2. —	6 12 49 56,02	2 44 51,43
— 3. —	6 12 45 17,61	2 44 58,71
— 4. —	6 12 40 38,98	2 44 52,69
— 5. —	6 12 36 1,13	2 44 54,23
— 6. —	6 12 31 25,03	2 44 51,12

Quae ab effectu aberrationis luminis nutationeque liberandae sunt. Aequatiunculae ad hunc scopum inservientes inveniuntur sequentes: nutatio + 15″,62; aberratio luminis in longitudine die 1. Aprilis = + 13″,55, die 4. Apr. = 13″,52 et die 6. Apr. = + 13″,50. Aberratio in latitudine autem die 1. Aprilis = — 0″,08, die 4. Apr. = — 0″,03, et die 6. Apr. = 0″,00. Quare positiones ♄ verae observatae correctionesque tabularum ita inveniuntur, uti sequens tabella ostendit:

Die	Longit. ♄ vera observata	Correctio tabularum	Latit. ♄ vera borealis	Correctio tabularum
Die 1. Apr.	6ˢ 12° 54′ 1″,83	— 24″,68	2° 44′ 47″,00	— 11″,12
— 2. —	6 12 49 26,86	— 21,16	2 44 51,50	— 8,33
— 3. —	6 12 44 48,46	— 21,06	2 44 58,76	— 1,07
— 4. —	6 12 40 9,84	— 21,78	2 44 52,72	— 8,64
— 5. —	6 12 35 32,00	— 21,72	2 44 54,25	— 7,53
— 6. —	6 12 30 55,91	— 20,28	2 44 51,12	— 10,73

Hincque concluditur correctio longitudinis ♄ = — 21″,78. Sumtoque medio arithmetico ex omnibus quantitatibus in ultima columna contentis, prodit correctio latitudinis = — 8″,07. Quoniam autem correctio latitudinis die 3. Aprilis inventa, a caeteris insigniter abludit, ideo eam excludendam, correctionemque latitudinis mediam ex reliquis 5 observationibus = — 9″,27 statuendam esse arbitror.

Transeo nunc ad computum oppositionis ♄. Tabulae praebent pro die 2. Aprilis 12^h 8′ 17″,8 t. m. longitudinem ♄ veram geocentricam . . . . . = 6^s 12° 49′ 48″,02

Correctio modo inventa . . . . — 21,78

Longitudo ♄ correcta = 6^s 12° 49′ 26″,24

Ad idem tempus habetur longitudo Solis vera . . . . 0^s 12° 43′ 17″,45.

Distabat itaque ♄ ab oppositione = 6′ 8″,79 in arcu. Supposito motu horatio ♄ = 11″,638 et Solis = 2′ 27″, 618 spatium temporis solaris medii, arcui 6′ 8″,79 respondens invenitur = 2^h 18′ 56″,54; hinc igitur oppositio ♄ cum ☉ contigit 1805 die 2. Aprilis 14^h 27′ 14″, 34. Pro hoc oppositionis momento ex praecedentibus sequens infertur hujus Planetae positio:

Longitudo vera ab Aequinoctio medio . . . . = 6^s 12° 48′ 59″,29

Latitudo geocentrica borealis . . = 2° 44′ 50″,64

Latitudo heliocentrica autem habetur = 2° 27′ 42″,84

Observa-

Observationes Urani.

A°. 1805.	Tempus solare medium	Ascens. recta ♅ appar. observata	Declin. ♅ australis observata
Die 4. Apr. N. St.	12ʰ 20′ 25″,8	197° 53′ 3″,93	6° 52′ 30″,47
— 5. — —	12 16 20,4	197 59 41,14	6 51 29,37
— 6. — —	12 12 15,1	197 48 20,00	6 50 39,96
— 8. — —	12 4 4,2	197 43 32,61	6 48 39,03
— 13. — —	11 43 36,9	197 31 33,64	6 43 54,22

Positiones Urani geocentricae verae ex tabulis ad eadem momenta calculo subductae, sequenti in tabella continentur:

	Long. ♅ geoc. vera	Latit. ♅ borealis
Die 4. Aprilis.	6ˢ 19° 6′ 11″,62	0° 39′ 34″,84
— 5. —	6 19 3 37,91	0 39 34,65
— 6. —	6 19 1 4,05	0 39 34,42
— 8. —	6 18 55 55,86	0 39 33,89
— 13. —	6 18 43 6,92	0 39 31,63

Parallaxis altitudinis habitur = 0″,46, qua a declinationibus allatis dempta, eruitur

	Long. ♅ appar. observata	Latit. ♅ borealis
Die 4. Aprilis.	6ˢ 19° 6′ 31″,67	0° 39′ 53″,78
— 5. —	6 19 3 57,32	0 39 56,69
— 6. —	6 19 1 28,89	0 39 49,18
— 8. —	6 18 56 18,99	0 39 52,86
— 13. —	6 18 43 30,29	0 39 45,39

 Quibus

Quibus sequentes aequatiunculae applicandae sunt:

	Aberr. lumin. in longitud.	Aberratio in latitudine
Die 4. Aprilis	+ 15″,09	+ 0″,02
— 8. —	+ 15,13	+ 0,03
— 13. —	+ 15,10	+ 0,04

Nutatio = + 15″,64.

Obtinebitur itaque:

	Longit. ♂ vera observata	Correctio tabul.	Latit. ♂ borealis observata	Correctio tabular.
Die 4. Aprilis	6ˢ 19° 6′ 0″,94	−10″,68	0° 39′ 53″,76	+18″,92
— 5. —	6 19 3 26,58	−11,33	0 39 56,67	+22,02
— 6. —	6 19 0 58,14	− 5,91	0 39 49,16	+14,74
— 8. —	6 18 55 48,22	− 7,64	0 39 52,83	+18,94
— 13. —	6 18 42 59,55	− 7,37	0 39 45,35	+13,72

Ex hisce sequitur, correctionem longitudinis ♂ = − 8″,59, correctionem latitudinis autem = + 17″,67 statui posse.

Tabulae praebent longitudinem ♂ geoc. veram pro A°. 1805.

Die 8. Apr. 19^h 30′ 0″,0 temporis solaris medii = 6ˢ 18° 55′ 8″,00
Correctio longitudinis . . − 8,59

Long. ♂ correcta . . . 6 18 54 59,41
Long. ☉ habetur . . 0 18 55 3,36

Unde

Unde oppositio eo tempore jam contigerat, motuque relativo ⊙ et ♂ arcus = $3'', 95$ post eandem percursus fuerat. Ideoque tempus solare medium oppositionis ♂ verae, ob motum horarium relativum ⊙ et ♂ = $2'\ 33'', 63$, concluditur = $19^h\ 28'\ 27'', 44$ die 8. Aprilis, positione ♂ existente ut sequitur:

Longitudo ♂ vera correctaque		= $6^s\ 18°\ 54'\ 59'', 57$
Latitudo geocentrica	borealis	= 0 39 51, 42
— heliocentrica	borealis	= 0 37 41, 08

EXTRAIT

EXTRAIT DES OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES

FAITES À ST. PETERSBOURG ANNÉE MDCCXCIX D'APRES LE NOUVEAU STILE.

Présenté à l' Academie le 23. Avril 1800.

I. Barométre.

1) Hauteurs extremes, Variation, Milieu et Hauteur moyenne pour chaque mois de l'année 1799.

m. signifie *matin* ou *avant-midi*, et *s. soir* ou *après midi.*

Mois	Au plus haut P. cent.	Au plus haut jour et heure	Au plus bas P. cent.	Au plus bas jour et heure	Variat. centien.	Milieu P. cent.	Haut moyene P. mill.
Janvier	28. 66	le 15 à 3 h. s.	27. 95	le 30 à 3 h. m.	71	28. 305	28. 366
Fevrier	28. 70	le 9 à 6 h. m.	17. 93	le 11 à 6 h. m.	77	28. 315	28. 315
Mars	29. 96	le 21 à 12 h. mid.	27. 96	le 14 matin	100	28. 46	28. 490
Avril	28. 64	le 4 à 11 h. m.	27. 58	le 25 à 10 h. m.	106	28. 11	28. 191
Mai	28. 53	le 31 à 10 h. m.	27. 74	le 21 à 11 h. s.	79	28. 13½	28. 109
Juin	28. 54	le 9 à 11 h. m. et le 21 à 2 h. s.	27. 85	le 13 à 3 h. m.	69	28. 19½	28. 198
Juillet	28. 37	le 1 à 4 h. s. et le 5 à midi	27. 65	le 27 à 6 h. m.	72	28. 01	28. 012
Août	28. 35	le 10 et 17 à midi	27. 79	le 8 à 9 h. m.	56	28. 07	28. 149
Sept.	28. 59	le 9 à 12 h. md.	27. 51	le 21 à 1 h. s.	108	28. 05	28. 134
Octob.	28. 78	le 13 à 10 h. s.	27. 66	le 1 à 8 h. m	112	28. 22	28. 293
Novbr.	28. 63	le 15 à 10 h. m.	27. 31	le 30 à 11 h. m	132	27. 92	28. 077
Décmb.	28. 92	le 21 à 6 h. s.	27. 66	le 17 à 8 h. m	126	28. 29	28. 405
A.	28. 96	le 21 Mars	27. 31	le 30 Novemb	165	28. 13½	28. 228
H.	29. 37	le 24 Dec. 1798	27. 51	le 10 Nov. 1798	186	28. 44	28. 311
I.	28. 78	le 13 Octob.	27. 51	le 21 Septembr.	127	28. 14½	28. 149

2) Nom-

2) Nombre des jours auxquels la hauteur du Baromêtre a surpasse quelques points principaux de l'echelle, avec la hauteur qui répond à chaque demi-mois.

Mois	Au desssus de					Autant au dessus qu'au dessous de rouc. decim.
	27. 80 jours h.	27. 90 jours h.	28. 00 jours h.	28. 10 jours h.	28. 20 jours h.	
Janvier	31. 0	31. 0	29. 12	66. 17	24. 20	28. 368
Février	28. 0	28. 0	27. 6	23. 23	19. 10	28. 314
Mars	31. 0	31. 0	30. 0	28. 0	27. 10	28. 521
Avril	28. 13	27. 10	24. 10	21. 1	13. 7	28. 180
Mai	30. 3	26. 16	22. 8	19. 8	13. 16	28. 178
Juin	30. 0	28. 3	22. 10	18. 7	15. 5	28. 210
Juillet	27. 14	19. 3	14. 23	9. 9	7. 12	27. 987
Août	30. 6	29. 0	26. 16	19. 19	11. 22	28. 165
Septmb.	26. 4	23. 8	20. 10	17. 9	13. 9	28. 148
Octobre	30. 9	29. 12	27. 0	22. 4	15. 21	28. 275
Novmb.	26. 16	24. 15	20. 15	14. 6	7. 13	28. 092
Decemb.	29. 11	29. 7	29. 2	26. 2	24. 11	28. 400
A	349. 4	327. 2	294. 22	246. 16	194. 12	28. 230
H	174. 7	169. 3	155. 16	136. 9	115. 18	28. 332
E	174. 12	155. 18	133. 14	106. 8	77. 18	28. 137

A marque l'intervalle de toute l'année depuis le 1 Janvier jusqu'au 31. Decembre 1799, comprenant les 365 jours de l'année.

H mar-

H marque l'intervalle des six mois de l'hiver depuis le 1. Novembre 1798 jusqu'au 1. Mai 1799, comprenant 181 jours.

E marque l'intervalle des six mois de l'Eté depuis le 1. Mai 1799 jusqu'au 1. Novembre 1799, comprenant 184 jours.

Les déscentes les plus considérables du Barométre ont été observées:

1) Le 15 Decembre de 1,12 ou de $13\frac{2}{5}$ lignes de pouces en 42 heures, le Barométre ayant baissé de 28,78 jusqu'à 27, *66*. Thermométre de 169° à 159 vent du S. Ou. fort, beaucoup de neige et grêle.

2) Le 28 Novembre à midi d'une pouce ou de 12 lignes en 47 heures, la hauteur du Baromètre étant tombée de 28,31 jusqu'à 27,31. Le froid diminuant de 159° à 145° de chaleur. Le vent souffloit fortement du NE. le ciel se couvroit; il neigeoit et pleuvoit.

Les montées du Baromètre n'ont pas été aussi considerables: j'en indiquerai seulement celles qui l'ont été le plus.

1) Le 20 Decembre à 3 heures après midi de 0,90 pouces ou de $10\frac{4}{5}$ lignes en 27 heures, la hauteur du Baromètre ayant augmenté de 28,07 jusqu'à 28,97. Le froid augmente de 162 à 180°. Le vent devint très fort du NE., et le ciel fut couvert de nuages.

2) Le

2) Le 1 Decembre à 12 heures midi, de 0,81 pouces ou de $9\frac{3}{4}$ lignes en 24 heures, la hauteur du Baromètre ayant augmenté de 27,72 jusqu' à 28,53. Le froid augmenta de 160 à 169 degrés. Le vent de l' Ouest diminua et devint calme. Le ciel d' abord couvert d' un leger brouillard devint entierement serein.

La variation totale ou la différence entre la plus grande élévation du Baromètre et sa plus petite fut dd 1,32 pouces en Novembre et de 0,56 en Août: elle fut encore plus grande en hyver qu' en été.

La hauteur moyenne du Baromètre se trouve être la plus grande en Mars et la plus petite en Juillet. Elle fut en général considerablement plus grande l'année 1799 que dans toutes les années précedentes depuis 1770. Et il est encore à remarquer que cette hauteur moyenne depuis les années 1790, 91 et 92, où elle n'a été que de 28, 08 est toujours allée en augmentant l'Instrument ayant pourtant été le même et son exposition si peu changée pendant tout le temps que j'observe, qu'elle n'a pas pu influer considérablement sur sa hauteur. Il seroit trop tôt de vouloir raisonner sur ce phénomène, mais toujours mérite t'il qu'on y soit attentif.

II. Thermometre.

1) Hauteurs extremes, avec leur différence, et l'Etat moyen du froid et de la chaleur pour chaque mois de l'année 1779.

	Hauteurs extremes					Etat moyen	
	Au plus bas		Au plus haut		Différens	Froid moyen	Chaleur moyenne
Mois	Degré	jour et heure	Degré	jour et heure	Degrés	Degrés	Degré
Janv.	187	le 27 à 6 h. m.	149	le 1 jusqu'au 3 h. s.	38	167. 9	161. 3
Févr.	206	le 16 à 7 h. m.	145	le 27 à 2 h. s.	61	184. 8	173. 0
Mars	188	le 28 à 6 h. m.	144	le 12 à 2 h. s.	44	167. 7	153. 6
Avril	178	le 3 à 6 h. m.	131	le 30 à 2 h. s.	47	152. 4	142. 3
Mai	152	le 2 à 6 h. m.	122	le 31 à 2 h. s.	30	143. 2	135. 2
Juin	139	le 12 à 10 h. s.	109	le 24 à 2 h. s.	30	130. 6	120. 2
Juill.	131	le 29 à 10 h. s.	105	le 3 à 2 h. s.	26	125. 1	118. 6
Août	136	le 26 à 6 h. m.	119	le 1 et 22 à 2 h. s.	17	130. 7	124. 8
Sept.	145	le 18 à 6 h. m. le 26 à 10 h. s.	119	le 2 à 2 h. s.	26	137. 2	130. 9
Oct.	153	le 28 à 6 h. m.	133	le 1 à 10 h. m.	20	144. 8	139. 9
Nov.	161	le 28 à 6 h. m.	139	le 5 et 8 à 2 h. s.	22	149. 2	145. 6
Dec.	195	le 27 à 10 h. s.	147	le 9 à 2 h. s. et le 10 à 6 h. m.	48	169. 1	161. 7
A	206	le 16 Février	105	le 3 Juillet	101	148 98	142. 0
H	206	le 16 Février	131	le 30 Avril	75	165. 8	157. 1
E	153	le 28 Octobre	105	le 3 Juillet	48	135. 5	128. 2

2) Nom-

2) Nombre des jours, aux quels le froid et la chaleur ont surpasse quelques divisions principales du Thermomètre de Délisle.

Mois	Le froid a été plus grand que							La chaleur a été grande que						
	200 jours	190 jours	180 jours	170 jours	160 jours	150 jours	140 jours	110 jours	120 jours	130 jours	140 jours	150 jours	160 jours	170 jours
Janv.			6	12	22	31	31					1	18	24
Févr.	4	13	20	22	23	28	28					3	6	8
Mars			3	7	28	31	31					8	26	31
Avril				3	5	12	30				13	26	30	30
Mai						1	25			3	25	31	31	31
Juin							-	3	17	29	30	30	30	30
Juill.							-	4	17	31	31	31	31	31
Août							-		5	31	31	31	31	31
Sept.							9		1	14	30	30	30	30
Oct.						4	26				14	31	31	31
Nov.					2	9	30				2	27	30	30
Dec.		2	6	15	25	31	31					4	16	26
A	4	15	35	59	105	151	245	7	40	108	176	253	310	333
H	4	16	37	60	106	147	181				14	61	122	145
E						5	60	7	40	103	161	184	184	184

3) Enumération détaillée des 106 jours d'hyver où le froid a surpassé 160[d] ou environ 5 degrés de Reaumur, pendant les 6 mois d'hyver compris dans l'Intervalle H depuis le 1 Novembre 1798 jusqu'au 1 Mai 1799.

	Le Froid a surpassé	
200[d]	le 9. 15. — 17 Février . .	en 4 joars
	Le Froid a été	
entre 190 et 200	en 1798 le 23 — 25 Décembre, en 1799 le 2. 4 — 8. 13. 14. 18 Février .	— 12 —
— 180 et 190	en 1798, le 17. 19. 20. 21. 22 Déc. en 1799 le 23. 24. 27. 29. 30. 31 Janv. le 1. 3. 10 — 12. 19. 20 Février et le 27 — 28 Mars . . .	— 21 —
— 170 et 180	en 1798 le 25. 26 Nov. le 7. 8. 16. 18. 27. 28. Déc., en 1799 le 12. 15. 22. 25. 26. 28 Janv., le 21. 22 Févr., le 7. 16. 24. 26 Mars et le 2. 3. 4 Avril	—23 jours
— 160 et 170	en 1798 le 20. 22 — 24. 27 Nov., le 6. 9. 10. 15. 26. 29. 30 Dec., en 1799 le 2. 3. 5 — 7. 10. 11. 13. 14. 21 Janv., le 24 Févr., le 2. 3. 4 6. 8—14. 17—23 25. 30. 31 Mars et le 1. 5 Avril.	— 46 —

4) Enu-

4) Enumération detaillée des 108 jours d'Eté où la chaleur a surpassé 130° ou environ 10 degrés de Reaumur pendant les 6 mois d'Eté compris dans l'Intervalle E depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1799.

	La Chaleur a surpassé	
110ᵈ	Le 24. 25. 30 Juin et le 1 — 4 Juillet	en 7 jours
110 et 120	le 1 — 6. 17. 18. 21 — 23. 26. 28. 29 Juin, le 5 — 14. 18. 23. 26 Juillet, le 1. 5. 13. 22. 23 Août et le 2 Septmbr.	— 33 —
120 et 130	le 28. 30. 31 Mai, le 7 — 10. 12 — 16. 19 20. 27 Juin, le 15 — 17. 19 — 22. 24. 25. 27 — 31 Juillet, le 2 — 4. 6 — 12. 14 — 21. 24 — 31 Août et le 1. 3. 4 — 14 Septembre . .	— 68 —

En H il a commencé à geler le 22. Octobre 1798, c'est à dire encore avant le commencement de l'intervalle H et il a gelé pour la dernière fois le 2. de Mai 1799, aprés un intervalle de 192 jours. En A et E où il avoit gelé pour la dernière foi le 2. de Mai, il a recommancé à geler le 17. Oct. 1799 aprés un intervalle de 168 jours.

Il a gelé continuellement en A 112 jours, en H 120 jours et en E 0 jour.

Il n'a gelé point du tout en A 214 jours, en H 34 jours et en E 179 jours.

III.

III. Vent.

1) Tableau général de la force et de la direction des vents pour chaque mois de l'année 1799.

Mois	Calme	Vent medio-cre	Vent fort	Vent très fort	Nord	NE	Est	SE	Sud	SOu	Ouest	NOu.
	Jours	Jours	Jours	Jours	Jours	Jours	Jours	Jours	Jours	Jours	Jours	Jours
Janvier	4	18	7	2	0	0	4	2	5	6	10	4
Février	4	19	4	1	1	1	7	2	5	2	4	6
Mars	9	17	5	0	1	0	0	6	2	7	9	6
Avril	1	16	2	1	0	2	7	6	2	4	8	1
Mai	3	8	15	5	1	13	6	1	1	5	2	2
Juin	5	11	11	3	0	1	10	3	3	7	4	2
Juillet	9	11	8	3	0	8	2	2	3	4	9	3
Août	5	5	17	4	1	3	3	3	0	11	8	2
Septbr.	4	8	14	4	0	4	8	1	6	7	2	2
Octbr.	8	13	8	2	2	7	5	2	5	7	0	3
Novbr.	3	15	8	4	4	1	4	1	2	11	4	3
Décbr.	8	12	5	6	1	2	4	0	2	5	10	7
A	63	153	114	35	11	42	60	29	36	76	70	41
H	27	102	45	7	8	4	23	23	22	28	42	31
E	34	56	73	21	4	36	34	12	18	41	25	14

2) Rapport

2) Rapport de la force des vents et des plages tirés du Tableau précédent.

Mois	Rapport de la force des vents	Rapport des 4 plages			
		Nord	Est	Sud	Ouest
Janvier	271	2	5	9	15
Fevrier	235	5	8	7	8
Mars	203	4	3	8	16
Avril	297	2	11	7	10
Mai	384	8	13	4	6
Juin	317	2	12	8	8
Juillet	281	6	7	6	12
Août	371	4	6	7	14
Septbr.	360	3	11	10	6
Octbr.	265	8	9	10	4
Novbr.	323	6	5	8	11
Décbr.	322	6	5	4	16
A	302	56	95	88	126
H	258	26	36	48	71
E	329	29	58	45	52

Les Mois de Mai, d'Août et de Septembre ont été les plus venteux, ceux de Mars et de Fevrier, les plus calme. L'Hyver (H.) a été plus calme que l'Eté qui l'a suivit dans le rapport de 258 : 329.

Le vent dominant étoit dans toute l'année celui de l'ouest, et particulierement celui du Sudouest: cependant en Eté le vent de l'Est paroissoit dominer le plus. Le vent de l'Est

se

se fit sentir le plus au mois de Mai, où il partageoit son regne avec celui du Nord. Le vent du Sud dominoit le plus en Septembre et en Octobre.

3) Enumération détaillée des 149 jours des vents forts et très forts de la table 1re.

Direction	Jours et Mois	Nombre des Jours
Nord	Le 7 de Mai et le 23 de Novembre	2
NE	Le 29 Avril, le 1—4. 8. 10—13. 15. 19 Mai, le 21. 22. 23 Juillet, le 13 17. 18 Août, le 23 Octobre, le 28 Nov. et le 21 Decembre	21
Est	Le 22 Janv., le 18. 19. 24 Févr., le 15. 17 Avr., le 9. 14 Mai, le 12. 19. 25 Juin, le 19 Juillet, le 19 Août, le 7. 11. 12 Septembre et le 26 Décembre . .	17
SE	Le 10. 11. 21. 22 Avril, le 31 Mai, le 14. 24 Juin et le 14. 26 Août	9
Sud	Le 25. 26 Fevr., le 18 Mars, le 8. 19 Avril, le 21 Mai, le 20. 28 Juin, le 2. 3. 19—21 Septembre, le 11. 25 Octobre et le 28 Décembre	17
SOu.	Le 9. 10. 11. 12. 13. 16 Janv., le 14 Mars, le 13. 14. 25 Avril, le 22 23. 28 Mai, le 1. 4. 6 Juin, le 7. 9. 10. 24. 25. 27. 28. 29. 30. 31 Août, le 23. 24. 25. 29. 30 Sept., le 1. 3. 7. 10. 28. 29 Octobre, le 6—10 12. 16 Novembre et le 17. 22. 30 Décembre .	47
Ouest	Le 14. 15 Janv., le 6-12 Mars, le 12 Avril, le 18 Mai, le 7. 8. 9. 10 Juin, le 15. 27—31 Juillet, le 4. 6. 8. 15 Août, le 5 28 Sept., le 13. 21 Nov., et le 9. 11. 16 Déc.	27
NOu.	Le 7 Mars, le 16 Juil., le 12 Août, 4. 22. 26. Septbr., le 22 Novembre et le 14. 20 Dêcembre . .	9
	En tout	149

Direction

Direction	Jours et Mois	Nombre des Jours
	Parmi ces 149 jours de vent fort, ont été les plus violant, ceux du	
NE	Le 2. 13 Mai et le 21 Décembre	3
Est	Le 25 Juin et le 26 Décembre	2
SE	Le 24 Juin	1
Sud	Le 25 Février, le 21 Mai	2
SOu.	Le 12 Janvier, le 14 Avril, le 22. 28 Mai, le 7. 9. 29 Août, le 24. 25. 29 Septembre, le 1 28 Octobre, le 8. 10. 12 Novembre et le 22. 30 Décembre	17
Ouest	Le 14 Janv., le 10 Juin, le 28. 30 Juillet, le 6 Août, le 28 Septembre et le 16 Décembre . . .	7
NOu.	Le 16 Juillet, le 22 Novembre et le 20 Décembre .	3
	Jours de vent violant	35

IV. Atmosphère.

Mois.	Ciel			Brouillard.	Pluie		Neige	
	ſerein.	nuages.	couvert		forte	médiocre	forte	médiocre
	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.
Janvier . .	4	12	15	7	0	0	0	9
Février . .	12	9	7	10			1	3
Mars . . .	14	15	2	11			1	4
Avril . .	3	20	7	9	6	7	0	4
Mai	1	16	14	2	4	9		1
Juin . . .	8	17	5	2	6	8		
Juillet . .	10	17	4	3	7	8		
Août .	6	20	5	5	9	7		
Septembre .	2	17	11	4	15	4		
Octobre .	0	16	15	11	2	13		5
Novembre .	1	10	19	8	3	14	1	8
Décembre .	7	14	10	3	0	1	4	9
A	68	183	114	75	52	71	7	43
					123		50	
H	41	78	62	49	8	17	2	40
					25		42	
E	27	103	54	27	43	49	0	6
					2		6	

Le nombre des jours entierement serein a été le plus grand en Mars ensuite en Février et en Juillet. En Octobre il n'y en avoit aucun, et en Mai on n'en a a compté qu'un seul. Il n'y en avoit en hyver beaucoup plus, qu'en Eté, où on n'en a compté que 27. dont plussieurs n'étoint pas entie-

rement

rement beau, c'est à dire sans vent et sans brouillard. Ces brouillans qui l'année passé ont déja été bien fréquens, l'ont été prèsque de la moitié plus cette année-ci.

Il ne gréla que trois fois, le 14, 24 Août et le 16 Décembre.

Dans l'hyver de 1798 à 1799 il neigea pour la premiere fois le 13 Octobre, et pour la derniere fois le 21 Mai après un intervalle de 220 jours. Vers l'approche de l'hyver suivant en 1799 il recommença à neiger le 23 Octobre, après un intervalle de 155 jours.

Le nombre du orages monta cette année ci à 12, le 6. 24. 25. 26 27. 28 Juin, le 3. 9. 24 26 Juillet et le 24. 30 Août. Il tonna de loin de 26 le 27 Août, et il fit des éclairs de nuit le 22 Juin et le 6 Juillet.

Je n'ai remarqué qu'une seule aurore boréale le 22 Janvier et deux parhelin le 19 Février et le 14 Avril: mais j'avoue que je n'ai pas été fort attentif à ces phénoménes, et que d'ailleurs cette année-ci mes fréquentes maladies ni l'exposition de ma demeure me l'ont permis.

La riviere Néva aprés avoir été couverte de glaces pendant 146 jours elle debacla le 19 Avril. Barom. 27, 73. Therm. 141°. Brouillard épais, ciel couvert, beaucoup de pluie et vent du SE, ensuite du Sud plus fort. Les glaces du lac Ladoga aniverent le 28 Avril et la riviere les charia jusqu'au 11 Mai. Le 29 Novembre se formerent des nouvelles glaces,

 et

et la riviere les charia en grande abondance jusqu'au 3 Décembre où elle en fut entierement couverer et prise, aprés avoir pu la traverser cette année-ci en bâteaux pendant 228 jours. Baromètre 28. 57. Thermomètre 165′, brouillard, calme, Ciel serein.

EXTRAIT

EXTRAIT PARALLELE DES OBSERVATIONS METEOROLOGIQUES

FAITES D'APRÈS LE NOUVEAU STILE A St. PETERSBOURG ET À MOSCOU EN 1800.

Présenté à la Conférence le 6 Mai 1801.

Janvier 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
I. Barometre.		
Au plus haut - - -	29, 32 pouces Fr.	28, 04 pouces Fr.
	le 9 à 6 h. soir	le 9 à 10 h. S.
Au plus bas - - -	27, 78	26, 83
	le 28 à 6 h. S.	le 3 à 2 h. S.
Variation totale - -	1, 54	1, 21
Milieu arithmetique - -	28, 55	27, 435
Hauteur moyenne - -	28, 473	27, 488
II. Thermometre.		
Au plus bas, ou le plus grand froid	195 D.; R − 24°	201 D.; R − 27°,2
	le 7 à 6 h. m.	le 7 et 9 à 6 h. m.
Au plus haut, ou le moindre froid	144; R + 3,2	144, R + 3,2
	le 30 à 2 h. S.	le 21 à 2 h. S.
Froid moyen de la nuit	170,6; R — 11,0	173,9; R — 12,7
Froid moyen de l'après midi	163,5; R — 7,2	165,5; R — 8,2
Le fr. de la nuit plus fort que 200° D	- - - -	en 2 Jours
entre 200 et 190	en 3 Jours	- 5 -
190 et 180	- 8 -	- 6 -
180 et 170	- 3 -	- 3 -

h. m. signifie heure du matin, ou avant midi.
h. S. - - - - - du soir, du après midi.
D. Signifie degrés de Délisle.
R. - - - - de Reaumur.

Jan-

Janvier 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
entre 170 et 160	en 5 Jours	en 6 Jours
160 et 150	- 10 -	- 8 -
150 et 140	- 2 -	- 1 -
Le froid de l'après midi		
moindre que 150°	- 10 -	- 4 -
entre 150 et 160	- 6 -	- 11 -
160 et 170	- 3 -	- 5 -
170 et 180	- 4 -	- 2 -
180 et 190	- 8 -	- 7 -
190 et 200	- - - -	- 2 -
III. Vent.		
Calme - - -	en 10 Jours	en 1 Jour
Vent foible et mediocre -	- 9 -	- 13 -
Vent fort - - -	- 6 -	- 15 -
Vent très fort - -	- 6 -	- 2 -
Rapport des quatre plages		
Nord : Est : Sud : Ouest =	5 : 9 : 8 : 9	6 : 10 : 7 : 8
IV. Atmosphere.		
Ciel serein - -	en 6 Jours	en 5 Jours
Ciel en partie serein, nuages	- 11 -	- 7 -
Ciel couvert - -	- 14 -	- 19 -
Brouillard - -	- 7 -	- 4 -
Neige { médiocre -	- 11 } 13	- 11 } 11
Neige { forte - -	- 2 }	- 0 }
Pluie médiocre -	- 2 -	- 1 -
Grele - - -	- 1 -	- - - -
Parhelies - -	- - - -	le 1, 4, 6 = 3
Paraselenes - -	- - - -	le 5, 7, 12, 13 = 4

Fevrier

Fevrier 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
I. Barometre.		
Au plus haut - -	28, 77 pouces	27, 67 pouces
-	le 26 à 12 h. md.	le 1 à 6 h. matin
Au plus bas - -	27, 87	26, 83
- - -	le 22 à 12 h. md.	le 22 à 10 h. soir
Variation totale - -	0, 90	0, 84
Milieu arithmetique -	28, 32	27, 25
Hauteur moyenne - -	28, 328	27, 335
II. Thermometre.		
Au plus bas, ou le plus grand froid	200 D.; R – 26°,7	197 D.; R – 25°,1
- - -	le 25 à 6 h. matin	le 25 et 26 matin
Au plus haut, ou le moindre froid	144; R + 3, 2	142, R + 4,3
- - -	le 3 après midi	le 7 après midi
Froid moyen de la nuit -	171,1; R – 11,2	159,0; R – 4,8
Froid moyen de l'après midi	169,0; R – 10,1	158,6; R – 4,6
Le froid de la nuit plus fort		
que 190°	en 4 Jours	en 5 Jours
entre 190 et 180	- 3 -	- 4 -
180 et 170	- 4 -	- 4 -
170 et 160	- 7 -	- 7 -
160 et 150	- 8 -	- 8 -
150 et 140	- 2 -	- - - -
Le froid de l'après midi	- - - -	- - - -
moins fort que 150	- 6 -	- 4 -
entre 150 et 160	- 12 -	- 15 -
160 et 170	- 6 -	- 4 -
170 et 180	- 3 -	- 3 -
180 et 190	- 1 -	- 2 -

Fevrier 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
III. Vent.		
Calme - - - -	en 3 Jours	en 0 Jours
Vent foible et mediocre -	- 13 -	- 10 -
Vent fort - - -	- 9 -	- 15 -
Vent tres fort - -	- 3 -	- 3 -
Rapport des quatre plages		
Nord : Est : Sud : Ouest =	3 : 2 : 7 : 16	8 : 4 : 5 : 11.
IV. Atmosphere.		
Ciel serein - -	en 7 Jours	en 4 Jours.
Ciel en partie serein, nuages	- 9 -	- 6 -
Ciel couvert - -	- 12 -	- 18 -
Brouillard - -	- 3 -	- - - -
Neige { mediocre -	- 7 } 9 -	- 11 } 15 -
Neige { copieuse -	- 2 }	- 4 }
Pluie mediocre -	- 1 -	- - - -
Parhelie - -	- - - -	le 24.

Mars

Mars 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
I. Barometre.		
Au plus haut - -	28, 85 pouces le 16 à 1 h. après midi	27, 67 pouces le 17 avant et après midi
Au plus bas - - -	27, 92 le 20 à 6 h. matin	27, 04 le 27 après midi
Variation totale - -	0, 93	0, 63
Milieu arithmetique - -	28, 385	27, 355
Hauteur moyenne - -	28, 30	27, 333
II. Thermometre.		
Au plus bas, ou le plus grand froid - - -	192°D; R−22°,4 le 4 à 6 h. matin	188°D; R−20°,3 le 17 matin.
Au plus haut, ou la chaleur la plus grande - -	142, R + 4,3 le 31 après midi	138; R + 6,4 le 31 après midi
Froid moyen de la nuit -	172,1; R − 11,8	168,0; R − 9,6
Froid moyen de l'après midi	157,7; R − 4,1	151,8; R − 0,9
Le froid de la nuit plus fort que - - 190°D	en 3 Jours	- - - -
entre 190 et 180	- 6 -	en 6 Jours
180 et 170	- 6 -	- 7 -
170 et 160	- 12 -	- 10 -
160 et 150	- 4 -	- 8 -
La chaleur de l'après midi plus grande que - 140	- - - -	- 2 -
entre 140 et 150	- 6 -	- 13 -
150 et 160	- 13 -	- 10 -
160 et 170	- 9 -	- 5 -
170 et 180	- 3 -	- 1 -

Mars 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
III. Vent.		
Calme - - - - -	en 3 Jours	- - - - -
Vent foible et mediocre -	- 14 -	en 8 Jours
Vent fort - - -	- 11 -	- 17 -
Vent très fort - -	- 3 -	- 6 -
Rapport des quatre plages		
Nord : Est : Sud : Ouest =	4 : 12 : 2 : 13	3 : 14 : 5 : 9
IV. Atmosphere.		
Ciel serein - - -	en 7 Jours	en 1 Jour
Ciel en partie serein -	- 10 -	- 13 -
Ciel couvert - - -	- 14 -	- 17 -
Brouillard - -	- 6 -	- 1 -
Neige { mediocre -	- 11 } 16	- 17 } 19
Neige { copieuse -	- 5 }	- 2 }
Pluie - - -	- 1 -	- - - - -

Avril

Avril 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
I. Barometre.		
Au plus haut - -	28, 77 pouces le 2 à 12 h. midi	27, 75 pouces le 3 avant midi
Au plus bas - -	27, 57 le 15 à 10 h. avant midi.	26, 92 le 11, 12, 13 et le 27.
Variation totale - -	1, 20	0, 83
Milieu arithmetique -	28, 17	27, 335
Hauteur moyenne - -	28, 153	27, 255
II. Thermometre.		
Au plus bas, ou le plus grand froid - - -	169$^{\partial}$D; R−10$^{\partial}$,1 le 13 matin	171$^{\partial}$D; R−11$^{\partial}$,2 le 3 matin
Au plus haut, ou la plus grande chaleur - -	122; R + 14,9 le 25 après midi	114; R + 19,2 le 24 et 25 apr. md
Froid moyen de la nuit -	151,1; R — 0,7	147,7; R + 1,3
Chaleur moyenne de l'après midi	141,4; R + 4,6	134,3; R + 8,3
Froid de la nuit plus grand que 170$^{\partial}$D	- - - -	en 1 Jour
entre 170$^{\partial}$ et 160	en 6 Jours	- 4 -
160 et 150	- 9 -	- 3 -
150 et 140	- 13 -	- 17 -
140 et 130	- 2 -	- 5 -
Chaleur de l'après midi plus grande que - 120$^{\partial}$	- - - -	- 4 -
entre 120 et 130	- 3 -	- 4 -
130 et 140	- 8 -	- 13 -
140 et 150	- 15 -	- 7 -
150 et 160	- 4 -	- 2 -

Avril 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
III. Vent.		
Calme - - -	en 3 Jours	- - - -
Vent foible et mediocre -	- 15 -	en 7 Jours
Vent fort - - -	- 9 -	- 17 -
Vent tres fort - - -	- 3 -	- 6 -
Rapport des quatre plages		
Nord : Est : Sud : Ouest =	3 : 7 : 7 : 13	7 : 2 : 3 : 18
IV. Atmosphere.		
Ciel serein - - -	en 5 Jours	en 4 Jours
Ciel en partie serein ; nuages	- 15 -	- 10 -
Ciel couvert - -	- 10 -	- 16 -
Brouillard - -	- 2 -	- 1 -
Neige { mediocre -	- 8 } 9 -	- 5 } 7 -
Neige { copieuse -	- 1 }	- 2 }
Pluie { mediocre -	- 8 } 9 -	- 8 } 7 -
Pluie { abondante -	- 1 }	- 2 }
Grell - - -	le 9 et le 27	le 27.
Orage - - -	le 27 matin.	le 27.

Mai

Mai 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
I. Barometre.		
Au plus haut - -	28, 86 pouces le 3 à 3 h. apr. md.	27, 75 pouces le 4 à 6 h. m.
Au plus bas - - -	27, 68 le 10 à 4 h. s.	26, 92 le 11 à 6 h. m.
Variation totale - -	1, 18	0, 83
Milieu arithmetique - -	28, 27	27, 335
Hauteur moyenne - -	28, 332	27, 33
II. Thermometre.		
Au plus bas, ou la moindre chaleur - - -	152∂D; R − 1∂,1 le 1 à 6 h. m.	157∂D; R − 3∂,7 le 1 à 10 h. s.
Au pl. haut, ou la plus grande chal.	114; R + 19,2	105; R + 24
Chaleur moyenne de la nuit	142,3; R + 4,2	139; R + 5,9
Chaleur moyenne de l'après midi	133,1; R + 9,0	126,4; R + 12,6
Froid de la nuit plus grand que - - - 150∂D	en 4 Jours	en 5 Jours
entre 150 et 140	- 15 -	- 13 -
140 et 130	- 11 -	- 11 -
130 et 120	- 1 -	- 2 -
Chaleur de l'après midi plus grand que - 110∂	- - - -	- 2 -
entre 110 et 120	- 1 -	- 9 -
120 et 130	- 12 -	- 8 -
130 et 140	- 12 -	- 7 -
140 et 150	- 6 -	- 5 -

Mai 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
III. Vent.		
Calme - - -	en 5 Jours	- - - -
Vent foible et mediocre -	- 9 -	en 4 Jours
Vent fort - - -	- 12 -	- 22 -
Vent très fort - -	- 5 -	- 5 -
Rapport des quatre plages		
Nord : Est : Sud : Ouest =	6 : 6 : 7 : 12	6 : 3 : 7 : 15
IV. Atmosphere.		
Ciel serein - - -	en 8 Jours	en 8 Jours
Ciel en partie serein; nuages	- 14 -	- 17 -
Ciel couvert - -	- 9 -	- 6 -
Brouillard - -	- 3 -	- - - -
Neige - - -	- 2 -	- 3 -
	la dern. le 15 Mai.	la dern. le 11 Mai.
Pluie mediocre -	- 7 } 9	4
— abondante -	- 2 }	
Grelle - - -	le 15.	le 9.
Tonnere - -	le 25.	- - - -
La gelée blanche -	- - - -	le 4.

Juin

Juin 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
I. Barometre.		
Au plus haut - - -	28, 42 pouces	27, 46 pouces
	le 26 à 10 h. av. m.	le 27 à 2 h. apr. md
Au plus bas - - -	27, 66	26, 92
	le 8 à 3 h. mat.	le 6 à 6 h. s.
Variation totale - -	0, 76	0, 54
Milieu arithmetique - -	28, 04	27, 19
Hauteur moyenne - -	28, 095	27, 20
II. Thermometre.		
Au plus bas, ou le moindre	139° D; R + 6°,0	135° D; R + 8,0
chaleur - - -	le 12 matin	le 14 à 10 h. s.
Au plus haut, ou la plus	114; R + 19,2	102; R + 25,6
grande chaleur - -	le 19 a midi	le 9 à 2 h. apr. md.
Chaleur moyenne de la nuit	133,6; R + 8,8	126,8; R + 12,2
Chaleur moyenne de l'après midi	122,6; R + 14,6	113,6; R + 19,4
Chaleur de la nuit moindre		
que - - 130° D	en 25 Jours	en 11 Jours
entre 130 et 120	- 5 -	- 18 -
120 et 110	- - - -	- 1 -
Chaleur de l'après midi		
plus grande que - 110	- - - -	- 6 -
entre 110 et 120	- 7 -	- 22 -
120 et 130	- 21 -	- 2 -
130 et 140	- 2 -	- - - -

Juin 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
III. Vent.		
Calme - - - -	en 5 Jours	- - - -
Vent foible et mediocre -	- 9 -	en 3 Jours
Vent fort - - -	- 11 -	- 22 -
Vent très fort - -	- 5 -	- 5 -
Rapport des quatre plages		
Nord : Est : Sud : Ouest =	1 : 3 : 7 : 19	5 : 6 : 6 : 13
IV. Atmosphere.		
Ciel serein - - -	en 6 Jours	- - - -
Ciel en partie serein; nuages	- 22 -	en 16 Jours
Ciel couvert - -	- 2 -	- 14 -
Brouillard - -	- 1 -	- - - -
Pluie mediocre - -	- 9 } 15 -	- 6 } 12 -
— forte - -	- 6 }	- 6 }
Grelle - - -	le 17.	le 21
Tonnere - -	- - - -	le 2, 9, 10, 11, 13, 16, 21, 26=8
Arc-en-ciel - -	- - - -	le 10.

Juillet

Juillet 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
I. Barometre.		
Au plus haut - - -	28,52 pouces le 26 à 6 h. soir	27,42 pouces le 9 jour entier.
Au plus bas - - -	27,65 le 11 s.	26,92, le 17, 18, 19, 20 et 21
Variation totale - - -	0, 87	0, 50
Milieu arithmetique - -	28, 085	27, 17
Hauteur moyenne - -	28, 086	27, 20
II. Thermometre.		
Au plus bas, ou la moindre chaleur - - - -	139 D.; R + 5°,9 le 2 matin	136 D.; R + 7°,5 le 28 s. et 29 m.
Au plus haut, ou la plus grande chaleur - - -	114; R + 19,2 le 12 à midi	101,3; R + 26 le 14 à 2 h. apr. md.
Chaleur moyenne de la nuit	129; R + 11,2	125,2; R + 13,7
Chaleur moyenne de l'après midi	125; R + 13,3	115; R + 18,7
Chaleur de la nuit moindre que - - 130° D	en 15 Jours	en 13 Jours
entre 130 et 120	- 16 -	- 15 -
120 et 110	- - - -	- 3 -
Chaleur de l'après midi plus grande que - 110°	- - - -	- 8 -
entre 110 et 120	- 4 -	- 17 -
120 et 130	- 20 -	- 5 -
130 et 140	- 7 -	- 1 -

Juillet 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
III. Vent.		
Calme - - - -	en 6 Jours	en 0 Jours
Vent foible et mediocre -	- 20 -	- 1 -
Vent fort - - -	- 5 -	- 25 -
Vent tres fort - -	- - - -	- 5 -
Rapport des quatre plages		
Nord : Est : Sud : Ouest =	7 : 2 : 6 : 16	8 : 3 : 5 : 15.
IV. Atmosphere.		
Ciel serein - -	en 6 Jours	- - - -
Ciel en partie serein ; nuages	- 13 -	en 12 Jours
Ciel couvert - -	- 12 -	- 19 -
Brouillard - -	- 6 -	- - - -
Pluie { mediocre -	- 12 } 15 -	- 15 } 23 -
Pluie { forte - -	- 3 }	- 8 }
Tonnere - -	le 8, 13, 17 et 18 = 4	le 14 et 22 = 2
Arc - en - ciel - -	- - - -	2.

Août

Août 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
I. Barometre.		
Au plus haut - - -	28, 40 pouces le 13 à midi	27, 63 pouces le 14 m. et apr. md.
Au plus bas - - -	27, 55 le 18 soir	27, 00 le 19 m. et apr. md.
Variation totale - -	0, 85	0, 63
Milieu arithmetique - -	27, 975	27, 315
Hauteur moyenne - -	28, 075	27, 271
II. Thermometre.		
Au plus bas, ou la moindre chaleur - - -	136,9∂D.; R + 7 le 23 matin	136,9∂D; R + 7 le 10 s. 14 et 20 m.
Au plus haut, ou la plus grande chaleur - -	112,5; R + 20 le 16 a midi	108; R + 22,4 le 5 après midi
Chaleur moyenne de la nuit	129,6; R + 10,9	130,2; R + 10,6
Chaleur moyenne de l'après midi	122,9; R + 14,4	118,6; R + 16,8
Chaleur de la nuit moindre que - - 130∂D	en 21 Jours	en 20 Jours
entre 130 et 120	- 10 -	- 11 -
Chaleur de l'après midi plus grande que - - 110	- - - -	- 2 -
entre 110 et 120	- 8 -	- 16 -
120 et 130	- 22 -	- 12 -
130 et 140	- 1 -	- 1 -

Août 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
III. Vent.		
Calme - - -	en 7 Jours	en 1 Jours
Vent foible et mediocre -	- 20 -	- 10 -
Vent fort - - -	- 4 -	- 16 -
Vent très fort - -	- - - -	- 4 -
Rapport des quatre plages		
Nord : Est : Sud : Ouest =	9 : 3 : 4 : 15	5 : 9 : 1 : 16
IV. Atmosphere.		
Ciel serein - - -	en 5 Jours	en 3 Jours
Ciel en partie serein; nuages	- 18 -	- 11 -
Ciel couvert - -	- 8 -	- 17 -
Brouillard - -	- 2 -	- 1 -
Pluie mediocre -	- 14 } 18	- 14 } 18
— forte - -	- 4 }	- 4 }
Grelle - - -	2	1.
Tonnere - -	le 7 et 31 = 2	le 7, 22 et 26 = 3
Eclairs - -	- - - -	le 30 et 31 = 2
Arc - en - ciel - -	1.	2.

Septembre

Septembre 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
I. Barometre.		
Au plus haut - -	28, 42 pouces	27, 67 pouces
	le 28 à midi	le 13 à 2 h. apr. md.
Au plus bas - - -	27, 83	27, 00
	le 10 à midi	le 10 s. et le 11 m.
Variation totale - -	0, 59	0, 67
Milieu arithmetique - -	28, 125	27, 335
Hauteur moyenne - -	28, 146	27, 298
II. Thermometre.		
Au plus bas, ou la moindre chaleur - - -	153°,7 D; R − 2	153° D; R − 1°,6
	le 27 mâtin	le 29 et 30 m.
Au plus haut, ou la plus grande chaleur - -	124,5; R + 13,6	118,1; R + 17
	le 4 à midi	le 1 après midi
Chaleur moyenne de la nuit	140; R + 5,3	142,5; R + 4
Chaleur moyenne de l'après midi	133; R + 9,1	133; R + 9,1
Froid de la nuit plus grand que - - 150° D	en 2 Jours	en 3 Jours
entre 150 et 140	- 19 -	- 18 -
140 et 130	- 9 -	- 9 -
Chaleur de l'après midi plus grand que - 120°	- - - -	- 2 -
entre 120 et 130	- 8 -	- 8 -
130 et 140	- 18 -	- 16 -
140 et 150	- 4 -	- 4 -

Septembre

Septembre 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
III. Vent.		
Calme - - -	en 4 Jours	en 2 Jours
Vent foible et mediocre -	- 23 -	- 9 -
Vent fort - - -	- 3 -	- 16 -
Vent très fort - -	- - - -	- 3 -
Rapport des quatre plages Nord : Est : Sud : Ouest =	18 : 6 : 0 : 6	10 : 3 : 1 : 16
IV. Atmosphere.		
Ciel serein - -	en 4 Jours	- - - -
Ciel en partie serein ; nuages	- 23 -	en 14 Jours
Ciel couvert - -	- 3 -	- 16 -
Brouillard - -	- 4 -	- 2 -
Pluie médiocre -	- 5 -	- 9 } 11
— forte - -	- - - -	- 2 }
Tonnere - -	- - - -	le 1.
Grelle - - -	le 18.	le 22.
Neige médiocre -	le 29 (la première)	le 23, (la prem.) 28 et 30 = 3
Gele blanche - -	en 9 Jours	en 1 Jour
Arc - en - ciel - -	- - - -	1.

Octobre

Octobre 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
I. Barometre.		
Au plus haut - -	28, 35 pouces	27, 54 pouces
	le 3 ap. md. et le 4 m	le 4 jour entier
Au plus bas - -	27, 20	27, 04
	le 13 matin	le 12 et 20 mat.
Variation totale - -	1, 15	0, 50
Milieu arithmetique -	27, 775	27, 29
Hauteur moyenne - -	27, 927	27, 315
II. Thermometre.		
Au plus bas, ou la moindre	154,5$^{\partial}$D; R−2$^{\partial}$,4	155,6$^{\partial}$D; R−3$^{\partial}$
chaleur - - -	le 21 et 24 matin	le 21 à 6 h. m.
Au plus haut, ou la pl. grande chal.	133,6; R + 8,7	119; R + 11,2
Chaleur moyenne de la nuit	142,8; R + 3,9	144; R + 3,2
Chaleur moyenne de l'après midi	139,8; R + 5,5	137,8; R + 6,6
Froid de la nuit plus grand		
que 150$^{\partial}$D	en 5 Jours	en 4 Jours
entre 150$^{\partial}$ et 140	- 22 -	- 25 -
140 et 130	- 4 -	- 2 -
Chaleur de l'après midi		
plus grande que - 130$^{\partial}$	- - - -	- 1 -
entre 130 et 140	- 18 -	- 22 -
140 et 150	- 11 -	- 7 -
150 et 160	- 2 -	- 1 -

Octobre 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
III. Vent.		
Calme - - -	en 4 Jours	en 1 Jour
Vent foible et mediocre -	- 20 -	- 9 -
Vent fort - - -	- 7 -	- 16 -
Vent tres fort - -	- - - -	- 5 -
Rapport des quatre plages		
Nord : Est : Sud : Ouest =	5 : 9 : 7 : 10	6 : 3 : 4 : 18
IV. Atmosphere.		
Ciel serein - - -	en 1 Jour	- - - -
Ciel en partie serein ; nuages	- 9 -	en 14 Jours
Ciel couvert - -	- 21 -	- 17 -
Brouillard - -	- 2 -	- - - -
Pluie mediocre -	- 11 } 15 -	- 11 } 13 -
— forte - -	- 4 }	- 2 }
Neige mediocre -	- 2 -	- 2 } 3 -
— copieuse -	- - - -	- 1 }
Gelée blanche - -	- 1 -	- - - -
Halo - - -	- 1 -	- - - -

Novembre

Novembre 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
I. Barometre.		
Au plus haut - -	28, 35 pouces	27, 63 pouces
	le 3 mat. et à md.	le 4 à 2 h. apr. md.
Au plus bas - -	27, 19	26, 92
	le 24 matin	le 9.s. et 29 apr. md
Variation totale - -	1, 16	0, 71
Milieu arithmetique -	27, 77	27, 275
Hauteur moyenne - -	27, 553	27, 25
II. Thermometre.		
Au plus bas, ou le plus grand froid	167°,8 D; R − 9°,5	175 D.; R − 13°,3
	le 22 matin	le 23 à 6 h. matin
Au plus haut, ou le moindre froid	139,5; R + 5,6	140,6; R + 5
	le 1 à midi	le 29 à 2 h. apr. md.
Froid moyen de la nuit -	150,7; R − 0,3	151,5; R − 0,7
Chaleur moyenne de l'après midi	148,9; R + 0,4	149; R + 0,5
Froid de la nuit plus grand que - - - 170°D	- - - -	en 2 Jours
entre 170 et 160	en 3 Jours	- 1 -
160 et 150	- 12 -	- 11 -
150 et 140	- 15 -	- 16 -
Froid d'après midi moindre que - - 140	- 1 -	- - - -
entre 140 et 150	- 21 -	- 21 -
150 et 160	- 6 -	- 7 -
160 et 170	- 2 -	- 2 -

Novembre 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
III. Vent.		
Calme - - - -	en 5 Jours	en 2 Jours
Vent foible et mediocre -	- 18 -	- 8 -
Vent fort - - -	- 6 -	- 18 -
Vent très fort - -	- 1 -	- 2 -
Rapport des quatre plages		
Nord : Est : Sud : Ouest =	4 : 7 : 12 : 7	6 : 5 : 4 : 15
IV. Atmosphere.		
Ciel serein - - -	en 1 Jour	- - - -
Ciel en partie serein; nuages	- 9 -	en 3 Jours
Ciel couvert - -	- 20 -	- 27 -
Brouillard - -	- 5 -	- 3 -
Pluie mediocre - -	- 6 -	- 9 } 10 -
— forte - -	- - - -	- 1 }
Grelle - - -	le 28.	- - - -
Neige mediocre -	en 12 Jours	- 12 } 14 -
— copieuse - -	- - - -	- 2 }
Gelée blanche - -	- 2 -	- - - -

Décembre 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
I. Barometre.		
Au plus haut - - - -	28, 80 pouces le 17 à 6 h. m.	28, 00 pouces le 11 jour entier
Au plus bas - - - -	27, 48 le 30 à 6 h. s.	27,13 le 27 à 2 h. apr. midi et le 31 à 6 h. matin
Variation totale - - -	1, 32	0, 87
Milieu arithmetique - -	28, 14	27, 565
Hauteur moyenne - - -	28, 169	27, 529
II. Thermometre.		
Au plus bas, ou le plus grand froid - - - - -	1852°D;R-18°,8 le 17 à 6 h. matin	191°D; R-21°,9 le 17 à 6 h. mat.
Au plus haut, ou le moindre froid - - -	146,3; R + 2 le 2 et 10 à midi	146; R + 2,1 le 5 à 2 h. apr. md.
Froid moyen de la nuit -	151,2; R — 0,6	159,8; R — 5,2
Froid moyen de l'après midi	150; R 0	156,7; R — 3,5
Froid de la nuit pl. fort que 190°D	- - - -	en 1 Jour
entre 190 et 180	en 2 Jours	- 2 -
180 et 170	- 0 -	- 4 -
170 et 160	- 4 -	- 7 -
160 et 150	- 17 -	- 16 -
150 et 140	- 8 -	- 1 -
Froid d'après midi moindre que - - - 150	- 14 -	- 8 -
entre 150 et 160	- 14 -	- 14 -
160 et 170	- 1 -	- 7 -
170 et 180	- 1 -	- 1 -
180 et 190	- 1 -	- 1 -

Decebre 1800.	à St. Petersbourg	à Moscou.
III. Vent.		
Calme - - - -	en 3 Jours	en 1 Jour
Vent foible et mediocre -	- 23 -	- 11 -
Vent fort - - -	- 4 -	- 12 -
Vent très fort - -	- 1 -	- 7 -
Rapport des quatre plages		
Nord : Est : Sud : Ouest =	0 : 8 : 15 : 8	3 : 6 : 7 : 15
IV. Atmosphere.		
Ciel serein - - -	en 2 Jours	en 2 Jours
Ciel en partie serein; nuages	- 5 -	- 9 -
Ciel couvert - - -	- 24 -	- 20 -
Brouillard - -	- 2 -	- 3 -
Pluie mediocre - -	- 4 -	- 2 } 4 -
— glaciale - -	- - - -	- 2 }
Neige mediocre -	- 11 -	- 12 } 15
— copieuse -	- - - -	- 3 }
Halo ☾ - - -	le 29.	- - - -

Som-

Sommaire des obſervations meteorologiques faites à St. Petersbourg et Moscou en 1800 d'après le nouveau stile

	St. Petersbourg	Moscou.
I. Barometre.		
La plus grande hauteur -	29, 32 pouces	28, 04 pouces
— — petite — — -	27, 19	26, 83
Variation totale - -	2, 13	1, 21
Hauteur moyenne - -	28, 136	27, 317
II. Thermometre.		
Le plus grand froid - -	200 degrés	201 degrés
La plus chaleur - -	112, 5	101, 3
Variation - - -	87, 5	99, 7
Chaleur moyenne de la nuit	151, 2	147
— — — d'après midi	142, 2	138, 4
Therm. au deſſus congelation	en 266 Jours	en 263 Jours
— — deſſous — —	- 150 -	- 153 -
La derniere gelee -	le 12 Mai	le 12 Mai
La premiere - - -	- 27 Septemb.	le 9 Septembre
III. Vent.		
Calme - - -	en 58 Jours	en 8 Jours
Vent foible et mediocre -	- 193 -	- 93 -
— fort - - -	- 87 -	- 211 -
— très fort - -	- 27 -	- 53 -
Nord - - -	65 - -	73
Est - - -	74 - -	63
Sud - - -	82 - -	55
Oüest - - -	144 - -	169

IV. At-

IV. Atmosphere.	St. Petersbourg	Moscou.
Ciel serein - - -	en 58 Jours	en 27 Jours
— en partie serein -	- 158 -	- 132 -
— couvert - -	- 149 -	- 206 -
Brouillard - -	en 43 Jours	en 15 Jours
Pluie forte - -	- - 18 } 101	- 28 } 117
— petite - -	- - 83	- 89
Tonnere - -	- 8 -	- 15 -
Eclairs - -	- - - -	- 2 -
Arc - en - ciel - -	- 1 -	- 6 -
Neige copieuse -	- 10 } 75	- 11 } 80
— mediocre -	- 65	- 69
— pour la derniere fois	le 15 Mai	le 11 Mai
— pour la premiere	le 29 Septemb.	- 23 Septemb.
Grele - - -	en 9 Jours	en 5 Jours
Gele blanche - -	- 12 -	- 2 -
Halones ☾ - -	2.	5
Parhelies - -	- - - -	4.

La Newa fut ouverte pendant 213 jours, depuis 24 Avril jusqu'au 23 Novembre.

NATURAL HISTORY

P. *Inochodzow.*

Errata.

Histoire.

Page	9	derniere ligne	—	lisez	—	Histoire de 1799	—	1802.	
—	17	—	—	—	—	—	—	—	
—	25	—	—	—	—	—	—	—	
—	33	—	—	—	—	—	—	—	
—	41	—	—	—	—	—	—	—	

—	123	ligne	2	dérouler	lisez	lever
—	131	—	13	ponr	—	pour
—	135	—	25	tous	—	tout
			26	effett	—	effets
			28	statistiques	—	statisticiens
—	136	—	12	majesteuses	—	majestueuses
—	137	—	11	vieunent	—	viennent
—	139	—	1	arrivera	—	arrive.

Acta.

Page	90	ligne	4	qu'ils	lisez	qu'elles
—	116	—	5	C. T. Kausler	—	C. F. Kausler
—	156	—	4	—	—	—
—	371	—	4	Koehlreuter	—	Koelreuter
—	431	—	2	effacez la derniere virgule		
—	458	—	4	C. L. Thunberg	lisez	C. P. Thunberg
—	563	—	16	parhelin	—	parhélies.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

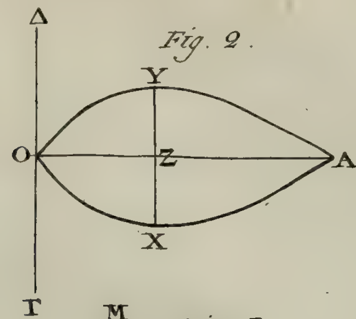


Fig. 2.

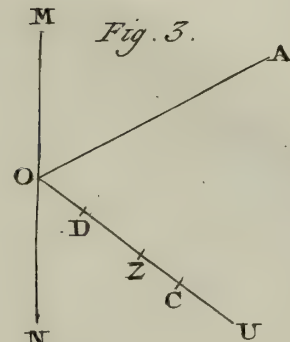


Fig. 3.

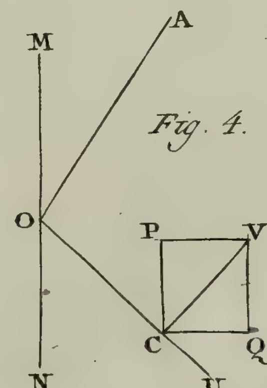


Fig. 4.



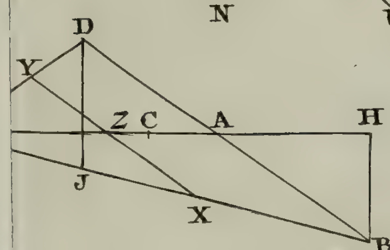


Fig. 1

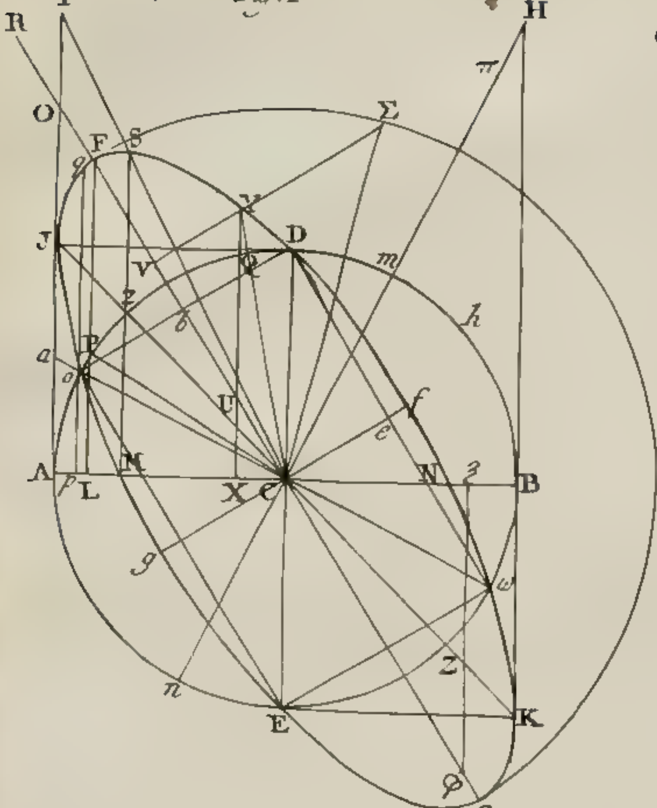


Fig 2

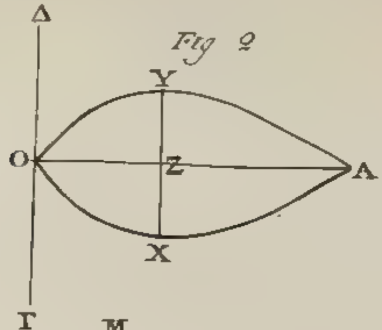


Fig. 3

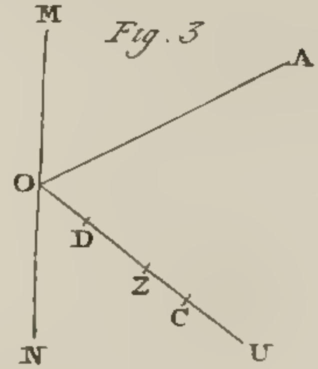


Fig 4

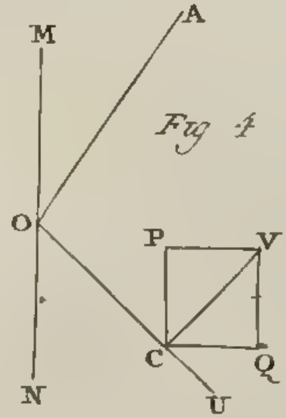
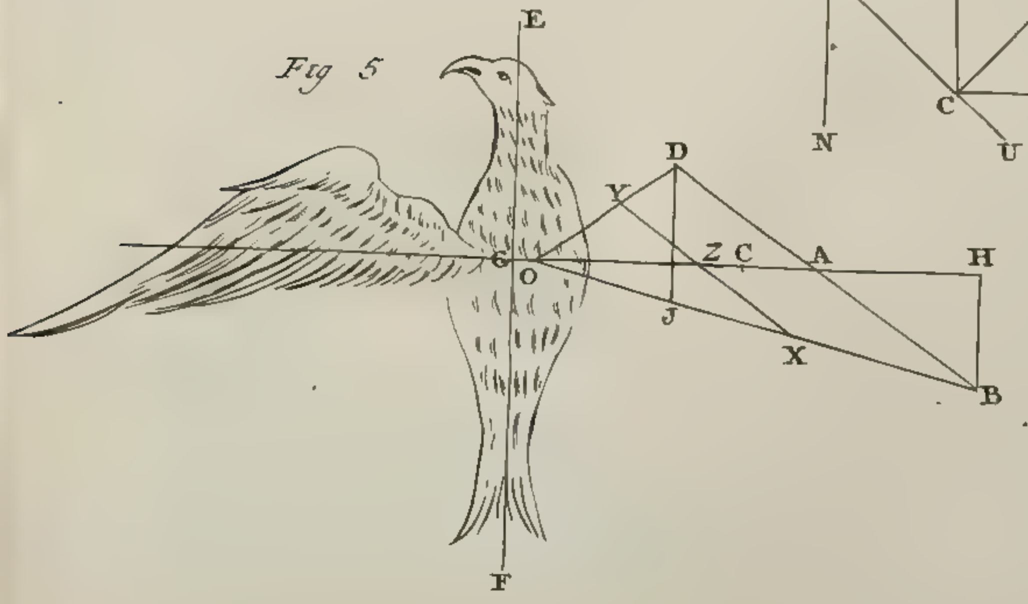
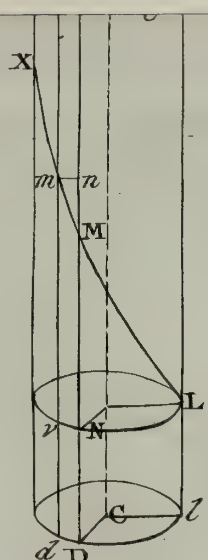


Fig 5







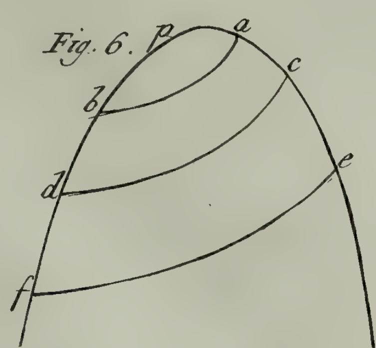
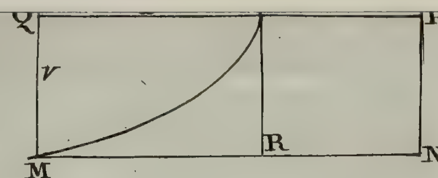


Fig. 6.



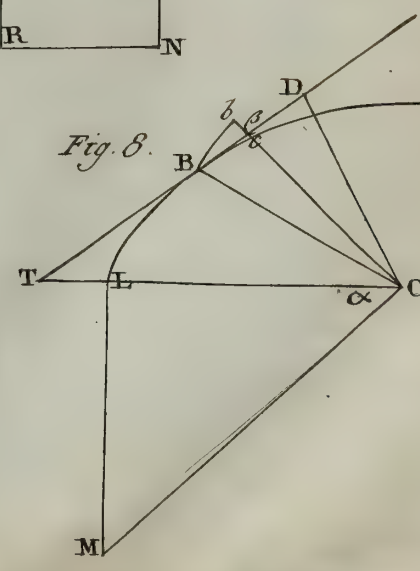


Fig. 8.

Fig. 1

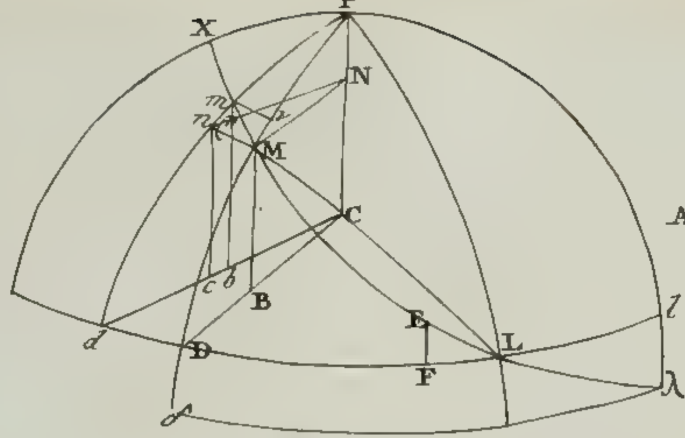


Fig. 2.

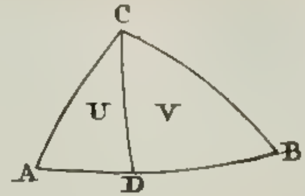


Fig 3

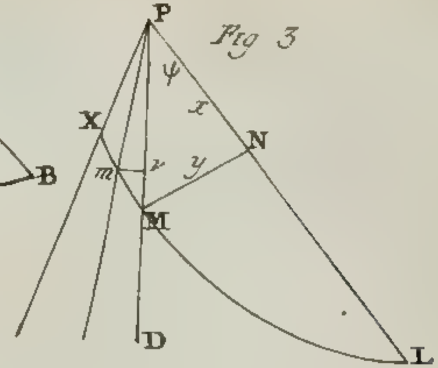


Fig. 4.

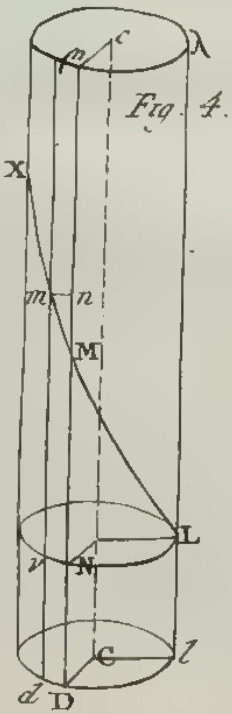


Fig. 5.

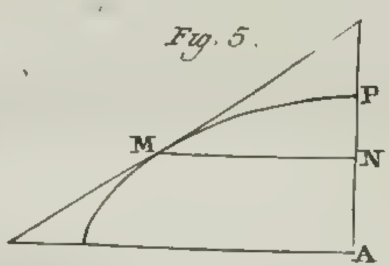


Fig 6.

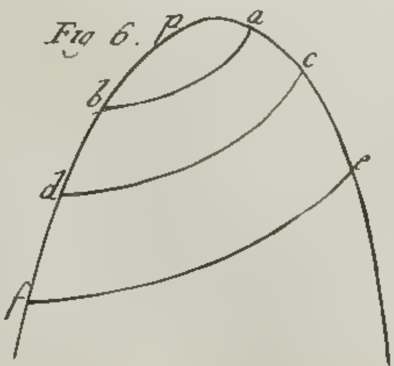


Fig. 7.

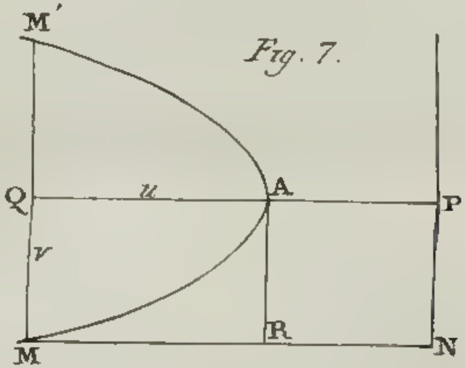
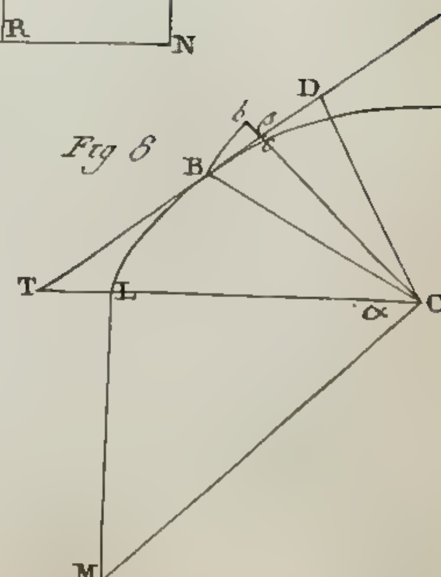


Fig 8



a Acad. Sc. Imperial. Petrop. Tom. XV. Tab. III.





PROTEA *hirsuta.*



PROTEA *obtusa*

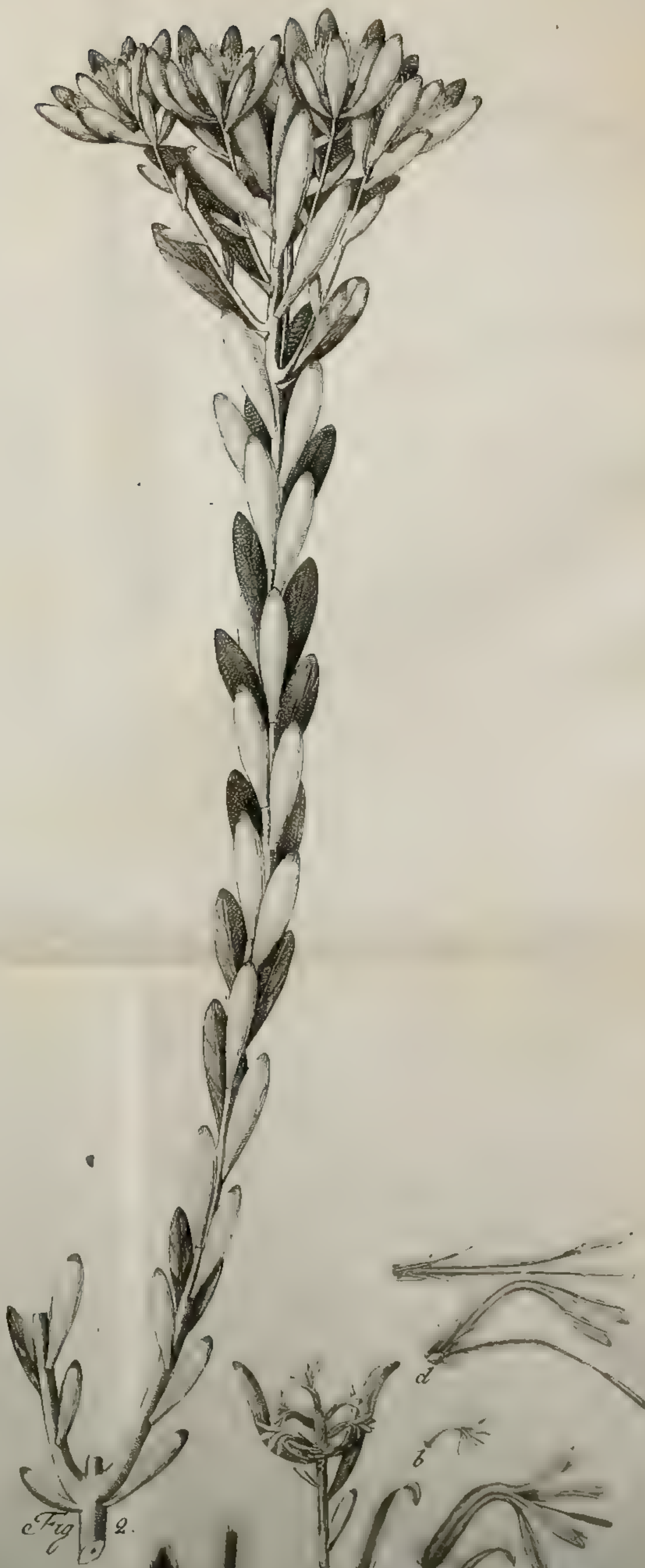


PROTEA *virgata.*





PROTEA *truncata*



PROTEA *pyramidalis*





PROTEA *ciliata*



PROTEA *verticillata*



PROTEA *daphnoides*

PROTEA *laurifolia*

FIG. II.

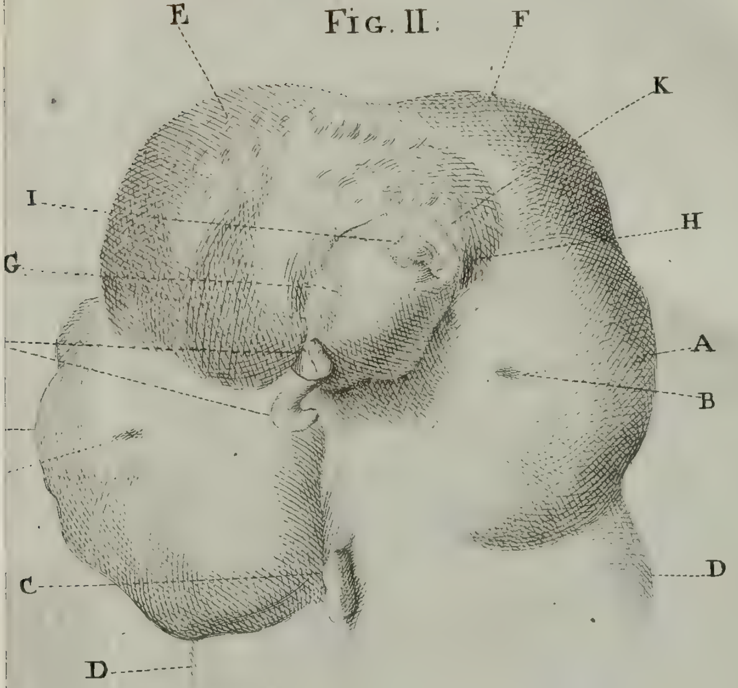


FIG. III.

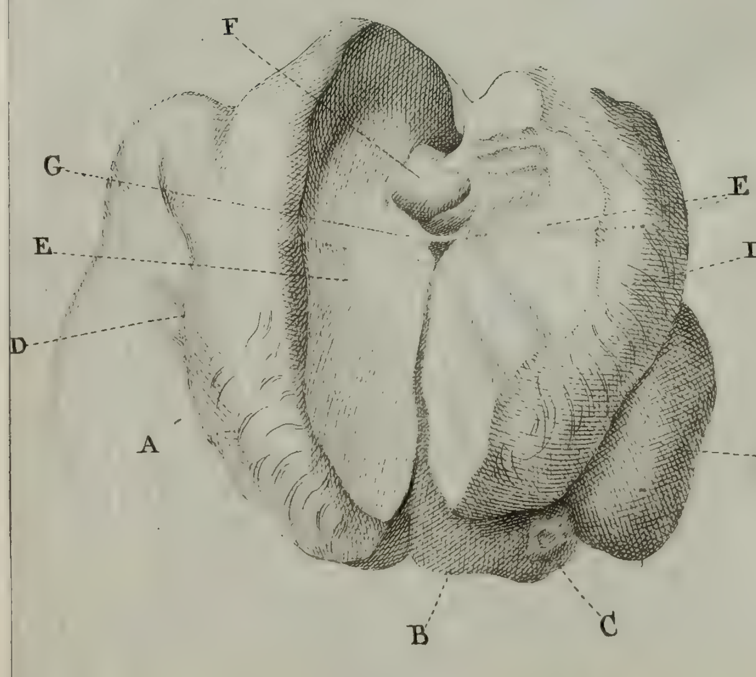


Fig. I.

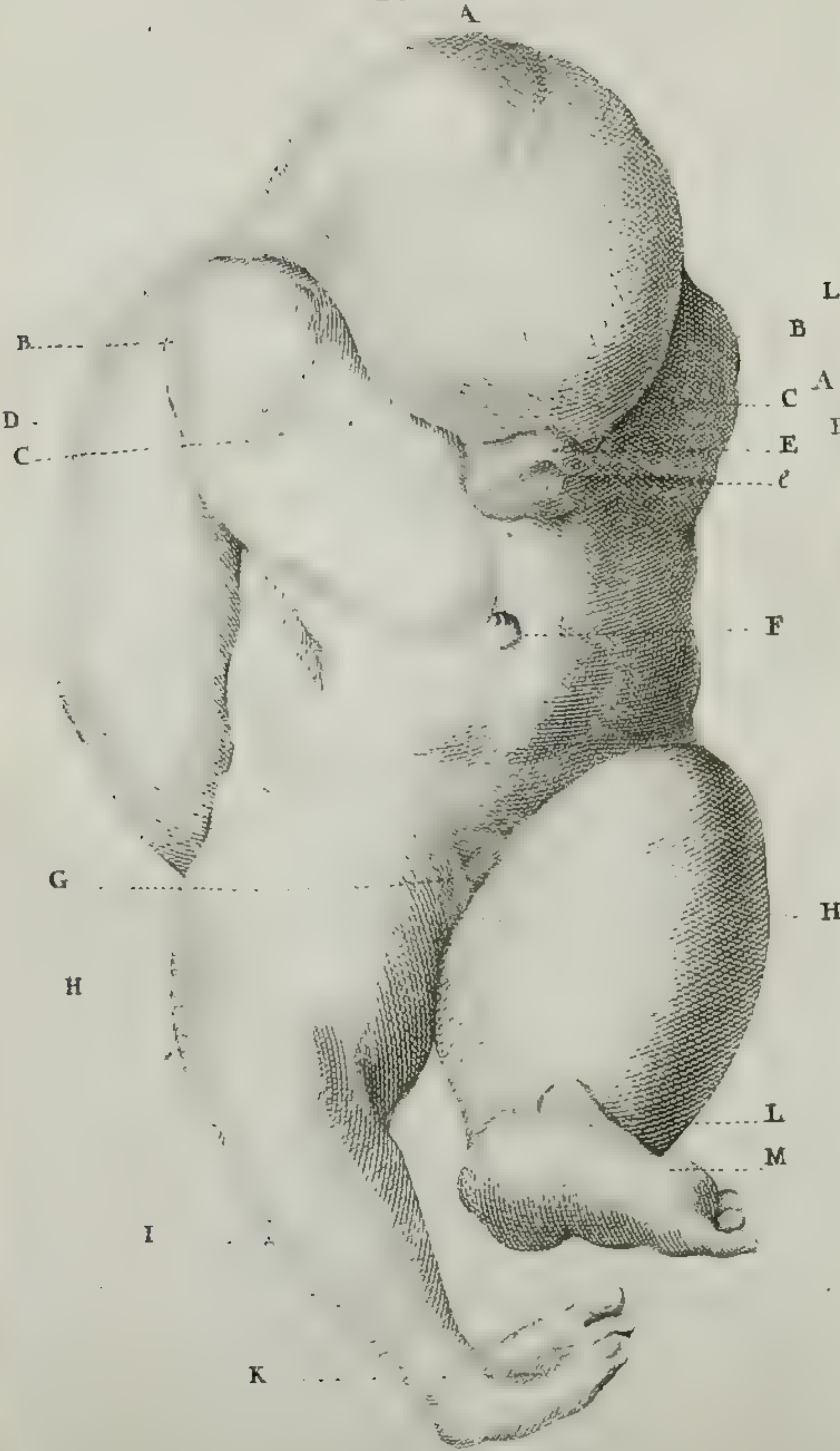


Fig. II.



Fig III



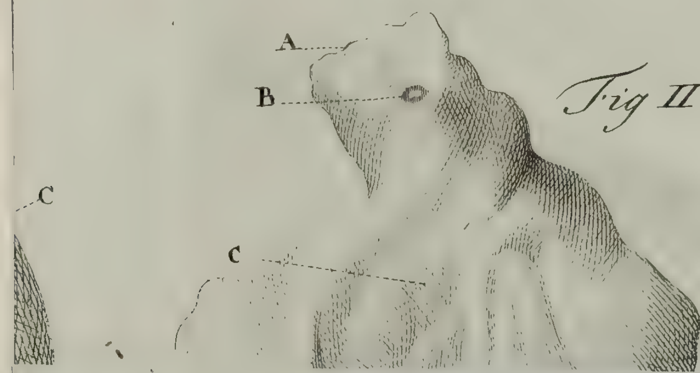


Fig II.

Fig. I

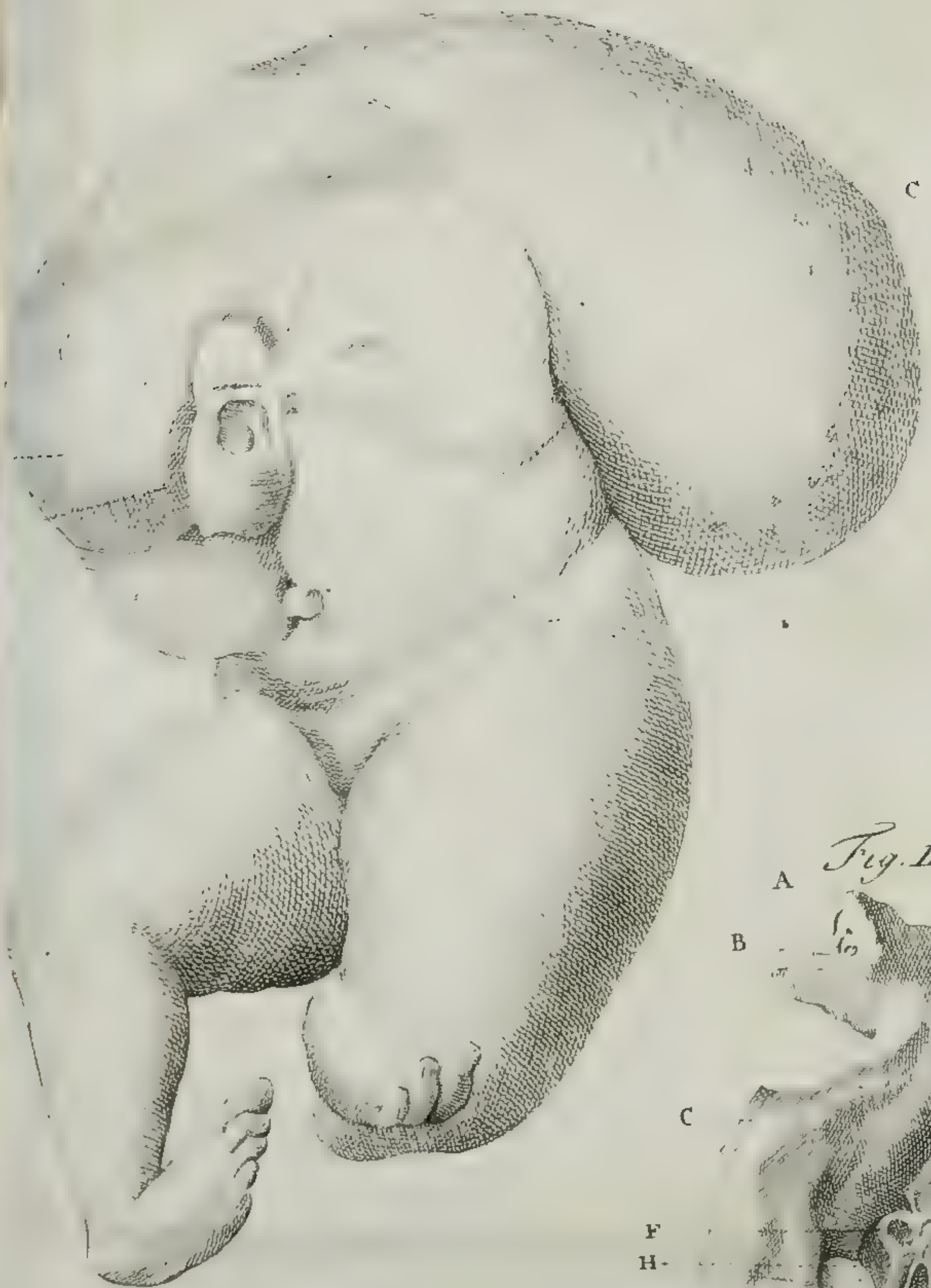


Fig II.



Fig. III

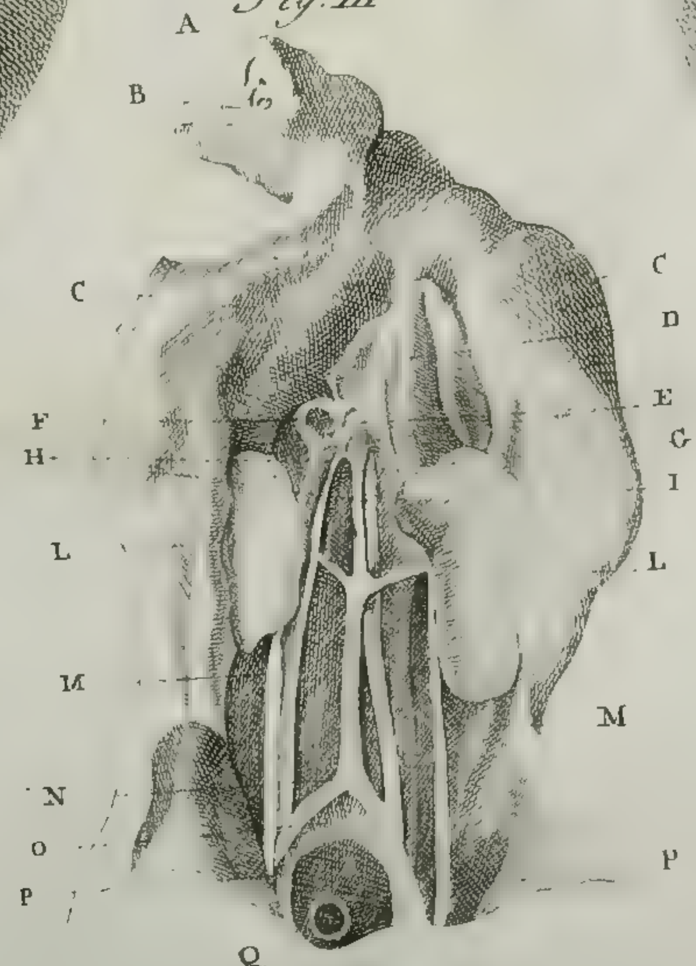


Fig. 2.

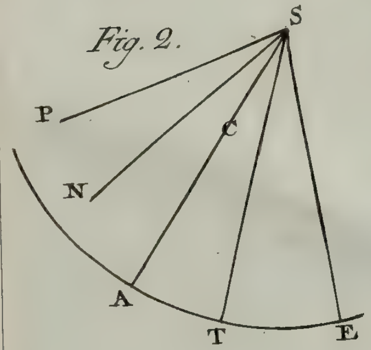


Fig. 1

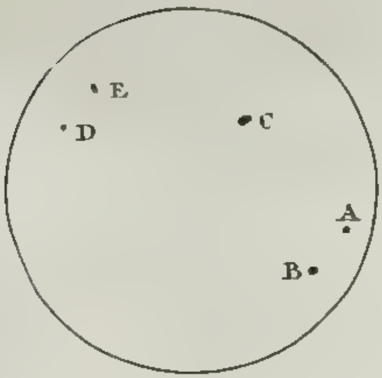
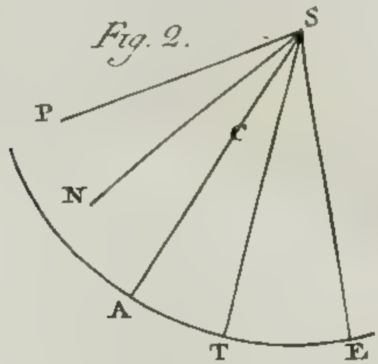


Fig. 2.



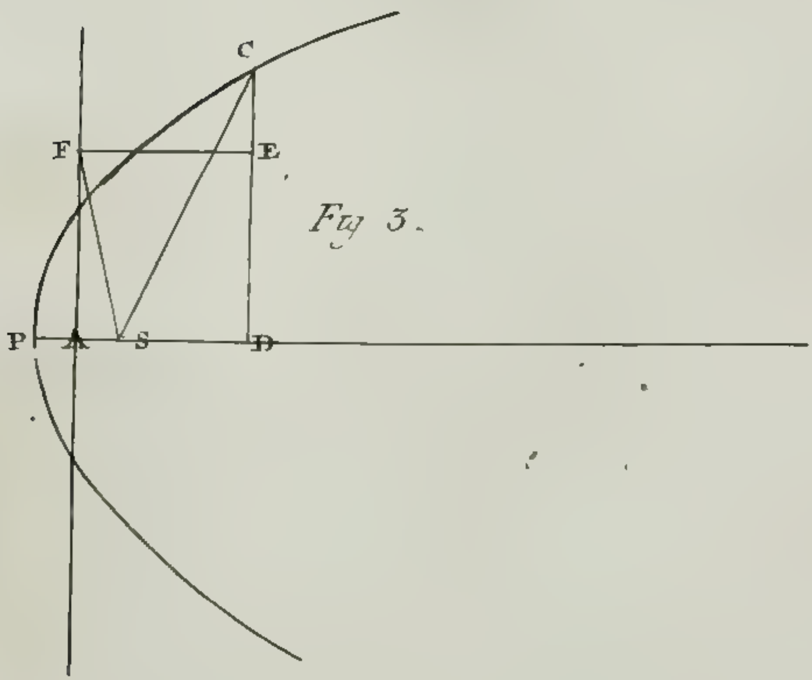


Fig 3.